

УДК 531.38

© 2002 г. М.В. ДЕРЯБИН, В.В. КОЗЛОВ

## ОБ ЭФФЕКТЕ "ВЫНЫРИВАНИЯ" ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

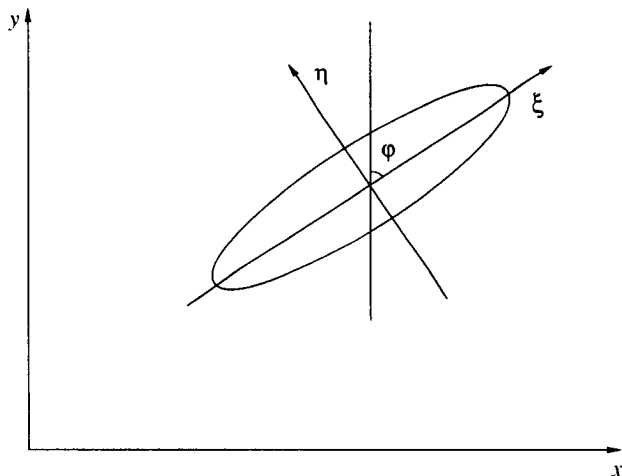
Рассматривается задача о падении тяжелого твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности. Предполагается, что в начальный момент широкая сторона тела горизонтальна и телу сообщается скорость в горизонтальном направлении. Тогда в следующие моменты времени тело начинает опускаться вниз. Однако, если его присоединенная масса в поперечном направлении достаточно велика, то затем тело резко всплывает узкой стороной вперед, поднимаясь на большую высоту, чем в начальный момент. Анализ эффекта выныривания основан на разложении решений уравнений Кирхгофа в ряды по степеням времени и на оценках коэффициентов этих разложений с помощью мажорант Коши.

**1. Уравнения движения.** Рассмотрим, следуя С.А. Чаплыгину [1], задачу о движении тяжелого твердого тела в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности. Пусть твердое тело имеет плоскость симметрии  $\Pi$ . Как отмечено в [1], существуют движения тела, при которых плоскость  $\Pi$  занимает постоянное вертикальное положение. В этом случае положение твердого тела описывается, очевидно, тремя параметрами, например, декартовыми координатами  $x$ ,  $y$  некоторой фиксированной точки тела  $O$  в плоскости  $\Pi$  (ось  $x$  горизонтальна, а ось  $y$  направлена вверх) и углом  $\varphi$  поворота тела в плоскости  $\Pi$  относительно вертикальной оси (фиг. 1).

Кинетическую энергию системы "тело – жидкость" удобно представить в системе координат, жестко связанной с твердым телом (см. [2, 3]). Выберем такую систему координат  $O\xi\eta\zeta$ , чтобы ось  $O\xi$  была ортогональна плоскости  $\Pi$ . Точку  $O$  можно выбрать так, чтобы кинетическая энергия системы имела вид  $T = \frac{1}{2}(a_1u^2 + a_2v^2 + b\omega^2)$ , где  $u$  и  $v$  – проекции скорости точки  $O$  на оси  $O\xi$ ,  $O\eta$ , а  $\omega$  – угловая скорость тела. Константы  $a_1$ ,  $a_2$  и  $b$  включают в себя присоединенные массы и присоединенный момент инерции тела (см. [2, 3]). Мы будем считать, что  $a_2 > a_1$ , а угол  $\varphi$  отсчитывается по часовой стрелке от вертикали до оси  $O\xi$ . Следовательно,  $\dot{\omega} = -\dot{\varphi}$ .

Будем считать, что суммарный момент силы тяжести и силы Архимеда относительно точки  $O$  равен нулю. Это условие заведомо выполнено, если тело однородное (тогда точка  $O$  – его центр масс). Динамика тяжелого твердого тела описывается уравнениями Кирхгофа [1, 3]:

$$\begin{aligned} a_1\dot{u} - a_2v\dot{\omega} &= -p \cos \varphi, & a_2\dot{v} + a_1u\dot{\omega} &= -p \sin \varphi \\ b\dot{\omega} + (a_2 - a_1)uv &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$



Фиг. 1

Здесь положительная постоянная  $p$  – проекция на вертикаль суммы сил тяжести и Архимеда. Условие  $p > 0$  соответствует тому, что тело тонет.

Траектория центра масс тела  $O$  определяется из соотношений

$$\dot{x} = u \sin \varphi - v \cos \varphi, \quad \dot{y} = u \cos \varphi + v \sin \varphi \quad (1.2)$$

Асимптотическое поведение системы (1.1) на больших временах исследовалось в работах [3–5]. В частности, было показано, что при  $t \rightarrow \infty$  тело падает вниз, стремясь занять такое положение, при котором его широкая сторона горизонтальна; при этом оно совершает угловые колебания с частотой порядка  $t$  и амплитудой порядка  $1/\sqrt{t}$ .

В настоящей работе динамика системы (1.1) рассматривается на малых временах.

**2. Эффект "выныривания".** Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  широкая сторона твердого тела горизонтальна, начальная угловая скорость равна нулю и начальная линейная скорость также горизонтальна:

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = 0, \quad \varphi(0) = \pi/2, \quad \omega(0) = 0 \quad (2.1)$$

Пусть, для определенности,  $u_0 > 0$ .

Мы будем искать решение системы (1.1) в виде рядов Тейлора по степеням времени  $t$ :

$$u = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \dots, \quad v = v_1 t + v_2 t^2 + \dots$$

$$\varphi = \pi/2 + \varphi_2 t^2 + \varphi_3 t^3 + \dots, \quad \omega = -2\varphi_2 t - 3\varphi_3 t^2 - \dots \quad (2.2)$$

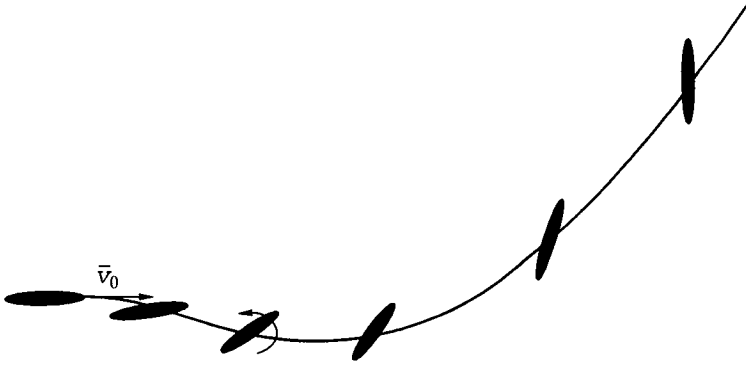
Подставляя разложения (2.2) в уравнения (1.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ , получим:

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0$$

$$v_1 = -p/a_2, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = -a_1(a_2 - a_1)u_0^2 p / 6a_2^2 b$$

$$\varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = -(a_2 - a_1)u_0 p / 6a_2 b$$

Заметим, что при достаточно малых значениях времени  $t$  угол  $\varphi$  уменьшается (фиг. 2). Интересно отметить, что уменьшение угла  $\varphi$  вполне соответствует известному описанию падения в воздухе продолговатых прямоугольников из плотной бумаги: если тело падает от наблюдателя вправо, то оно вращается против часовой стрелки (см. [6]).



Фиг. 2

Подставим полученные значения для скоростей  $u$ ,  $v$  и угла  $\varphi$  в уравнения (1.2). Представляет интерес значение у высоты точки  $O$ :

$$y = -\frac{p}{2a_2} t^2 + \frac{(a_2 - a_1)u_0^2 p}{24a_2 b} t^4 \dots \quad (2.3)$$

Ограничимся пока первыми двумя членами этого разложения. Так как коэффициент при  $t^2$  отрицательный, то вначале координата  $y$  точки  $O$  уменьшается, т.е. тело начинает тонуть, поворачиваясь при этом широкой стороной вперед.

Предположим теперь, что  $a_2 \gg a_1$ . Тогда первый коэффициент будет малым и при больших значениях  $t$  доминирует второе слагаемое  $(u_0^2 p / 24b)t^4$ . Следовательно, затем координата  $y$  начинает расти, быстро становясь положительной. Такое свойство движения тяжелого твердого тела называется "эффектом выныривания": тело всплывает, поднимаясь выше своего начального положения. Его строгое обоснование требует анализа отброшенных слагаемых в разложении (2.3).

**3. Обоснование.** Для получения оценок коэффициентов воспользуемся методом мажорант для решений обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [7]).

Напомним идею метода мажорантных оценок. По определению, аналитическая функция  $f(x, t)$  мажорирует аналитическую функцию  $g(x, t)$ , если для коэффициентов рядов Тейлора в окрестности нуля по обоим аргументам для этих функций справедливы оценки  $f_{ij} \geq |g_{ij}|$ .

Будем рассматривать дифференциальные уравнения вида

$$\ddot{x} = f(x, t), \quad \ddot{y} = g(x, t) \quad (3.1)$$

Пусть функции  $x(t)$  и  $y(t)$  – решения уравнений (3.1) с нулевыми начальными условиями:  $x(0) = y(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$ . Оказывается, что в этом случае функция  $x(t)$  мажорирует функцию  $y(t)$ .

В [7] рассматривались одномерные уравнения первого порядка, но доказательство дословно переносится на многомерный случай, в частности, на уравнения вида (3.1).

Уравнения движения (1.1) допускают следующие инвариантные соотношения (следствие теоремы об изменении импульса см. [3]):

$$a_1 u = -pt \cos \varphi + s \cos(\varphi + \psi), \quad a_2 v = -pt \sin \varphi + s \sin(\varphi + \psi) \quad (3.2)$$

где константы  $s$  и  $\psi$  зависят от начальных условий. С учетом начальных данных (2.1), получаем, что  $\psi = \pi/2$ ,  $s = -a_1 u_0$ .

Введем безразмерные скорости  $U, V$ :  $u = u_0 U, v = u_0 V$ ;  $[u_0] = L/T, [U, V] = 1$ ;  $U(0) = 1, V(0) = 0$ . Буквами  $L$  и  $T$  обозначены размерности длины и времени. Перепишем уравнения движения (1.1) и (3.2) с учетом начальных условий (2.1):

$$U = -\frac{t}{\alpha} \cos \varphi + \sin \varphi, \quad V = -\frac{t}{\beta} \sin \varphi - \frac{\alpha}{\beta} \cos \varphi$$

$$\ddot{\varphi} = \Gamma \left( -\frac{t}{\alpha} \cos \varphi + \sin \varphi \right) \left( -\frac{t}{\beta} \sin \varphi - \frac{\alpha}{\beta} \cos \varphi \right) \quad (3.3)$$

$$\alpha = \frac{a_1 u_0}{\rho}, \quad \beta = \frac{a_2 u_0}{\rho}, \quad \Gamma = \frac{(a_2 - a_1) u_0^2}{b}$$

Константы  $\alpha$  и  $\beta$  имеют размерность времени, а  $[\Gamma] = 1/T^2$ .

Введем безразмерное время  $\tau = t/\alpha$ ; дифференцирование по времени  $\tau$  будем обозначать штрихом. Перепишем последнее уравнение (3.3):

$$\varphi'' = \frac{\alpha^3 \Gamma}{\beta} ((\tau^2 - 1) \sin \varphi \cos \varphi + \tau (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi))$$

Сделаем замену  $\vartheta = 2\varphi + \pi$ , тогда получим

$$\vartheta'' = -\gamma((\tau^2 - 1) \sin \vartheta + 2\tau \cos \vartheta) \quad (3.4)$$

где  $\gamma = \alpha^3 \Gamma / \beta$  – безразмерный коэффициент. Последняя замена выбрана таким образом, чтобы в начальный момент времени  $\vartheta(0) = 0, \vartheta'(0) = 0$ .

Представим решение уравнения (3.4) в виде конечного ряда по степеням времени  $\tau$ , при этом остаточный член такого ряда не превосходит соответствующий остаточный член для решения мажорирующего уравнения, который можно выписать явно.

Правая часть уравнения (3.4) мажорируется функцией

$$-\gamma((\tau^2 - 1) \sin \vartheta + 2\tau \cos \vartheta) \ll \gamma(\tau + 1)^2 e^{\vartheta} \ll \gamma e^{\sqrt{2}\gamma\tau + \vartheta} \quad (3.5)$$

Последняя оценка выписана в предположении, что  $\gamma \geq 2$ . Это соответствует тому, что начальная скорость  $u_0$  достаточно велика.

Дифференциальное уравнение  $\chi'' = \gamma e^{\sqrt{2}\gamma\tau + \chi}$  с нулевыми начальными условиями решается явно:

$$\chi = -\sqrt{2}\gamma\tau - 2 \ln(1 - \sqrt{\gamma/2}\tau) \quad (3.6)$$

Будем раскладывать решение в ряд до степеней пятого порядка. Тогда остаточный член в форме Лагранжа решения (3.6) будет равен

$$R_5 = \frac{2(\gamma/2)^{5/2} \tau^5}{5(1 - \sqrt{\gamma/2}\zeta)^5}, \quad \zeta \in (0, \tau)$$

Ищем решение уравнения (3.3) в виде

$$\vartheta = \vartheta_3 \tau^3 + \vartheta_4 \tau^4 + \tilde{\vartheta}(\tau), \quad |\tilde{\vartheta}(\tau)| \ll R_5 \quad (3.7)$$

Подставив разложение (3.7) в уравнение (3.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\tau$ , получим

$$\vartheta_3 = -\gamma/3, \quad \vartheta_4 = 0 \quad (3.8)$$

Выразим теперь безразмерные скорости  $U, V$ :

$$U = \tau \sin \frac{\vartheta}{2} + \cos \frac{\vartheta}{2}, \quad V = -\frac{\alpha}{\beta} \tau \cos \frac{\vartheta}{2} + \frac{\alpha}{\beta} \sin \frac{\vartheta}{2}$$

и подставим их в выражение для скорости  $\dot{y}$  :

$$\dot{y} = -u_0 \tilde{u} \sin \frac{\vartheta}{2} + v_0 \tilde{v} \cos \frac{\vartheta}{2} = -\frac{u_0}{2} \left( \tau - \tau \cos \vartheta + \sin \vartheta + \frac{a_1}{a_2} \tau + \frac{a_1 \tau \cos \vartheta}{a_2} - \frac{a_1 \sin \vartheta}{a_2} \right) \quad (3.9)$$

Используя формулы для остаточных членов синуса и косинуса, получим

$$\sin \vartheta = \vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} \cos \zeta_1, \quad \cos \vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2!} \cos \zeta_2, \quad \zeta_1, \zeta_2 \in (0, \vartheta) \quad (3.10)$$

Перепишем теперь с учетом разложений (3.10) соотношение (3.9) и заменим дифференцирование по времени  $t$  на  $\tau$ :

$$y' = -\frac{a_1 u_0^2}{2p} \left( -\frac{(a_1 + a_2) \tau \cos \zeta_2}{2a_2} \left( -\frac{\gamma \tau^3}{3} + \tilde{\vartheta}(\tau) \right)^2 + \frac{(a_1 - a_2)}{3a_2} \gamma \tau^3 + \right. \\ \left. + \frac{(a_2 - a_1)}{a_2} \tilde{\vartheta}(\tau) + \frac{2a_1 \tau}{a_2} + \frac{(a_2 - a_1)}{6a_2} \cos \zeta_1 \left( -\frac{\gamma \tau^3}{3} + \tilde{\vartheta}(\tau) \right)^3 \right).$$

Будем рассматривать движение в интервале времени

$$0 \leq \tau \leq 1/10 \sqrt{2/\gamma} \quad (3.11)$$

Поскольку  $\zeta \in (0, \tau)$ , то получаем следующую оценку остаточного члена:

$$R_5 < \frac{2(\gamma/2)^{5/2} \tau^5}{5(1-1/10)^5} = \rho \gamma^{5/2} \tau^5, \quad \rho = \frac{10^5}{2^{5/2} \cdot 5 \cdot 9^5} = 0.119749\dots$$

Оценим теперь выражения, содержащие функцию  $\tilde{\vartheta}(\tau)$ :

$$\left( -\frac{\gamma \tau^3}{3} + \tilde{\vartheta}(\tau) \right)^2 \leq \left( \frac{\gamma \tau^3}{3} + \rho \gamma^{5/2} \tau^5 \right)^2 \leq \left( \frac{\gamma \sqrt{\gamma}}{3\sqrt{2}} \tau^3 + \rho \frac{2\gamma^{5/2} \tau^3}{10^2 \gamma} \right)^2 = \\ = \left( \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{\rho}{50} \right)^2 \gamma^3 \tau^6 \leq k_1 \gamma^2 \tau^4, \quad k_1 = \frac{1}{50} \left( \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{\rho}{50} \right)^2 = 0.0011338\dots$$

Здесь использовано неравенство (3.11) и условие  $\gamma \geq 2$ . Аналогично будем иметь

$$\left| -\frac{\gamma \tau^3}{3} + \tilde{\vartheta}(\tau) \right|^3 \leq \left( \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{\rho}{50} \right)^3 \gamma^{9/2} \tau^9 \leq k_2 \gamma^{5/2} \tau^5 \\ k_2 = \frac{1}{2500} \left( \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{\rho}{50} \right)^3 = 5.399\dots \cdot 10^{-6}$$

В итоге получим неравенство

$$y > -A_1 \tau^2 + A_2 \tau^4 - A_3 \tau^6 \\ A_1 = \frac{a_1^2 u_0^2}{2a_2 p}, \quad A_2 = \frac{a_1(a_2 - a_1) u_0^2 \gamma}{24a_2 p} \\ A_3 = \frac{a_1(a_2 - a_1) u_0^2 \rho \gamma^{5/2}}{12a_2 p} + \frac{a_1(a_1 + a_2) u_0^2 k_1 \gamma^2}{24a_2 p} + \frac{a_1(a_1 + a_2) u_0^2 k_2 \gamma^{5/2}}{72a_2 p}$$

Ясно, что все  $A_i > 0$ .

Выпишем теперь условия того, что координата  $y$  принимает положительные значения на интервале времени (3.11). Для этого достаточно, чтобы биквадратное уравнение  $-A_1 + A_2\tau^2 - A_3\tau^4 = 0$  имело различные вещественные корни и при этом один из корней лежал строго внутри интервала (3.11). Итак, достаточные условия "выныривания" принимают окончательный вид

$$A_2^2 > 4A_1A_3, \quad A_2 - \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3} < \frac{1}{5}A_3\sqrt{2/\gamma} \quad (3.12)$$

Множество параметров, удовлетворяющих (3.12), не пусто. Действительно, зафиксируем все физические параметры системы "тело – жидкость", кроме  $a_2$ , и устремим затем  $a_2$  к бесконечности. Тогда  $A_1 \rightarrow 0$ , а  $\gamma$ ,  $A_2$  и  $A_3$  будут стремиться к положительным постоянным. Следовательно, при достаточно больших отношениях  $a_2/a_1$  оба неравенства (3.12) будут, очевидно, выполнены.

Таким образом, эффект "выныривания" действительно проявляется для некоторого подмножества параметров (положительной меры) системы тело–жидкость. Условие  $a_2/a_1 \gg 1$  соответствует тому, что твердое тело сильно сплющено в направлении оси  $O\eta$ . Следует иметь в виду, что достаточные условия выныривания (3.12) являются весьма грубыми. Более точные условия получаются после удержания в разложениях Тейлора большего числа членов.

**4. Эффект "выныривания" и вакономная механика.** Рассмотрим известную задачу о скольжении тяжелого конька по наклонной плоскости, подчиненного неинтегрируемой связи: скорость точки контакта ортогональна лезвию конька. Классические неголономные уравнения движения хорошо изучены (см., например, [8, 9]). В частности, для почти всех начальных данных конек не может опуститься ниже некоторой горизонтальной прямой. Например, если в начальный момент лезвие конька горизонтально и он не вращается, то конек, очевидно, будет скользить по горизонтальной прямой с постоянной скоростью.

С другой стороны, движения системы с неинтегрируемой связью можно определить как экстремали соответствующей вариационной задачи Лагранжа (см. [9, 10]). Такая универсальная модель движения названа вакономной механикой [10]. В частности, как показано в [10], для почти всех начальных данных вакономный конек неограниченно соскальзывает вниз по наклонной плоскости. В [11] рассмотрено частное движение вакономного конька, когда в начальный момент его лезвие горизонтально и конек подтолкнули без закручивания вокруг его оси. Показано, что в первые моменты времени конек начнет двигаться вверх. В [11] такое поведение конька признано парадоксальным и на этом основании вакономная модель объявлена нефизической.

Однако, этот "парадокс" допускает прозрачную интерпретацию, если обратиться к задаче о падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости (см. п. 1). Устремим присоединенную массу  $a_2$  к бесконечности, оставляя другие параметры неизменными. Как показано в [9, 10], при  $a_2 \rightarrow \infty$  движения тела в жидкости стремятся к вакономным движениям конька с неинтегрируемой связью  $v = 0$ . При этом формула (2.3) принимает следующий вид:

$$y = -\frac{u_0^2 p}{24b} t^4 + \dots$$

Следовательно, при малых значениях  $t \neq 0$  тело, действительно, будет двигаться вверх. Таким образом, указанное в [11] "парадоксальное" поведение вакономного конька является эффектом выныривания тела в жидкости в предельном случае, когда  $a_2 \rightarrow \infty$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 99-01-01096 и 00-15-96146) и гранта SNF 1492.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полн. собр. соч. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. Т. 1. С. 133–150.
2. *Kirghoff G.* Über die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit // J. Reine und Angewan. Math. 1870. V. 71. S. 237–262.
3. *Козлов В.В.* О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 5. С. 10–17.
4. *Козлов В.В.* Об устойчивости положений равновесия в нестационарном силовом поле // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 12–19.
5. *Deryabin M.V.* On asymptotics of the solution of Chaplygin equation // Регулярная и хаотич. динамика. 1998. Т. 3. № 1. Р. 93–97.
6. *Жуковский Н.Е.* О падении в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси // Полн. собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1937. Т. 5. С. 72–80.
7. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
8. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
9. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. математики. Фундамент. направления. Т. 3. М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.
10. *Козлов В.В.* Динамика систем с неинтегрируемыми связями. I; II // Вестн. МГУ. Сер. 1. 1982. № 3. С. 92–100; 1982. № 4. С. 70–76.
11. *Zampieri G.* Nonholonomic versus vakonomic dynamics // J. Different. Equat. 2000. V. 163. № 2. P. 335–347.

Москва

Поступила в редакцию  
21.09.2000