УДК 531.36

© 2001 г. **В.В. Козлов**

ГИРОСКОПИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС

Рассматривается задача об условиях гироскопической стабилизации неустойчивых равновесий с помощью гироскопических сил с вырожденной матрицей. Важным примером служат системы с нечетным числом степеней свободы. С помощью неавтономного ортогонального преобразования можно вообще избавиться от гироскопических сил. При этом уравнения движения переходят в систему уравнений типа Штурма–Лиувилля с зависящим от времени потенциалом. Указаны условия на кососимметрическую матрицу гироскопических сил, при которых новый потенциал зависит от времени периодически. Эти условия заведомо выполнены для ненулевых матриц гироскопических сил минимального ранга, равного двум. Таким образом, задача о гироскопической стабилизации сводится в ряде случаев к исследованию устойчивости положений равновесия систем с периодическим потенциалом. Применение теории параметрического резонанса позволяет получить новые конструктивные условия устойчивости равновесий механических систем, находящихся под действием дополнительных вырожденных гироскопических сил. Эти условия имеют вид условий экстремума некоторых функций, зависящих лишь от положения системы. Особое внимание уделено условиям устойчивости при больших гироскопических силах. На примерах показано, что найденные условия гироскопической стабилизации являются лишь достаточными. Однако если в положении равновесия потенциальная энергия имеет максимум и матрица гироскопических сил невырождена, то они близки к необходимым условиям устойчивости.

1. Сведение к неавтономному случаю. Как известно [1], малые колебания динамической системы вблизи положения равновесия удовлетворяют линейному уравнению

$$\ddot{x}+\Gamma\dot{x}+Px=0,\quad x\in\mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

где Γ – кососимметрическая $(n\times n)$-матрица, а матрица P симметрична. Слагаемое $-\Gamma\dot{x}$ имеет смысл гироскопической силы, действующей на систему.

Точка $x=0$ – положение равновесия. Обзор результатов по проблеме устойчивости равновесия содержится в [2]. Обычно рассматривается случай, когда потенциальная энергия $V=(Px,x)/2$ имеет максимум.

Оказывается, можно вообще избавиться от гироскопических сил, если сделать замену переменных

$$x=A(t)z,\quad A=\exp(-\Gamma t/2) \tag{1.2}$$

В новых координатах z уравнение (1.1) принимает вид

$$\ddot{z}+Q(t)z=0,\quad Q=A^{-1}(P-\Gamma^2/4)A \tag{1.3}$$

Однако после такой замены функция Лагранжа

$$L=(\dot{z},\dot{z})/2-(Qz,z)/2 \tag{1.4}$$

уже явно зависит от времени. Отметим, что после обратной замены (1.2) лагранжиан

(1.4) переходит в функцию

$$L = (\dot{x}, \dot{x})/2 + (\dot{x}, \Gamma x)/2 - (Px, x)/2$$

Уравнения Лагранжа с таким лагранжианом, очевидно, совпадают с (1.1).

Так как матрица Γ кососимметрическая, то матрицы A и A^{-1} ортогональные. Следовательно, задачи об устойчивости тривиальных решений уравнений (1.1) и (1.3) эквивалентны.

На первый взгляд кажется, что сведение к неавтономной системе только усложняет исследование устойчивости. Однако приведенные ниже примеры показывают, что это не так.

1°. Предположим, что матрицы Γ и P коммутируют: $\Gamma P = P\Gamma$. Тогда матрица Q не зависит явно от времени и критерий гироскопической стабилизации сводится к следующему: *измененная потенциальная энергия*

$$W(z) = (Pz, z) + (\Gamma z, \Gamma z)/4 \tag{1.5}$$

имеет строгий минимум в точке $z = 0$. Этот результат получен другим способом ранее [3].

2°. Пусть квадратичная форма (1.5) неположительна для всех $z \in \mathbb{R}^n$. Тогда $L \geqslant 0$ и, согласно полученному ранее результату [4], равновесие $z = 0$ системы (1.3) неустойчиво. Следовательно, неустойчиво и равновесие $x = 0$ исходной системы (1.1). Этот результат был получен [5] при более сильном условии: форма (1.5) отрицательно определена.

3°. Предположим, что матрица $Q(t)$ периодична по времени. В этом случае классический результат Томсона о невозможности гироскопической стабилизации равновесия $x = 0$ при нечетной степени неустойчивости выводится из одной формулы Хилла, связывающей мультипликаторы нулевого периодического решения системы (1.3) с его индексом Морса (см. [6, 7]). В связи с этим замечанием было бы полезно распространить формулу Хилла на более общий случай, когда элементы матрицы Q зависят от времени условно-периодически.

2. Структура гироскопических сил для систем с периодическим потенциалом. Положим

$$\Gamma = \gamma S^T I_k S \tag{2.1}$$

$$I_k = \mathrm{diag}(J, \ldots, J, 0), \quad J = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathrm{rank}\, I_k = 2k$$

γ – вещественное число, S – ортогональная $(n \times n)$-матрица. Можно считать, что $\gamma > 0$: случай $\gamma < 0$ сводится к этому после замены $t \to -t$.

Так как

$$(S^T I S)^T = -(S^T I S)$$

то матрица (2.1), действительно, кососимметрическая. Обсудим ее свойства.

1°. Матрица $\exp(\pm\, \Gamma t/2)$ – $(4\pi/\gamma)$-периодическая по t.

Действительно, эта матрица удовлетворяет уравнению

$$\dot{A} = \pm \Gamma A/2, \quad A(0) = E.$$

Положим $A = [u_1, \ldots, u_n]$, где $u_s \in \mathbb{R}^n$ – решения линейной системы

$$\dot{u} = \pm \Gamma u/2$$

Следовательно,

$$\dot{u} = \pm \gamma S^T I S u/2$$

Полагаем $v = Su$ и используем условие ортогональности $S^T = S^{-1}$:

$$\dot{v} = \pm\gamma I_k v / 2$$

Если $v = (v_1, ..., v_n)^T$, то

$$\dot{v}_1 = \pm\gamma v_2 / 2, \quad \dot{v}_2 = \mp\gamma v_1 / 2, ..., \dot{v}_{2k-1} = \pm\gamma v_{2k} / 2$$

$$\dot{v}_{2k} = \mp\gamma v_{2k-1} / 2, \quad \dot{v}_{2k+1} = ... = \dot{v}_n = 0$$

Решения этой системы периодичны по t с периодом $4\pi/\gamma$.

2°. Если Γ имеет вид (2.1), то матрица $Q(t)$ из (1.3) $(2\pi/\gamma)$-периодична по t.

Здесь используется $(4\pi/\gamma)$-периодичность ортогональных матриц $A(t)$ и $A^{-1}(t)$, а также тот факт, что функции $\sin^2$, $\sin\cos$, $\cos^2$ имеют период π.

3°. Для всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$(\Gamma x, \Gamma x) - \gamma^2(x, x) \leqslant 0 \tag{2.2}$$

Действительно,

$$(S^T ISx, S^T ISx) - (Sx, Sx) = (Iz, Iz) - (z, z) = -z_{2k+1}^2 - ... - z_n^2 \leqslant 0$$

Пример. Покажем, что при $n = 3$ любая кососимметрическая матрица Γ имеет вид (2.1), причем $k = 1$, если $\Gamma \neq 0$.

Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.3}$$

и $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 1$. Пусть в (2.1) $\gamma = 1$ и

$$S = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{Vmatrix}$$

Тогда $\omega = b \times a$, где ω, a и b – векторы трехмерного евклидова пространства с компонентами ω_i, a_i и b_i соответственно.

Ввиду ортогональности матрицы S

$$|a| = |b| = 1 \quad \text{и} \quad (a, b) = 0 \tag{2.4}$$

Ясно, что для любого единичного вектора ω всегда найдутся два вектора a и b, удовлетворяющие условиям (2.4), такие, что $\omega = b \times a$.

Этот пример можно обобщить. Покажем, что если $\operatorname{rank}\Gamma = 2$, то матрица Γ допускает представление (2.1).

Вектор ω называется вихревым, если $\Gamma\omega = 0$. Все вихревые векторы образуют линейное пространство W размерности $n - 2$. Пусть векторы $u = (u_1, ..., u_n)^T, ..., v = (v_1, ... v_n)^T$ составляют ортонормированный базис в W. Дополним его векторами $a = (a_1, ..., a_n)^T$ и $b = (b_1, ..., b_n)^T$ до ортонормированного базиса в $\mathbb{R}^n$. Матрица

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & u_1 & \dots & v_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & b_n & u_n & \dots & v_n \end{Vmatrix}$$

очевидно, ортогональная. Обозначим ее S^{-1}. Произведение ΓS^{-1} имеет вид

$$\begin{Vmatrix} * & * & 0 \end{Vmatrix}$$

где звездочками обозначены два ненулевых столбца. Тот же вид имеет кососимметрическая матрица $S(\Gamma S^{-1})$. Следовательно, $S\Gamma S^T = \gamma I_2$, откуда вытекает равенство (2.1).

Покажем теперь, что задача о гироскопической стабилизации неустойчивого равновесия тесно связана с явлением параметрического резонанса. С этой целью рассмотрим случай, когда $\det\Gamma \neq 0$ (следовательно, n – четно), а элементы матрицы P малы. Последнее эквивалентно предположению, что потенциальная энергия принимает умеренные значения, а норма матрицы гироскопических сил $\|\Gamma\|$ велика. Учитывая формулу (2.1) и свойство 2°, уравнение (1.3) можно привести к виду

$$\ddot{y} + \left(\frac{\gamma^2}{4}E + R(\gamma t)\right)y = 0, \quad y \in \mathbb{R}^n \tag{2.5}$$

где $y = Sz$, а $R(\omega)$ – 2π-периодическая симметрическая $(n \times n)$-матрица. По предположению норма $\|P\|$ мала; следовательно, норма $\|R\|$ тоже мала.

Уравнение (2.5) описывает колебания механической системы с собственной частотой $\Omega = \gamma/2$ под действием малого периодического возмущения с частотой $\omega = \gamma$. При $\|P\| \to 0$ имеем параметрический резонанс $2\Omega = \omega$. Более того, система оказывается на границе самой опасной зоны параметрического резонанса, когда частота собственных колебаний вдвое меньше частоты возмущающей силы. Таким образом, возможность гироскопической стабилизации равновесия $x = 0$ будет зависеть от того, где окажется система (2.5) при увеличении элементов матрицы P: вне или внутри зоны параметрического резонанса.

3. Условия устойчивости. Основной результат составляет

Теорема. Пусть матрица гироскопических сил имеет вид (2.1). Если $x = 0$ – строгий минимум измененной потенциальной энергии $W(x)$ и строгий максимум разности

$$W(x) - \gamma^2(x, x)/4 \tag{3.1}$$

то $x = 0$ – устойчивое равновесие системы (1.1).

Чтобы лучше понять смысл достаточных условий устойчивости, рассмотрим предельный случай, когда параметр γ принимает большие значения. Введем плоскость

$$\Lambda = \{x\colon \Gamma x = 0\}$$

Пусть M – ортогональное дополнение Λ. Можно показать, что

$$M = \{x : x = \Gamma z, z \in \mathbb{R}^n\}$$

Действительно,

$$(x, \Gamma z) = -(\Gamma x, z) = 0$$

если $x \in \Lambda$. Кроме того,

$$\dim M = \operatorname{rank}\Gamma = 2k, \quad \dim\Lambda = n - \operatorname{rank}\Gamma$$

При больших значениях γ условие минимальности измененной потенциальной энергии в точке $x = 0$ переходит в условие

$$V(x) > 0 \quad \text{при всех} \quad x \in \Lambda \quad \text{и} \quad x \neq 0 \tag{3.2}$$

В силу неравенства (2.2) функция (3.1) имеет максимум для больших значений γ, если

$$V(x) < 0 \quad \text{при всех} \quad x \in M \quad \text{и} \quad x \neq 0 \tag{3.3}$$

Это условие можно представить в следующем эквивалентном виде: квадратичная форма $(P\Gamma z, \Gamma z)$ отрицательно определена на подпространстве M.

Таким образом, согласно теореме, если выполнены условия (3.2) и (3.3), то при больших значениях γ равновесие $x = 0$ устойчиво. Ранее [8] методом функций Ляпунова получены несколько иные достаточные условия устойчивости при больших гироскопических силах.

Отметим, что условия (3.2) и (3.3) являются лишь достаточными условиями устойчивости.

Действительно, пусть $n = 3$, $P = \mathrm{diag}(p_1, p_2, p_3)$, а матрица Г имеет вид (2.3). Как было показано [8], если степень неустойчивости четная, то критерий гироскопической стабилизации равновесия $x = 0$ в случае больших значений γ сводится к неравенству

$$p_1\omega_1^2 + p_2\omega_2^2 + p_3\omega_3^2 > 0$$

Можно показать, что это неравенство эквивалентно условию (3.2).

Стоит еще отметить, что из условий (3.2) и (3.3) вытекает, что степень неустойчивости Пуанкаре для потенциала V четная. Следовательно, необходимое условие гироскопической стабилизации Кельвина заведомо выполнено.

Приведем теперь доказательство теоремы. По условию, все собственные числа симметричной матрицы $P - \Gamma^2/4$ положительны. Обозначим их ω_s^2 ($\omega_s > 0$) и упорядочим в порядке возрастания:

$$0 < \omega_1^2 \leqslant \omega_2^2 \leqslant \ldots \leqslant \omega_n^2 \tag{3.4}$$

Так как матрица $A(t)$ ортогональная, то (согласно (1.3)) неравенства

$$\omega_1^2(x,x) \leqslant (Q(t)x,x) \leqslant \omega_n^2(x,x) \tag{3.5}$$

справедливы для всех значений t.

По свойству 2° (разд. 2) частота периодической матрицы $Q(t)$ равна

$$\omega = 2\pi/T = \gamma$$

Так как квадратичная форма (3.1) отрицательно определена и ω_n^2 – максимальное собственное число матрицы $P - \Gamma^2/4$, то

$$\omega > 2\omega_n \tag{3.6}$$

Остается воспользоваться известным результатом о том, что при выполнении условий (3.5) и (3.6) тривиальное решение $z = 0$ системы (1.3) устойчиво.

Замечание. Достаточность условий (3.5) и (3.6) для устойчивости тривиального решения системы вида (1.3) просто выводится из общих результатов о сильной устойчивости линейных гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами (см. [9], гл. III). В явном виде они указаны, например, в [10].

В качестве примера рассмотрим случай, когда потенциальная энергия имеет в равновесии строгий максимум и матрица гироскопических сил (2.1) невырождена. В частности, n – четно. Ввиду неравенства (2.2) и предположения об отрицательной определенности потенциала V квадратичная форма (3.1) отрицательно определена. Следовательно, в этом случае достаточным условием гироскопической стабилизации является условие положительной определенности измененной потенциальной энергии. Однако оно не является необходимым.

Пример. Пусть $n = 2$, $P = \mathrm{diag}(p_1, p_2)$, а матрица Г всегда имеет вид (2.1):

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{Vmatrix}$$

Здесь ортогональную матрицу S можно считать единичной. В наиболее интересном случае потенциальная энергия имеет максимум: числа p_1 и p_2 отрицательные. Как известно (см., например, [1]), условие устойчивости сводится к неравенству

$$\gamma > \sqrt{|p_1|} + \sqrt{|p_2|} \tag{3.7}$$

С другой стороны, условие положительной определенности матрицы $P - \Gamma^2/4$ эквивалентно неравенству

$$\gamma > 2\sqrt{|p_1|}, \quad p = \min(p_1, p_2) \tag{3.8}$$

Оно, очевидно, сильнее условия (3.7) и совпадает с ним только при $p_1 = p_2$.

4. Некоторые обобщения. Было замечено [10], что условия (3.5), (3.6) устойчивости нулевого решения системы (1.3) можно несколько ослабить: неравенство слева в (3.5) можно заменить на условие положительной определенности усредненной матрицы

$$\langle Q\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T Q(t)dt, \quad T = \frac{2\pi}{\gamma} \tag{4.1}$$

Таким образом, в теореме разд. 3 условие положительной определенности квадратичной формы W можно заменить на более слабое условие положительности симметричной матрицы $\langle Q\rangle$.

Пример. Рассмотрим снова случай $n = 2$ в предположениях и обозначениях разд. 3. Можно показать, что

$$\langle Q\rangle = \frac{p_1 + p_2}{2}E$$

где E – единичная (2×2)-матрица.

Таким образом, получаем достаточное условие гироскопической стабилизации

$$\gamma > \sqrt{2\,|\,p_1 + p_2\,|} \tag{4.2}$$

При $p_1 \neq p_2$ имеют место неравенства

$$2\sqrt{|\,p\,|} > \sqrt{2\,|\,p_1 + p_2\,|} > \sqrt{|\,p_1\,|} + \sqrt{|\,p_2\,|}$$

Следовательно, условие (4.2) точнее условия (3.2), но оно также не является необходимым для стабилизации равновесия.

Теорема разд. 3 допускает следующее уточнение. Пусть ω_1 и ω_n – соответственно минимальное и максимальное собственные числа положительно определенной матрицы (3.4). Неравенства (3.5) позволяют воспользоваться известными условиями устойчивости при параметрическом возбуждении [9, 10]: если частота периодического возбуждения $\omega = \gamma$ не принадлежит ни одному из интервалов

$$2[\omega_1, \omega_n]/m, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{4.3}$$

то тривиальное решение $z = 0$ – устойчиво. Следовательно, это условие достаточно для устойчивости точки покоя $x = 0$ исходной системы. В частности, если выполнено условие (3.6), то частота γ заведомо не лежит в объединении интервалов (4.3).

Ввиду расходимости гармонического ряда интервалы (4.3) обязательно перекрываются. Однако мера их объединения стремится к нулю, когда $\omega_n - \omega_1 \to 0$.

5. Условия гироскопической стабилизации, основанные на оценках собственных значений. Для исследования устойчивости тривиального решения уравнения (1.3) с T-периодической симметрической матрицей $Q(t)$ можно воспользоваться критериями М.Г. Крейна [11] (см. также [9], гл. III). С точки зрения вида матрицы Q наиболее конструктивным является критерий 4 из [11], который, кстати сказать, неточно сформулирован в [11] и [9]. Вот правильная его формулировка: если наименьшее собственное значение $q(t)$ матрицы $Q(t)$ удовлетворяет условиям

$$q(t) \geqslant a^2 > 0 \tag{5.1}$$

и

$$0 < a < \pi/T \tag{5.2}$$

то линейное уравнение (1.3) сильно устойчиво, коль скоро

$$\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{tr} Q(t)dt < \frac{4}{T^2} + \left(n - \frac{4}{\pi^2}\right)a^2 \tag{5.3}$$

Применим этот критерий для матрицы Q вида (1.3). Ясно, что при всех значениях t спектр матрицы $Q(t)$ совпадает со спектром постоянной матрицы (3.4). Следовательно, условие (5.1) выполнено, если измененная потенциальная энергия $W(x)$ имеет в точке $x = 0$ строгий минимум. В обозначениях разд. 3 $a = \omega_1$.

Покажем, что условие (5.2) заведомо выполнено, если потенциальная энергия $V(x)$ не имеет минимума в точке $x = 0$. Именно этот случай представляет интерес в задаче о гироскопической стабилизации. Действительно, пусть

$$a \geqslant \pi/T = \gamma/2$$

Тогда, согласно условию (5.1), имеет место неравенство

$$4(Px, x) + (\Gamma x, \Gamma x) \geqslant \gamma^2(x, x)$$

Следовательно (при учете (2.2)), $V(x) \geqslant 0$. Получили противоречие.

Поскольку

$$\mathrm{tr}Q(t) = \mathrm{tr}(P - \Gamma^2/4) = \mathrm{const}$$

то неравенство (5.3) дает следующее достаточное условие гироскопической стабилизации:

$$\mathrm{tr}\,P + \frac{k\gamma^2}{2} < \frac{\gamma^2}{\pi^2} + \left(n - \frac{4}{\pi^2}\right)\omega_1^2 \tag{5.4}$$

Здесь $k = (\mathrm{rank}\Gamma)/2$. К сожалению, условие (5.4) дает небольшую зону устойчивости. Например, оно заведомо нарушается при больших значениях параметра γ, характеризующего интенсивность гироскопических сил.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01096) и программы "Ведущие научные школы" (00-15-96146).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
2. *Булатович Р.М.* Об устойчивости линейных потенциальных гироскопических систем в случаях, когда потенциальная энергия имеет максимум // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 385–389.
3. *Huseyn K., Hagedorn P., Tescher W.* On the stability of linear conservative gyroscopic systems // ZAMP. 1983. V. 34. № 6. P. 807–815.
4. *Болотин С.В., Козлов В.В.* Об асимптотических решениях уравнений динамики // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1983. № 6. С. 98–103.
5. *Пожарицкий Г.К.* О неустановившемся движении консервативных голономных систем // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 429–433.
6. *Hill G.W.* On the part of the motion of the lunar perigel with is a function of the mean motion of the Sun and Moon // Acta Math. 1886. V. VIII. № 1. P. 1–36.
7. *Болотин С.В.* Об определителе Хилла периодической траектории // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1988. № 3. С. 30–34.
8. *Козлов В.В.* О стабилизации неустойчивых равновесий зарядов сильными магнитными полями // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 3. С. 390–397.
9. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
10. *Зевин А.А.* Некоторые условия существования и устойчивости периодических колебаний в нелинейных неавтономных гамильтоновых системах // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 637–646.
11. *Крейн М.Г.* О признаках устойчивой ограниченности решений периодических канонических систем // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 6. С. 641–680.

Москва
e-mail:vako@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
19.XII.2000