ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2001, том 381, № 5, с. 596–598

МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

ДИФФУЗИЯ В СИСТЕМАХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ИНВАРИАНТОМ НА ТОРЕ

© 2001 г. Академик **В. В. Козлов**

Поступило 27.08.2001 г.

1. Хорошо известно, что дифференциальные уравнения на двумерном торе с интегральным инвариантом и без положений равновесия приводятся к виду

$$\dot{x}_1 = \frac{\omega_1}{f}, \quad \dot{x}_2 = \frac{\omega_2}{f}, \tag{1}$$

где $\omega_1, \omega_2 = \mathrm{const}$ $(\omega_1^2 + \omega_2^2 \neq 0)$, а f – гладкая положительная функция на $\mathbb{T}^2 = \{x_1, x_2 \bmod 2\pi\}$ – плотность интегрального инварианта [1]. Уравнения (1) на $\mathbb{T}^2$ рассматривал еще А. Пуанкаре [2].

Как доказал А.Н. Колмогоров [1], для почти всех чисел вращения $\gamma = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ ("плохо" приближающихся рациональными числами) с помощью обратимой замены переменных уравнения (1) приводятся к условно-периодическому виду

$$\dot{x}_1 = \frac{\omega_1}{\Lambda}, \quad \dot{x}_2 = \frac{\omega_2}{\Lambda}, \tag{2}$$

где

$$\Lambda = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2)dx_1\,dx_2.$$

В таком виде этот результат сформулирован в [3].

Наоборот, если иррациональное γ аномально быстро приближается рациональными числами, то такое приведение невозможно [1] (см. также [4, 5]). Достаточное условие неприводимости состоит в том, что интеграл от условно-периодической функции

$$\int_0^t [f(\gamma s, s) - \Lambda]ds \tag{3}$$

неограничен.

Пусть γ рационально. Тогда тор $\mathbb{T}^2$ расслоен на семейство замкнутых траекторий Γ. Если они имеют разные периоды, то приведение уравнений (1) к (2) также невозможно. Это эквивалентно условию, что среднее значение плотности f по траекториям Γ непостоянно.

2. Пусть g^t – фазовый поток системы (1) и F, G – две суммируемые с квадратом функции на $\mathbb{T}^2$. Введем функцию времени

$$K(t) = \int_{\mathbb{T}^2} F(g^{-t}(x))G(x)f(x)dx_1\,dx_2. \tag{4}$$

Положим для краткости

$$\langle H\rangle = \int_{\mathbb{T}^2} H(x)f(x)dx_1\,dx_2.$$

Если при $t \to \infty$ функция $K(t)$ стремится к

$$\frac{\langle F\rangle\langle G\rangle}{\Lambda}, \tag{5}$$

то (1) есть система с перемешиванием. В работе [1] был поставлен вопрос о возможности перемешивания в том случае, когда (1) не приводится к (2). На самом деле этот вопрос рассматривал еще Пуанкаре [2]. Он высказал предположение о перемешивании, если интеграл (3) неограничен.

Отрицательный ответ в задаче о перемешивании получен в работах [6, 7]. Более сильное утверждение о равномерной возвращаемости получено в [3]: существует неограниченная последовательность моментов времени t_n, что

$$\|g^{t_n}(x) - x\| \to 0$$

при $n \to \infty$ равномерно по x. Отсюда, конечно, сразу же вытекает отсутствие не только перемешивания, но и диффузии.

Определение. Система (1) называется *системой с диффузией*, если функция (4) имеет предел при $t \to \pm\infty$.

Чтобы лучше понять смысл этого определения, рассмотрим случай, когда F – плотность вероятностной меры на $\mathbb{T}^2$ (по Гиббсу), в частности $\langle F\rangle = 1$. Пусть G – характеристическая функция

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

измеримой области D. Тогда $K(t)$ имеет смысл вероятности нахождения системы в области D в момент времени t. Для систем с перемешиванием при $t \to \infty$ эта вероятность стремится к доле области D: $\frac{\operatorname{mes} D}{\operatorname{mes} \mathbb{T}^2}$. Для систем с диффузией вероятность стремится к определенному пределу. Для некоторых областей этот предел может оказаться равным нулю. Однако если $D = \mathbb{T}^2$, то $K(t) \equiv 1$. Наличие диффузии говорит о свойстве необратимости в поведении динамической системы.

Если γ рационально, то система (1) неэргодическая, поэтому о перемешивании не может быть речи. Однако поскольку в общем случае периоды обращения по разным траекториям не совпадают, то равномерной возвращаемости здесь нет и поэтому не исключена возможность появления диффузии.

3. Итак, пусть $\gamma = \frac{p}{q}$, где целые p, q взаимно просты. Найдутся целые r, s такие, что $ps - qr = 1$. Рассмотрим линейный автоморфизм тора

$$z_1 = sx_1 + rx_2, \quad z_2 = -qx_1 + px_2.$$

В новых угловых переменных $z_1, z_2 \bmod 2\pi$ дифференциальные уравнения (1) принимают вид

$$\dot{z}_1 = \frac{\Omega}{f}, \quad \dot{z}_2 = 0. \tag{6}$$

Здесь $\Omega = s\omega_1 - r\omega_2$, а f – плотность инвариантной меры, представленная в переменных z_1, z_2.

Уравнения (6) можно еще упростить. Для этого перейдем к новым угловым координатам v_1, v_2 по формулам

$$v_1 = \frac{1}{\lambda}\int_0^{z_1} f(s, z_2)ds, \quad v_2 = z_2, \tag{7}$$

где

$$\lambda(v_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s, v_2)ds.$$

Якобиан этой замены переменных равен

$$\frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(z_1, z_2)} = \frac{f}{\lambda}. \tag{8}$$

В переменных v_1, v_2 уравнения (6) принимают вид

$$\dot{v}_1 = \frac{\Omega}{\lambda(v_2)}, \quad \dot{v}_2 = 0. \tag{9}$$

4. Исследуем эти уравнения более подробно, переписав их в более общей форме:

$$\dot{x}_1 = \omega(y), \quad \dot{y} = 0; \tag{10}$$

x, y – угловые координаты на торе, ω – гладкая 2π-периодическая функция, нигде не обращающаяся в нуль. Общее решение (10) имеет вид

$$x = \omega(y)t + x_0, \quad y = y_0; \quad x_0, y_0 = \text{const}.$$

Пусть A и B – суммируемые с квадратом функции на $\mathbb{T}^2 = \{x, y \bmod 2\pi\}$. Положим

$$a(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A(x, y)dx, \quad b(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} B(x, y)dx.$$

Теорема 1 (о диффузии). *Если все критические точки функции $y \mapsto \omega(y)$ невырождены, то*

$$\lim_{t \to \infty}\int_{\mathbb{T}^2} A(x - \omega(y)t, y)B(x, y)dx\,dy = 2\pi\int_0^{2\pi} ab\,dy. \tag{11}$$

Замечание. Если функция $\omega(\cdot)$ из класса C^∞, то достаточно потребовать, чтобы ее критические точки были конечнократными. Это условие заведомо выполнено, если $\omega(\cdot)$ – непостоянная аналитическая функция.

5. Применим теорему 1 к уравнениям (9). В этом случае $\omega = \frac{\Omega}{\lambda(y)}$. Поэтому критические точки (и свойства их невырожденности) функций ω и λ совпадают.

Покажем, что усреднение по координате v_1 эквивалентно усреднению в исходной системе (1) по времени вдоль периодических траекторий. Пусть $H(v_1, v_2)$ – функция на торе, $H'(z_1, z_2)$ – та же функция, но представленная в других переменных. Используя формулы перехода (7), среднее

$$h(v_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(v_1, v_2)dv_1$$

можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H'(z_1, z_2)\frac{f(z_1, z_2)}{\lambda(z_2)}dz_1.$$

С учетом (6) это равно

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mu\, dt.$$

Здесь μ – это функция H, в которой переменные z заменены решениями (6), T – период замкнутой траектории (зависящей от z_2).

Теорема 2 (о полной диффузии). *Пусть γ рационально и все критические точки периодической функции $\lambda(\cdot)$ невырождены. Пусть F и G – характеристические функции измеримых облас-*

тей X и Y положительной меры на торе $\mathbb{T}^2 = \{x_1, x_2 \bmod 2\pi\}$ *и почти все траектории системы* (1) *пересекаются с X. Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} K(t) > 0.$$

6. Зафиксируем функции F и G из L_2 и рассмотрим последовательность рациональных чисел вращения $\{\gamma_n\}_1^\infty$, стремящуюся к иррациональному пределу γ. Тогда функция $K(t)$, определяемая (4), будет зависеть от n; обозначим ее $K_n(t)$. Каждому γ_n будет отвечать своя периодическая функция $\lambda_n(\cdot)$, которая получается усреднением плотности инвариантной меры по замкнутым траекториям n-й динамической системы. Если λ_n – функция Морса, то (по теореме 1) $K_n(t) \to \kappa_n$ при $t \to \infty$.

Теорема 3 (о предельном перемешивании). *Если* λ_n *– функция Морса при всех n, то*

$$\lim_{t\to\infty} \kappa_n = \frac{\langle F\rangle\langle G\rangle}{\Lambda}.$$

Эту формулу следует сравнить с (5). При компьютерном моделировании (когда иррациональное γ заменяется несократимой дробью $\frac{p}{q}$ с большими p и q) система (1) практически неотличима от системы с перемешиванием.

Отметим, что для типичной плотности f средние $\lambda(\cdot)$, подсчитанные для всех рациональных γ, будут функциями Морса.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99–01–01096) и гранта “Ведущие научные школы” (00–15–96146).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмогоров А.Н.* // ДАН. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
2. *Пуанкаре А.* Теория вероятностей. Ижевск, 1999. 277 с.
3. *Козлов В.В.* // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1978. № 1. С. 106–115.
4. *Шкловер М.Д.* // Изв. вузов. Математика. 1967. № 10. С. 113–124.
5. *Аносов Д.В.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. Т. 37. № 6. С. 1259–1274.
6. *Каток А.Б.* // Функцион. анализ и его прил. 1967. Т. 1. № 4. С. 75–85.
7. *Кочергин А.В.* // ДАН. 1972. Т. 205. № 3. С. 515–518.