ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2001, том 380, № 3, с. 346–348

МЕХАНИКА

УДК 531.01+531.19

НЕЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ АТМОСФЕРА И НЕКАНОНИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

© 2001 г. Академик В. В. Козлов

Поступило 06.04.2001 г.

1. АТМОСФЕРА В ТЕПЛОВОМ РАВНОВЕСИИ

Хорошо известно, что плотность столба идеального газа в поле силы тяжести, находящегося в тепловом равновесии, убывает с высотой по экспоненциальному закону:

$$\rho(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{mgz}{k\tau}\right). \tag{1}$$

Здесь m – масса частиц газа, g – ускорение силы тяжести, k – постоянная Больцмана, τ – абсолютная температура. Предполагается, что при тепловом равновесии температура не зависит от высоты атмосферы. Как замечает по этому поводу Зоммерфельд [1], "метеорологи раньше иногда протестовали против этого утверждения".

Формула (1) сразу выводится из условия равновесия идеальной жидкости

$$\operatorname{grad} p = \rho F \tag{2}$$

(p – давление, F – плотность внешних сил) с учетом уравнения состояния идеального газа

$$p = \frac{k}{m}\rho\tau. \tag{3}$$

С другой стороны, соотношение (1) можно получить из формулы Максвелла–Больцмана–Гиббса для плотности канонического распределения вероятностей $c\exp\left(-\frac{H}{k\tau}\right)$ (c – нормировочный множитель, H – гамильтониан частицы в поле силы тяжести), усредняя ее по импульсам. После усреднения получается плотность распределения частиц газа по высоте, которая оказывается пропорциональной экспоненте из (1). Этот вывод формулы (1), полученный впервые Максвеллом, считается одним из первых достижений равновесной статистической механики.

Впрочем, еще Лошмидт (см. в книге [2]) высказывал критические замечания в связи с рассуждениями Максвелла (в том числе и с точки зрения кинетической теории). Кроме того, в известных стационарных моделях атмосфера Земли (например, международная стандартная модель) плотность убывает с высотой отнюдь не экспоненциально и температура существенно зависит от высоты места.

Однако еще более существенные проблемы возникают при естественном предположении, что Земля имеет форму шара со сферически-симметричным распределением масс. Оказывается, Земля вообще не может иметь атмосферы конечной массы с постоянной температурой. Пусть M – масса Земли, R – ее радиус, γ – гравитационная постоянная, r – расстояния частиц газа до центра Земли. Решая систему уравнений (2), (3) в случае гравитационного притяжения, приходим к формуле

$$\rho(r) = c\exp\frac{mG}{k\tau r}, \quad c = \mathrm{const} > 0, \quad G = \gamma M. \tag{4}$$

Так как $\rho(r) \to c > 0$ при $r \to \infty$, то масса атмосферы

$$4\pi\int_R^\infty r^2\rho(r)dr \tag{5}$$

бесконечна. Можно усложнить задачу, учитывая взаимное притяжение частиц атмосферы. В этом случае плотность при постоянной температуре находится как решение интегродифференциального уравнения

$$\frac{k\tau}{m}\rho' r^2 = -\gamma\left(M + 4\pi\int_R^\infty x^2\rho(x)dx\right)\rho.$$

Оно легко сводится к неавтономному дифференциальному уравнению второго порядка. Интересующее нас решение имеет следующую асимптотику:

$$\rho(r) = \frac{\alpha}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \alpha = \frac{k\tau}{2\pi m\gamma}.$$

Однако и в этом случае интеграл (5) расходится.

Отметим, что соотношение (4) формально получается из канонического распределения для

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

ньютоновского притяжения усреднением по импульсам. Однако ввиду расходимости с этой плотностью в фазовом пространстве нельзя связать никакой вероятностной меры.

Если считать τ известной функцией z, то согласно уравнениям (2), (3) формулу (1) надо заменить формулой

$$\rho(z) = \frac{c}{\tau(z)}\exp\left[-\frac{mg}{k}\int_0^z \frac{dx}{\tau(x)}\right], \quad c = \rho(0)\tau(0). \tag{6}$$

В частности, если температура линейно убывает с ростом z, то атмосфера находится в стационарном состоянии (если, конечно, считать температуру поверхности Земли постоянной). Действительно, функция $\tau(z)$ гармоническая и поэтому (согласно закону Фурье) поле температур не меняется со временем.

Если $\tau = \tau_0(1 - \varepsilon z)$, $0 \le z \le \frac{1}{\varepsilon}$, $\tau_0 = \tau(0)$, то формула (6) принимает вид

$$\rho(z) = \rho_0(1 - \varepsilon z)^{\frac{mg}{k\tau_0\varepsilon} - 1}. \tag{7}$$

В задаче о равновесии атмосферы в ньютоновском гравитационном поле гармонические функции имеют вид $\frac{a}{r} + b$. Если положить, например, $\tau = \frac{a}{r}$ $(a = k\tau(R))$, то

$$\rho(r) = cr\left(\frac{r}{R}\right)^{-\frac{mG}{ka}}, \quad c = \mathrm{const} > 0. \tag{8}$$

Интеграл (5) будет сходиться при выполнении условия $\frac{mG}{ka} > 4$. Это заведомо так, если температура поверхности Земли принимает небольшие значения.

Цель настоящей работы – применить методы статистической механики для вывода формул плотности типа (6)–(8). Только здесь каноническое распределение вероятностей в фазовом пространстве приходится заменить другими распределениями, плотности которых зависят лишь от полной энергии.

2. НЕКАНОНИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $M = \{x\}$ – конфигурационное пространство механической системы с n степенями свободы, $P = T^*M$ – ее фазовое пространство,

$$H = \frac{1}{2}\sum a_{ij}p_ip_j + V(x)$$

есть функция Гамильтона. Здесь $p_1, \ldots, p_n$ – канонические импульсы, сопряженные координатам $x_1, \ldots, x_n$, V – потенциал силового поля.

Пусть g: $M \to \mathbb{R}$ – неотрицательная функция, задающая вероятностную меру на M:

$$\int_M g(x)d^nx = 1.$$

Следуя Гиббсу, зададим плотность распределения вероятностей на P в виде $f(\beta H)$, где $f(\cdot)$ – неотрицательная функция одного переменного, β – параметр, размерность которого обратна размерности энергии.

Усредняя плотность f по импульсам, приходим к интегральному уравнению

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\beta H)d^np = g(x). \tag{9}$$

Функция g считается заданной, а f подлежит определению.

В каждой точке $x \in M$ линейной заменой $p = Cy$ кинетическую энергию можно привести к сумме квадратов:

$$(Ap, p) = (y, y), \quad A = \|a_{ij}\|.$$

Переходя еще к сферическим координатам в $\mathbb{R}^n = \{y\}$, уравнение (9) преобразуем к виду

$$\int_0^\infty r^{n-1}\left[\beta\left(\frac{r^2}{2} + V\right)\right]dr = c\sqrt{|A|}g, \tag{10}$$

где $c = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{(n/2)}}$. Отсюда вытекает, в частности, что $\sqrt{|A|}\,g$ является функцией от потенциала V. Положим для краткости

$$\rho(\beta V) = c\beta\left(\frac{\beta}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sqrt{|A|}g.$$

Тогда из уравнения (10) для функции f получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_\xi^\infty (\zeta - \xi)^{\frac{n-2}{2}} f(\zeta)d\zeta = \rho(\xi). \tag{11}$$

Несущественное отличие от классического случая состоит в том, что интеграл в уравнении (11) несобственный.

Вид решения (11) зависит от четности размерности n. Пусть n четно и равно $2s + 2$ $(s \ge 0)$. Тогда

$$f(\xi) = \frac{(-1)^{s+1}}{(s+1)!}\frac{d^{s+1}}{d\xi^{s+1}}\rho(\xi). \tag{12}$$

При этом, конечно, $(s + 1)$-я производная функции $\rho(\xi)$ должна достаточно быстро убывать при $\xi \to \infty$, чтобы обеспечить сходимость несобственного интеграла в левой части (11).

Для нечетных n после нескольких дифференцирований по ξ уравнение (11) сводится к интегральному уравнению Абеля, и для его решения можно воспользоваться классической формулой Абеля [3]. Например, при $n = 1$

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{d\xi}\int_{\xi}^{\infty}\frac{\rho(u)du}{\sqrt{u-\xi}}.$$

Чтобы эта формула была корректной, надо потребовать сходимость несобственного интеграла и его непрерывную дифференцируемость по параметру ξ.

3. ПРИЛОЖЕНИЕ К КОНЕЧНОЙ АТМОСФЕРЕ

Особенно просто решение уравнения (11) выглядит при $n = 2$: $f = -\rho'$ (формула (12) при $s = 0$). Используя формулу (7) для плотности атмосферного столба, получаем

$$f(\beta H) = c\left(1 - \frac{\varepsilon H}{mg}\right)^{\frac{mg}{k\tau_0\varepsilon} - 2}. \qquad (13)$$

Здесь τ_0 – температура вблизи поверхности Земли, c – нормировочный множитель, $H = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2m} + mgz$ – гамильтониан. Ясно, что $0 \le H \le \frac{mg}{\varepsilon}$. Роль параметра β играет множитель $\frac{\varepsilon}{mg}$.

Так как $\tau = \tau_0(1 - \varepsilon z)$, то при $\varepsilon \to 0$ температура не зависит от высоты и формула (13) переходит в классическое распределение Максвелла–Больцмана–Гиббса:

$$f = c\exp\left(-\frac{H}{k\tau}\right).$$

Таким образом, формула (12) дает пример распределения вероятностей, которое при малых значениях параметра ε мало отличается от канонического распределения. Теория таких распределений для гамильтоновых систем с конечным числом степеней свободы обсуждается в работе [4].

Обсудим теперь вид уравнений состояния и зависимости энергии от термодинамических параметров разреженного газа, подчиненного распределению (13). Для этого рассмотрим небольшой замкнутый плоский сосуд в вертикальной плоскости $\mathbb{R}^2 = \{x, z\}$, размеры которого малы по сравнению с высотой z. Пусть v – его объем (точнее, его площадь). Нормировочный множитель c в формуле (13) находится из равенства

$$\iint f(\beta H)d^2y d\sigma = 1,$$

где $d\sigma$ – элемент площади в вертикальной плоскости. Из этой формулы получаем, что

$$c = \frac{2\pi v m^2 g(1 - \varepsilon z)^{\alpha - 1}}{\varepsilon(\alpha - 1)}, \quad \alpha = \frac{mg}{k\tau_0\varepsilon}. \qquad (14)$$

Далее энергия E газа в сосуде определяется как среднее значение гамильтониана

$$N\iint Hf d^2y d\sigma,$$

где N – число частиц в сосуде.

Из (13) и (14) получаем формулу

$$E = Nk\tau_0(1 - \varepsilon z) + Mgz. \qquad (15)$$

Здесь $M = Nm$ – масса газа в сосуде. Первое слагаемое в (15) имеет вид $Nk\tau$, где τ – температура газа в сосуде. Это – внутренняя энергия идеального газа, обусловленная движением его молекул.

Чтобы получить уравнение состояния, следует воспользоваться известным соотношением

$$\Lambda = -M\iint\frac{\partial H}{\partial\lambda}f d^2y d\sigma.$$

Здесь λ – термодинамический параметр, Λ – отвечающая ему обобщенная сила. В нашем случае λ – это объем v газа, а Λ – давление p. Поскольку зависимость гамильтониана от объема явно не задана, то для вычисления давления надо преобразовать правую часть (16), сведя ее к вычислению производной по v от некоторого кратного интеграла. Используя (14), получаем уравнение состояния

$$pv = Nk\tau_0(1 - \varepsilon z).$$

С учетом принятой зависимости температуры от высоты это уравнение, очевидно, эквивалентно уравнению состояния идеального газа (3).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 99–01–0196), гранта "Ведущие научные школы" (00–15–96146) и INTAS.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зоммерфельд А.* Термодинамика и статистическая физика. М.: ИЛ, 1955.
2. *Больцман Л.* Избранные труды. М.: Наука, 1984.
3. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. М.: ИЛ, 1960.
4. *Kozlov V.V.* // Regular and Chaotic Dynamics. 1999. V. 4. № 2. P. 44–54.