УДК 531.36 : 534.1

© 2000 г. В.В. Козлов

ДВУЗВЕННЫЕ БИЛЛИАРДНЫЕ ТРАЕКТОРИИ: ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА И УСТОЙЧИВОСТЬ

Рассматриваются двузвенные периодические траектории выпуклого плоского биллиарда, когда материальная частица движется по отрезку, ортогональному границе биллиарда в своих концевых точках. Установлено, что если каустика границы лежит внутри биллиарда, то в типичной ситуации имеется четное число двузвенных траекторий, причем половина из них гиперболические (следовательно, неустойчивы), а другая половина имеет эллиптический тип. Приведен пример биллиарда, у которого каустика пересекает границу и все двузвенные траектории гиперболические. Анализ устойчивости основан на анализе экстремума функции длины отрезка выпуклого биллиарда, который ортогонален границе в одном из своих концов.

1. Условия устойчивости. Пусть имеется гладкая регулярная замкнутая кривая Γ – граница плоского биллиарда. Будем предполагать, что во всех точках ее кривизна положительна. Пусть имеется отрезок длины l, который ортогонально пересекает Γ в концевых точках γ_1 и γ_2. Тогда этот отрезок – двузвенная периодическая траектория выпуклого биллиарда. Напомним, что согласно Биркгофу [1], биллиардом называется динамическая система внутри Γ с упругими ударами. Пусть R_1, R_2 – радиусы кривизны Γ в точках γ_1, γ_2; будем считать для определенности, что $R_1 \leqslant R_2$.

Как установлено [2], двузвенная периодическая траектория будет эллиптической (ее комплексные мультипликаторы λ_1, λ_2 лежат на единичной окружности), если

$$0 < l < R_1 \quad \text{или} \quad R_2 < l < R_1 + R_2 \tag{1.1}$$

Как правило, эллиптические траектории устойчивы по Ляпунову [3]. Если же

$$R_1 < l < R_2 \quad \text{или} \quad R_1 + R_2 < l \tag{1.2}$$

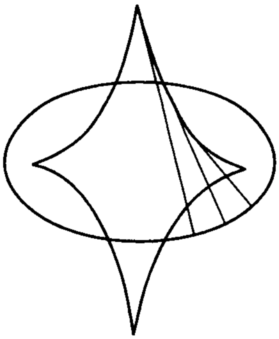
то траектория будет гиперболической (λ_1, λ_2 вещественны, причем $|\lambda_1| > 1$, а $|\lambda_2| < 1$). Гиперболические траектории, разумеется, неустойчивы.

При $l = R_1 + R_2$ имеем вырожденный случай: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Если же $l = R_1$ или $l = R_2$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Другой вывод условий устойчивости (1.1), (1.2) можно найти в [4].

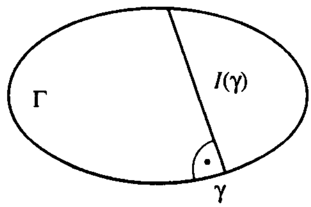
Пример. Пусть граница Γ – эллипс с полуосями $a \geqslant b > 0$. Если $a = b$, то имеем целое семейство вырожденных двузвенных траекторий. Зафиксируем a и будем уменьшать b. Тогда большая ось эллипса станет гиперболической траекторией, а малая ось – эллиптической. Правда, при $a^2 = 2b^2$ свойство эллиптичности потеряется: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. При дальнейшем уменьшении b меньшая ось снова будет эллиптической. Используя картину траекторий эллиптического биллиарда [1], можно показать, что и при $a^2 = 2b^2$ меньшая ось остается устойчивой по Ляпунову.

Среди отрезков с концами на Γ имеется отрезок максимальной длины. Он будет, очевидно, двузвенной периодической траекторией. В окрестности концевых точек граница Γ описывается уравнениями

$$y_1 = a_1 x_1^2 + o(x_1^2), \quad y_2 = l - a_2 x_2^2 + o(x_2^2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Радиусы кривизны равны соответственно $R_1 = 1/(2a_1)$ и $R_2 = 1/(2a_2)$. Значениям $x_1 = x_2 = 0$ отвечает двузвенная траектория. Квадрат расстояния между точками с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) равен

$$d^2 = l^2 + f_2 + \ldots, \quad f_2 = (1 - 2a_1 l)^2 x_1^2 - 2x_1 x_2 + (1 - 2a_2 l)^2 x_2^2$$

Многоточие обозначает члены порядка $\geqslant 3$.

Поскольку двузвенная траектория имеет максимальную длину, то квадратичная форма $(-f_2)$ неотрицательна. В частности,

$$l \geqslant \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} = R_1 + R_2 \tag{1.3}$$

Отсюда вытекает, в частности, что каустика границы Г (кривая центров кривизны) не может целиком лежать вне Г.

Пример. Пусть Г – эллипс с полуосями $a \geqslant b$. Если $a^2 < 2b^2$, то каустика (являющаяся астроидой) лежит внутри эллипса. При $a^2 = 2b^2$ она упирается в концы малой оси, а при $a^2 > 2b^2$ каустика выходит за пределы эллипса (фиг. 1).

Если критическая точка $x_1 = x_2 = 0$ функции d невырождена (форма f_2 невырождена), то неравенство (1.3) становится строгим. Поэтому в типичном случае отрезок максимальной длины – гиперболическая траектория с положительными мультипликаторами. Этот результат отмечен [5] как следствие более общей конструкции.

2. Экстремумы и устойчивость. Пусть γ – точка на границе Г, а $l(\gamma)$ – отрезок с концами на Г, ортогональный Г в точке γ (фиг. 2). Через $L(\gamma)$ обозначим длину отрезка $l(\gamma)$. Ввиду выпуклости кривой Г функция $L\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ – гладкая. Пусть $\gamma' \in \Gamma$ – другой конец отрезка $l(\gamma)$.

Утверждение 1. Пусть γ – стационарная точка функции L и значение $L(\gamma)$ не равно радиусу кривизны кривой Г в точке γ (γ' не принадлежит каустике Г). Тогда отрезок $l(\gamma)$ – двузвенная периодическая траектория.

Доказательство. Уравнения кривой Г в окрестности точек γ и γ' имеют вид

$$y = a_1 x^2 + o(x^2), \quad y = l + \mu x + o(x)$$

В этих обозначениях

$$L^2 = l^2 + 2l\mu(1 - 2a_1 l)x + o(x)$$

По предположению, $x = 0$ – критическая точка функции L. Следовательно, $\mu(1 - l/R_1) = 0$, где R_1 – радиус кривизны кривой Г в точке γ. Поскольку $l = L(\gamma) \neq R_1$, то $\mu = 0$. Значит, отрезок $l(\gamma)$ ортогонален Г в точке γ', что и требовалось доказать.

Пусть $l(\gamma)$ – двузвенная траектория. Тогда функция L принимает стационарные значения в точках γ и γ'. Пусть кривая Γ в окрестности этих точек задается уравнениями

$$y = a_1 x^2 + o(x^2), \quad y = l - a_2 x^2 + o(x^2)$$

соответственно. Разложение функции L^2 в ряд Тейлора в окрестности точки γ имеет вид

$$L^2 = l^2 + (2a_1 l - 1)[2a_1 l - 2a_2 l(2a_1 l - 1)]x^2 + o(x^2) \tag{2.1}$$

Если стационарная точка $x = 0$ невырождена, то $2a_1 l - 1 \neq 0$ и, следовательно, γ' не принадлежит каустике границы Γ (ср. с утверждением 1).

Утверждение 2. Пусть γ и γ' – невырожденные стационарные точки функции L. Тогда

1) если γ и γ' – точки локального минимума L, то траектория $l(\gamma) = l(\gamma')$ эллиптическая;

2) если γ и γ' – точки локального максимума и минимума L, то траектория, $l(\gamma)$ гиперболическая с отрицательными мультипликаторами;

3) если γ и γ' – точки локального максимума L и если каустика границы Γ не пересекается с Γ, то траектория $l(\gamma)$ гиперболическая с положительными мультипликаторами.

Этот результат однозначно связывает экстремальные свойства длины двузвенной траектории с ее устойчивостью.

Доказательство.

1) Пусть γ – точка локального минимума функции L. Тогда, согласно (2.1), имеем неравенство

$$(2a_1 l - 1)[2a_1 l - 2a_2 l(2a_1 l - 1)] > 0 \tag{2.2}$$

С учетом положительности a_1, a_2 получаем

$$l > 1/(2a_1) \text{ и } l < 1/(2a_1) + 1/(2a_2) \tag{2.3}$$

Поскольку в точке γ' функция L также имеет минимум, то аналогично выводятся неравенства

$$l > 1/(2a_2) \text{ и } l < 1/(2a_1) + 1/(2a_2) \tag{2.4}$$

Так как $R_1 = 1/(2a_1)$, $R_2 = 1/(2a_2)$ и $R_1 \leqslant R_2$, то из (2.3) и (2.4) получаем второе неравенство (1.1). Следовательно, траектория l эллиптическая.

2) Пусть γ – точка локального максимума функции L. Тогда имеем неравенство, противоположное (2.2). Решением этого неравенства являются интервалы

$$l < 1/(2a_1) \text{ или } l > 1/(2a_1) + 1/(2a_2) \tag{2.5}$$

С другой стороны, функция L достигает минимума в точке γ'. Следовательно, справедливы неравенства (2.4). Неравенства (2.4) и (2.5) дают первое неравенство (1.2). Поэтому l – гиперболическая траектория с отрицательными мультипликаторами.

3) Если γ и γ' – локальные максимумы функции L, то к неравенствам (2.5) надо добавить неравенства

$$l < 1/(2a_2) \text{ или } l > 1/(2a_1) + 1/(2a_2) \tag{2.6}$$

Отсюда выводится, что либо $0 < l < R_1$, либо $l > R_1 + R_2$. Так как каустика границы Γ лежит внутри Γ, то $l > R_1$, и поэтому остается одно неравенство $l > R_1 + R_2$, которое гарантирует свойство гиперболичности l с положительными мультипликаторами.

В типичной ситуации все критические точки функции $L: \Gamma \to \mathbb{R}$ невырождены. Тогда их общее количество четно и точки максимума и минимума между собой перемежаются.

Пример. Рассмотрим снова эллиптический биллиард с полуосями $a \geqslant b$. Зафиксируем значение a и будем уменьшать b, начиная со значения $b = a$. Пока $a^2 < 2b^2$, функция L будет иметь четыре критические точки в вершинах эллипса (концы его осей), причем концы большей оси – максимумы функции L, а меньшей – минимумы. При $a^2 = 2b^2$ две последние критические точки вырождаются, а при дальнейшем уменьшении b они также переходят в локальные максимумы. Поскольку в случае $a^2 > 2b^2$ каустика пересекает эллипс в четырех точках (фиг. 1), то между вершинами появляются четыре невырожденных локальных минимума функции L. Закон смены типа экстремума остается справедливым, однако этим новым стационарным точкам не отвечают двузвенные периодические траектории (см. утверждение 1). Этот пример показывает также, что в заключении 3 утверждения 2 нельзя опустить условие о том, что каустика границы Г не должна пересекать Г.

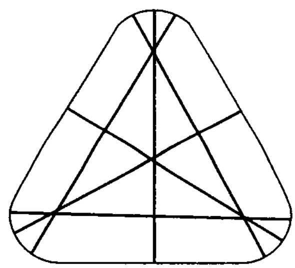
3. Существование устойчивой траектории. Основной результат составляет

Утверждение 3. Предположим, что каустика выпуклого овала Г не пересекает Г и функция $L\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ имеет только невырожденные стационарные точки. Тогда биллиард внутри Г имеет четное число $m \geqslant 2$ двузвенных периодических траекторий, причем половина из них гиперболические, а половина имеет эллиптический тип. Если концы этих траекторий последовательно занумеровать числами 1, 2,..., $2m$, то концы i-й траектории $(1 \leqslant i \leqslant m)$ – это точки с номерами i и $m + i$, причем четным значениям i отвечают гиперболические (эллиптические) траектории, а нечетным i – соответственно эллиптические (гиперболические) траектории.

Доказательство использует утверждение 2 и простые топологические факты. Сначала покажем, что если кривизна $\varkappa$ замкнутого овала Г всюду положительна, то любые два отрезка двузвенных траекторий обязательно пересекаются. Так как $\varkappa > 0$, то (по формулам Френе) при движении точки γ по Г в положительном (отрицательном) направлении касательная к Г в точке γ вращается в том же направлении. Пусть γ и γ' – концы двузвенной траектории l; касательные к Г в этих точках, очевидно, параллельны. Поэтому, если две точки γ_1, $\gamma_1' \in \Gamma$ лежат по одну сторону от l, то касательные в этих точках обязательно пересекаются и, следовательно, они не могут быть концами двузвенной траектории.

Рассмотрим теперь траекторию l_1 максимальной длины. Поскольку каустика Г лежит внутри Г, то в формуле (2.1) $2a_1 l - 1 > 0$. Следовательно, концы l_1 – невырожденные локальные максимумы функции длины L. По предположению, все критические точки функции L невырождены. Значит, обязательно существуют другие критические точки L и, согласно утверждению 1, дополнительные двузвенные траектории $l_2,\ldots,l_m$. Все они пересекают l_1, и поэтому с каждой стороны l_1 на Г имеется $m - 1$ различных критических точек функции L. Ввиду чередования максимумов и минимумов их число должно быть нечетным. Следовательно, m – число различных двузвенных траекторий – четное.

На овале Г в порядке их следования занумеруем концы отрезков $l_1, l_2,\ldots, l_m$ числами $1, 2,\ldots, 2m$. Поскольку эти отрезки попарно пересекаются, то концами этих отрезков оказываются пары точек с номерами i и $m + i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Концы максимального по длине отрезка l_1 – максимумы функции L. Учитывая чередования типа экстремума функции L, получаем, что концы каждого из отрезков l_j являются либо оба максимумами, либо оба минимумами L. Согласно утверждению 2, в первом случае двузвенная траектория гиперболическая, а во втором – эллиптическая, что и требовалось показать.



Фиг. 3

4. Выпуклые биллиарды без устойчивых двузвенных траекторий. Приведем пример выпуклой кривой Г, каустика которой не лежит целиком внутри Г, для которой все двузвенные траектории гиперболические. С этой целью возьмем равносторонний треугольник и рассмотрим три окружности S_1, S_2, S_3 с центрами в вершинах треугольника, радиус которых (для определенности) равен трети длины стороны. Пусть Г – граница выпуклой оболочки, натянутой на множество $S_1 \cup S_2 \cup S_3$ (фиг. 3). Эта кривая состоит из дуг окружностей и отрезков прямых. Биллиард внутри Г имеет ровно шесть двузвенных траекторий: три отрезка максимальной длины и еще три отрезка, на концах которых функция длины L принимает максимальное и минимальное значения. Все эти траектории гиперболические. Правда, у кривой Г кривизна не всюду положительна. Однако сколь угодно малой деформацией эту кривую можно превратить в строго выпуклый овал (даже аналитический), который снова будет иметь ровно шесть гиперболических двузвенных траекторий.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01096) и программы "Университеты России" (5581).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Birkhoff G.D.* Dynamical Systems. N.Y.: Amer. Math. Soc. 1927. = *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
2. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
3. *Маркеев А.П.* О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 37–54.
4. *Козлов В.В.* Конструктивный метод обоснования теории систем с неудерживающими связями // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 883–894.
5. *Трещев Д.В.* К вопросу об устойчивости периодических траекторий бильярда Биркгофа // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1988. № 2. С. 44–50.

Москва

Поступила в редакцию
10.III.2000