УДК 521.14 + 531.01

ТЕОРЕМЫ НЬЮТОНА И АЙВОРИ О ПРИТЯЖЕНИИ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

В. В. Козлов

Посвящается
памяти В. Г. Демина

1. Классические теоремы Ньютона и Айвори. Как установил Ньютон, однородная сфера не притягивает внутренних точек, а внешние точки притягиваются как бы одной материальной точкой, которая помещена в центр сферы и масса которой равна массе сферы. Считается установленным, что Ньютон нашел доказательство этой замечательной теоремы лишь за год до публикации своих Principia. Поучительное обсуждение хода рассуждений самого Ньютона, а также других подходов к доказательству теоремы о притяжении сферы можно найти в [1, 2].

Из теоремы о сфере сразу выводится, что однородный шар притягивает точки внешней области так же, как если бы его масса была сосредоточена в центре, а сила притяжения внутренних точек линейно зависит от расстояния до центра (по закону Гука).

Хорошо известно, что поверхности уровня гравитационного потенциала однородного стержня — конфокальное семейство эллипсоидов вращения, фокусы которых совпадают с концами отрезка (см., например, [3]). Этот результат был обобщен Айвори.

Рассматривается бесконечно тонкий однородный слой, заключенный между двумя подобными концентрическими эллипсоидами. Он называется эллиптическим слоем. Оказывается, гравитационный потенциал внутри эллиптического слоя постоянен (теорема Ньютона, обобщающая теорему о притяжении сфер), а поверхности уровня потенциала во внешней области суть софокусные ему эллипсоиды (теорема Айвори). Доказательство см., например, в [3].

Эллиптический слой проще представить себе как эллипсоид с, вообще говоря, непостоянной гомеоидной плотностью $d\sigma/|\nabla f|$, где $d\sigma$ — элемент площади эллипсоида, ∇f — градиент квадратичной формы f, задающей форму эллипсоида [4]. Гомеоидная плотность сферы и отрезка, очевидно, постоянна.

2. Гравитация в пространствах постоянной кривизны. Заменим евклидово пространство $\mathbb{E}^3$ пространством постоянной кривизны $\mathbb{S}^3$ (трехмерная сфера в $\mathbb{E}^4$) или $\mathbb{L}^3$ (пространство Лобачевского). Это однородные пространства: как и на $\mathbb{E}^3$, на них действуют шестимерные группы изометрий. Свойство однородности позволяет определить аналог ньютоновского потенциала: это решения уравнения Лапласа–Бельтрами на $\mathbb{S}^3$ или $\mathbb{L}^3$ соответственно, зависящие лишь от расстояния между точками.

Первые шаги по развитию теории притяжения в $\mathbb{L}^3$ были сделаны самим Лобачевским (см. [5]). Явная формула для ньютоновского потенциала в $\mathbb{S}^3$ была получена впервые, по-видимому, Шредингером для целей квантовой механики [6]:

$$V = -\gamma \operatorname{ctg} \vartheta, \quad \gamma = \mathrm{const} > 0. \tag{1}$$

Здесь ϑ, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, — угол между радиус-векторами гравитирующих точек на $\mathbb{S}^3$. Отметим, что кроме точки $\vartheta = 0$ потенциал (1) имеет особенность в антиподальной точке $\vartheta = \pi$: если исходная точка притягивает ($\gamma > 0$), то антиподальная отталкивает с той же интенсивностью.

Если надо подчеркнуть, что гравитационное поле создается материальной точкой массы m, то в выражении для потенциала (1) надо добавить множитель m; при этом γ следует интерпретировать как гравитационную постоянную. Ниже (для удобства записи) постоянный множитель $-\gamma$ опущен.

В работах [7–9] с разной общностью была решена задача Бертрана для пространств постоянной кривизны — найти потенциалы, порождающие центральные силовые поля, в которых все ограниченные орбиты замкнуты. Кроме ньютоновского гармонического потенциала надо добавить еще потенциал упругого взаимодействия. Для $\mathbb{S}^3$ потенциал Гука имеет вид

$$V = \kappa \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2}, \quad \kappa = \mathrm{const}. \tag{2}$$

В работах [5, 7–10] содержатся начала небесной механики в пространствах постоянной кривизны. Дальнейшие результаты в этом направлении можно найти в [11].

В настоящей работе основные теоремы теории ньютоновского потенциала в $\mathbb{E}^3$ переносятся (с некоторыми оговорками) на пространства постоянной кривизны. Для определенности рассматривается случай сферы — пространства с нетривиальной топологией. Для пространства Лобачевского тригонометрические функции заменяются гиперболическими.

3. Притяжение сфер. Рассмотрим трехмерную сферу единичного радиуса в четырехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{S}^3 = \left\{\sum_1^4 x_i^2 = 1\right\}$. Введем сферические координаты $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $\psi \bmod 2\pi$ по формулам

$$x_1 = \sin\vartheta \sin\varphi \sin\psi, \quad x_2 = \sin\vartheta \sin\varphi \cos\psi,$$
$$x_3 = \sin\vartheta \cos\varphi, \qquad x_4 = \cos\vartheta.$$

Метрика на $\mathbb{S}^3$ имеет вид $ds^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\psi^2)$, а определитель матрицы коэффициентов этой квадратичной формы равен $g = \sin^4\vartheta \sin^2\varphi$.

Рассмотрим на $\mathbb{S}^3$ двумерную сферу

$$\mathbb{S}^2 = \{\vartheta = \vartheta_0,\ 0 < \vartheta_0 \leqslant \pi/2\}$$

и изучим ее притяжение в предположении однородности распределения массы. Следует иметь в виду, что на $\mathbb{S}^3$ имеется еще одна сфера $\mathbb{S}^2_- = \{\vartheta = \pi - \vartheta_0\}$, конгруэнтная $\mathbb{S}^2$, точки которой производят отталкивающее действие. Трехмерная сфера $\mathbb{S}^3$ делится двумерными сферами $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{S}^2_-$ на три связные области.

Элемент площади $\mathbb{S}^2$ равен

$$d\sigma = \sqrt{g}\, d\varphi\, d\psi = \sin^2\vartheta_0 \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi,$$

а ее полная площадь равна

$$\sum = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\sigma = 4\pi \sin^2\vartheta_0.$$

Введем плотность распределения массы $\rho = M/\sum$, где M — масса $\mathbb{S}^2$.

Теорема 1. *Потенциал притяжения сферы* $\mathbb{S}^2$ *равен* $M \operatorname{ctg}\vartheta$, *если* $\vartheta_0 < \vartheta < \pi - \vartheta_0$, *и* $M\operatorname{ctg}\vartheta_0$, *если* $0 \leqslant \vartheta < \vartheta_0$ *и* $\pi - \vartheta_0 < \vartheta \leqslant \pi$.

Таким образом, сфера не притягивает точки, лежащие "внутри" $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{S}^2_-$, а "внешние" точки притягиваются точно так же, как если бы сферу $\mathbb{S}^2$ заменить одной точкой в центре $\mathbb{S}^2$, а ее массу положить равной массе всей сферы.

Доказательство. Ввиду симметрии достаточно вычислить потенциал в точке с координатами

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = \sin\vartheta, \quad x_4 = \cos\vartheta.$$

Он равен интегралу

$$V = \rho \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \tilde{\vartheta} \sqrt{g}\, d\varphi\, d\psi,$$

где $\cos\tilde{\vartheta} = \sin\vartheta_0 \sin\vartheta \cos\varphi + \cos\vartheta_0 \cos\vartheta$. Нахождение потенциала сводится к вычислению интеграла

$$V = \frac{M}{2} \int\limits_0^\pi \frac{\cos\tilde{\vartheta} \sin\varphi\, d\varphi}{\sin\tilde{\vartheta}}.$$

Он равен

$$\frac{M\left[\sqrt{1-\cos^2(\vartheta+\vartheta_0)} - \sqrt{1-\cos^2(\vartheta-\vartheta_0)}\right]}{2\sin\vartheta_0 \sin\vartheta}. \tag{3}$$

Пусть $\vartheta_0 < \vartheta < \pi - \vartheta_0$ ($\vartheta_0 \leqslant \pi/2$). Тогда $\vartheta - \vartheta_0 > 0$ и $\vartheta < \vartheta + \vartheta_0 < \pi$. Следовательно, согласно (3)

$$V = M\left[\sin(\vartheta+\vartheta_0) - \sin(\vartheta-\vartheta_0)\right]/(2\sin\vartheta_0\sin\vartheta) = M\operatorname{ctg}\vartheta.$$

Пусть теперь $\vartheta < \vartheta_0 \leqslant \pi/2$. Тогда $\vartheta - \vartheta_0 < 0$ и $\vartheta + \vartheta_0 < \pi$. Следовательно,

$$V = M\left[\sin(\vartheta+\vartheta_0) + \sin(\vartheta-\vartheta_0)\right]/(2\sin\vartheta_0\sin\vartheta) = M\operatorname{ctg}\vartheta_0 = \text{const}.$$

Что и требовалось.

Из теоремы 1 сразу выводится теорема о притяжении однородного шара, ограниченного сферой $\vartheta = \vartheta_0 < \pi/2$: внешние точки ($\vartheta_0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi - \vartheta_0$) притягиваются так же, как если бы его масса была сосредоточена в центре. Потенциал внутри шара единичной плотности определяется как $\pi(2\vartheta - \sin 2\vartheta)\cos\vartheta/\sin\vartheta$, что отличается от гуковского потенциала (2). Лишь при малых ϑ получаем потенциал упругого взаимодействия $4\pi\vartheta^2/3 + o(\vartheta^2)$.

4. Притяжение отрезка. В случае евклидова пространства эта задача, по существу, является плоской: в любой плоскости, содержащей гравитирующий отрезок, линии уровня потенциала будут семейством эллипсов с фокусами в концах отрезка. Для пространства постоянной кривизны ситуация аналогичная. В случае $\mathbb{S}^3$ роль плоскости играет двумерная сфера единичного радиуса.

Итак, на двумерной сфере

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{4}$$

рассмотрим отрезок — дугу большого круга с концами в точках $F_1 = (\alpha, \beta, 0)$ и $F_2 = (\alpha, -\beta, 0)$. Разумеется, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Чтобы выбор дуги был однозначным, будем считать, что она содержит точку с координатами 1, 0, 0. Эта дуга допускает параметризацию

$$x = \sin\varphi, \quad y = \cos\varphi, \quad z = 0; \quad \frac{\pi}{2} - \tilde{\varphi} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} + \tilde{\varphi},$$

где $\cos\tilde{\varphi} = \alpha$, $\sin\tilde{\varphi} = \beta$.

В точке с координатами x, y, z значение потенциала (с точностью до постоянного множителя) равно

$$V = \int\limits_{\pi/2-\tilde{\varphi}}^{\pi/2+\tilde{\varphi}} \frac{\cos\tilde{\vartheta}\, d\varphi}{\sin\tilde{\vartheta}}, \tag{5}$$

где $\cos\tilde{\vartheta} = x\sin\varphi + y\cos\varphi$. Аналогом конфокального семейства эллипсов является семейство овалов, которое получается пересечением конусов

$$\frac{c^2x^2}{c^2-\alpha^2} + \frac{c^2y^2}{c^2+\beta^2} + z^2 = 0 \tag{6}$$

со сферой (4); c — параметр (см., например, [12]). Когда $c \to 0$, то эти овалы стремятся к исходному отрезку. По аналогии с евклидовым случаем их можно назвать сферическими кониками, или просто кониками. Они обладают многими свойствами, характерными для обычных плоских коник. Например, их можно определить как совокупность точек, сумма расстояний (измеряемых по дугам больших кругов) от которых до фокусов F_1 и F_2 постоянна [13].

Теорема 2. *Линии уровня потенциала дуги большого круга на* $\mathbb{S}^2$ *— семейство софокусных коник с фокусами на концах дуги.*

Доказательство основано на прямых вычислениях. Интеграл (5) равен

$$\ln \frac{\beta x - \alpha y + \sqrt{1-(\alpha x+\beta y)^2}}{-(\beta x+\alpha y)+\sqrt{1-(\alpha x-\beta y)^2}}.$$

Приравнивая выражения под логарифмом $1/\kappa$, $\kappa = \mathrm{const}$, можно получить уравнение конуса

$$\left(\kappa^2-1\right)^2 z^2 = 8\kappa^2\left(\beta^2x^2+\alpha^2y^2\right)+4\kappa\left(\kappa^2+1\right)^2\left(\beta^2x^2-\alpha^2y^2\right). \tag{7}$$

Пересечение конуса (7) со сферой (4) дает семейство замкнутых кривых. Будет ли оно семейством софокусных коник?

Уравнения конусов (6) и (7) тождественны, если

$$\frac{c^2}{\alpha^2-c^2}=\lambda\beta^2, \quad \frac{c^2}{\beta^2+c^2}=-\mu\alpha^2, \tag{8}$$

где

$$\lambda=\frac{8\kappa^2+4\kappa\left(\kappa^2+1\right)^2}{\left(\kappa^2-1\right)^2}, \quad \mu=\frac{8\kappa^2-4\kappa\left(\kappa^2+1\right)^2}{\left(\kappa^2-1\right)^2}. \tag{9}$$

Соотношения (8) дают одно и то же значение c тогда и только тогда, когда $\lambda+\mu+\lambda\mu=0$. Однако справедливость последнего тождества легко вытекает из (9). Что и требовалось.

5. Притяжение квадрик. Пусть A — симметричный оператор в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^4$, I — тождественный оператор. Оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ (A — резольвента, λ — спектральный параметр) тоже симметрический и определяет пучок квадратичных форм

$$f(x)=\left((A-\lambda I)^{-1}x,x\right).$$

Приравнивая к нулю эти формы, получим семейство конусов, которые пересекаются со сферой $g(x)=(x,x)=1$ по двумерным поверхностям. Эти поверхности можно назвать конфокальными квадриками. Например, разделив уравнение (6) на c^2, получим уравнение вида $f(x)=0$, где $A=\mathrm{diag}\left(-\alpha^2,\beta^2,0\right)$, $\lambda=c^2$.

На квадриках можно ввести гомеоидную плотность $d\sigma/W_2$, где $d\sigma$ — элемент площади квадрики как поверхности в $\mathbb{E}^4$, а W_2 — евклидов объем параллелепипеда, построенного на градиентах функций f и g как на векторах.

Теорема 3. *Пусть k — квадрика на $\mathbb{S}^3$ с гомеоидной плотностью массы, а k_- — антиподальная квадрика. Потенциал, создаваемый k, постоянен в двух шароеидных областях на $\mathbb{S}^3$, ограниченных квадриками k и k_-, а поверхности уровня этого потенциала в дополнительной области являются семейством квадрик, конфокальных с k.*

Это аналог теоремы Ньютона–Айвори. Он доказывается прямым вычислением с использованием сфероконических координат.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 99-01-01096) и программы "Университеты России" (проект № 5581).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Литлвуд Дж.* Математическая смесь. М.: Наука, 1990.
2. *Арнольд В.И.* Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. Первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов. М.: Наука, 1989.
3. *Жуковский Н.Е.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1952.
4. *Арнольд В.И.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: ФАЗИС, 1997.

5. *Chernikov N.A.* The Kepler problem in the Lobachevsky space and its solutions // Acta phys. pol. 1992. **23**. 115–124.
6. *Шредингер Э.* Метод определения квантомеханических собственных значений и собственных функций // Избранные труды. М.: Наука, 1976. 239–247.
7. *Higgs P.W.* Dynamical symmetries in a spherical geometry. I // J. Phys. A. 1979. **12**, N 3. 309–323.
8. *Slawianowski J.* Bertrand systems on $SO(3, R)$, $SU(2)$ // Bull. Acad. pol. sci. 1980. **XXVIII**, N 2. 83–94.
9. *Kozlov V.V., Harin A.O.* Kepler's problem in constant curvature spaces // Celest. Mech. and Dyn. Ast. 1992. **54**. 393–399.
10. *Козлов В.В.* О динамике в пространствах постоянной кривизны // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1994. № 2. 28–35.
11. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд. дом "Удмуртский университет", 1999.
12. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы математической физики. Т. I. М.: ИЛ, 1958.
13. *Берже М.* Геометрия. Т. II. М.: Мир, 1984.

Поступила в редакцию
03.09.99