ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2000, том 373, № 5, с. 597–599

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 531.19

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ

© 2000 г. Академик В. В. Козлов

Поступило 30.05.2000 г.

1. СИСТЕМА СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ

Рассмотрим n маятников, соединенных упругими пружинами. Для простоты будем считать, что их точки подвеса совпадают. Колебания отдельно взятого маятника описываются гамильтонианом

$$h_s = \frac{y_s^2}{2J_s} - m_s g l_s \cos x_s,$$

где x – угол отклонения маятника от вертикали, y – сопряженный импульс, m – масса маятника, J – момент инерции относительно точки подвеса, l – расстояние от точки подвеса до центра масс, g – ускорение свободного падения.

Пусть маятники с номерами i и j соединены упругой пружиной. Тогда потенциальная энергия взаимодействия

$$h_{ij} = -\kappa_{ij}\delta^2\cos(x_i - x_j) + \text{const}.$$

Здесь $\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$ – коэффициент упругости, δ – расстояние до точек крепления пружины.

Пусть γ – набор номеров (ij), для которых $h_{ij} \neq \text{const}$; если $(ij) \in \gamma$, то $(ji) \in \gamma$. Множеству γ естественно сопоставляется граф Γ, вершины которого $\{1, 2, \ldots, n\}$ нумеруют маятники. Вершины i и j соединены ребром, если $(ij) \in \gamma$. Если граф Γ связный, то систему маятников назовем связанной. Динамика системы связанных маятников описывается каноническими дифференциальными уравнениями с гамильтонианом

$$H = \sum_{s=1}^{n} h_s + \sum_{\gamma} h_{ij}.$$

Если граф Γ несвязен, то рассматриваемая система маятников распадается на несколько связанных подсистем, которые колеблются независимо друг от друга.

Мы будем рассматривать гамильтоновы системы несколько более общего вида. Пусть $\mathbb{T}^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n \bmod 2\pi\}$ – конфигурационное пространство, $T = \frac{1}{2}\sum a_{ij}y_iy_j$, $a_{ij} = \text{const}$, – кинетическая энергия, $V\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ – потенциальная энергия, которую будем считать тригонометрическим многочленом. Функция Гамильтона H – это полная энергия $T + V$.

Согласно предположению, ряд Фурье потенциала V

$$\sum v_m e^{i(m,x)}, \quad m = (m_1, m_2 \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n,$$

содержит конечное число гармоник. Конечное множество целочисленных векторов

$$S = \{m \in \mathbb{Z}^n \colon v_m \neq 0\}$$

назовем спектром потенциала V. Ясно, что S инвариантно при отражении $m \to -m$.

Кинетическая энергия T задает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$: если $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, то

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum a_{ij}\xi_i\eta_j.$$

Если $\mathbb{R}^n$ можно разложить в прямую сумму подпространств W_1, W_2, ортогональных относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и спектр S лежит в объединении W_1, W_2, то система с гамильтонианом H распадается на две независимые подсистемы с числом степеней свободы $\dim W_1$ и $\dim W_2$. В этом случае исходная система будет иметь два дополнительных квадратичных первых интеграла, которые являются гамильтонианами отдельных подсистем. Если такое разложение невозможно, то систему будем называть связанной.

2. СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Согласно Гиббсу, пребывание системы в определенном состоянии считается случайным событием. Таким образом, в фазовом пространстве $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ возникает плотность распределения вероятностей $\rho(x, y)$, которая неотрицательна и однозначна всюду в $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$. Гиббс заметил, что ρ удовлетворяет уравнению Лиувилля и поэтому в слу-

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

чае гамильтоновых систем является первым интегралом.

В равновесной статистической механике ключевую роль играет распределение Гиббса

$$\rho = ce^{-\beta H}, \tag{1}$$

где $\beta = (k\tau)^{-1}$, τ – абсолютная температура, k – постоянная Больцмана. Постоянный множитель c находится из условий нормировки

$$\int \rho d^n x d^n y = 1.$$

Обычно распределение Гиббса выводится в предположении, что имеется N одинаковых, слабо взаимодействующих подсистем и в пределе (когда $N \longrightarrow \infty$) эти подсистемы в среднем распределены в соответствии с (1) (см., например, [1]; более строгое изложение в [2]). При этом делается еще одно существенное предположение: при сколь угодно малом взаимодействии подсистем гамильтонова система эргодична на фиксированных энергетических многообразиях. К сожалению, справедливость эргодической гипотезы очень трудно проверить [3]. Более того, зачастую она легко опровергается КАМ-теорией (например, для системы слабо связанных маятников).

В настоящей работе развивается другой подход к выводу гиббсовского распределения. Он основан на том, что типичная гамильтонова система не допускает однозначных интегралов, независимых от энергии H [4, 5].

3. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим задачу о дополнительных интегралах системы с торическим конфигурационным пространством и гамильтонианом $H = T + V$ из раздела 1. Более точно изучаются условия существования новых интегралов в виде полиномов по импульсам с однозначными на $\mathbb{T}^n = \{x \bmod 2\pi\}$ коэффициентами. Отметим, что все известные интегралы обратимых механических систем суть полиномы по импульсам либо функции от этих полиномов. Этот факт используется в разделе 4, хотя в полном объеме он пока не доказан (частичные результаты в этом направлении указаны в [6, гл. II]).

Пусть Σ – выпуклая оболочка спектра S потенциала V. Ясно, что Σ – выпуклый многогранник. Пусть α и β – вершины Σ, соединенные ребром σ. Назовем это ребро положительным, если $\langle\alpha, \beta\rangle > 0$. Положительные ребра видны из начала координат под острым углом.

Наш основной результат составляет

Теорема 1. *Пусть W – гиперплоскость, содержащая начало координат и $n - 1$ линейно-независимых вершин Σ. Если к каждой из этих вершин примыкает положительное ребро, не лежащее целиком в W, то гамильтонова система не допускает полиномиального интеграла, независимого от энергии H.*

Это утверждение доказывается с использованием результатов работы [7]. Достаточные условия отсутствия новых полиномиальных интегралов можно ослабить. По-видимому, теорема 1 справедлива для связанных гамильтоновых систем, о которых шла речь в п. 1. При $n = 2$ этот результат установлен в [7]. Не исключено, что при $n \geq 3$ связанные системы транзитивны на энергетических многообразиях

$$H = h > \max V. \tag{2}$$

Это одна из точных формулировок гипотезы о диффузии в гамильтоновых системах. Более простая задача: доказать отсутствие непостоянных непрерывных интегралов на энергетических поверхностях (2).

Из теоремы 1 выводится

Теорема 2. *Связанная система маятников не допускает однозначного полиномиального интеграла, независимого от полной энергии.*

4. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

Применим теорему 2 для вывода канонического распределения Гиббса для системы маятников, соединенных упругими пружинами. С этой целью рассмотрим две связанные системы маятников с гамильтонианами H_1 и H_2. Предположим, что некоторые маятники из систем 1 и 2 связаны между собой одной (или несколькими) упругими пружинами с очень малым коэффициентом упругости ε. Тогда гамильтониан системы 1 + 2 будет иметь вид

$$\mathcal{H}_\varepsilon = H_1 + H_2 + \varepsilon W,$$

где εW – малая потенциальная энергия взаимодействия систем 1 и 2.

При каждом сколь угодно малом $\varepsilon \neq 0$ система маятников 1 + 2 будет связанной. Следовательно, по теореме 2 плотность распределения вероятностей в фазовом пространстве этой системы будет зависеть лишь от $\mathcal{H}_\varepsilon$: $\rho(\mathcal{H}_\varepsilon)$. Отметим, что эта функция может еще явно зависеть от параметра ε; но для дальнейшего это не существенно.

Устремим теперь ε к нулю. В пределе получим две независимые системы с гамильтонианами H_1 и H_2. Согласно общей идее Гиббса, следует ввести плотности распределения вероятностей ρ_1 и ρ_2. По теореме 2 снова получаем, что ρ_1 и ρ_2 зависят только от H_1 и H_2 соответственно.

Применяя правило умножения для вероятностей независимых событий, получаем при $\varepsilon = 0$ равенство

$$\rho(H_1 + H_2) = \rho_1(H_1)\rho_2(H_2). \tag{3}$$

Это равенство называется еще гипотезой Гиббса о термодинамическом равновесии при исчезающем взаимодействии [1]. Хорошо известно, что решения функционального уравнения (3) – гладкие функции, нигде не обращающиеся в нуль. Последнее вытекает из условия нормировки. Из (3) получаем равенство

$$\frac{\rho_1'}{\rho_1} = \frac{\rho_2'}{\rho_2} = -\beta, \ \beta = \text{const} > 0. \qquad (4)$$

Отсюда вытекает формула (1) для системы с гамильтонианом $\mathcal{H}_0$. Поскольку β зависит лишь от температуры, то (4) проясняет физический смысл гипотезы Гиббса: температуры подсистем 1 и 2 остаются одинаковыми и при $\varepsilon \to 0$.

Если имеется только одна связанная система маятников, то мы можем лишь утверждать, что ее плотность распределения вероятностей зависит от полной энергии этой системы. Как показано в [5], усреднение по такой инвариантной мере в общем случае несовместимо с аксиомами равновесной термодинамики. Причина понятна: у нас нет возможности определить температуру этой системы, сравнивая ее с температурами других систем.

Напротив, если имеются две связанных системы 1 и 2, соединенные между собой, то по истечении большого промежутка времени между ними установится термодинамическое равновесие. Это равновесие не нарушится, если бесконечно медленно и долго уменьшать взаимодействие между системами 1 и 2. В пределе системы 1 и 2 окажутся независимыми, но будут иметь равные температуры. Каждую из них можно бесконечно медленно присоединить к третьей связанной системе с гамильтонианом H_3 и плотностью распределения вероятностей $\rho_3(H_3)$. Условие сохранения термодинамического равновесия при таком соединении состоит в том, что $\frac{\rho_3'}{\rho_3}$ равно аналогичным отношениям из равенства (4).

Работа выполнена при финансовой поддержке программы "Университеты России" и Федеральной целевой программы "Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки" (проект № 2.1–294).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зоммерфельд А.* Термодинамика и статистическая физика. М.: ИЛ, 1955. 479 с.
2. *Хинчин А.Я.* Математические основания статистической механики. М.; Л.: Гостехиздат, 1943. 128 с.
3. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965. 407 с.
4. *Kozlov V.V.* // Regular and Chaotic Dynamics. 1999. V. 4. № 2. P. 44–54.
5. *Козлов В.В.* // ДАН. 2000. Т. 370. № 3. С. 325–327.
6. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмурт. гос. ун-та, 1995. 432 с.
7. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* // Мат. сб. 1988. Т. 135. № 1. С. 119–138.