УДК 531.01 + 531.19

ВИХРЕВАЯ ТЕОРИЯ АДИАБАТИЧЕСКИХ РАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ

В. В. Козлов

1. Общая теория вихрей. Пусть M — гладкое многообразие, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — локальные координаты, ω — дифференциальная 1-форма на M, v — векторное поле и $h : M \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. Вихревая теория изучает случай, когда тензорные объекты ω, v и h (возможно, зависящие еще от времени t) связаны соотношением

$$\partial\omega/\partial t + i_v\, d\omega = -dh. \tag{1}$$

Это уравнение можно назвать обобщенным уравнением Лашба, поскольку такой вид имеет известное уравнение для вихря (ротора скорости) баротропной жидкости в потенциальном силовом поле. Уравнение (1) появляется естественным образом при исследовании инвариантных многообразий гамильтоновых систем, которые однозначно проектируются на конфигурационное пространство, а также в геометрической оптике при анализе систем лучей, однократно заполняющих область трехмерного пространства (см. [1]).

Уравнение (1) подробно изучено в [1]. Ключевой объект — вихревые поля ω, которые являются аннуляторами замкнутой 2-формы $\Omega = d\omega$: $i_v\Omega = 0$. Совокупность вихревых полей при фиксированных t порождает интегрируемое распределение на M. Интегральные поверхности этого распределения называются вихревыми поверхностями. Согласно обобщенной теореме Гельмгольца–Томсона, поток системы уравнений на M

$$\dot{x} = v(x, t) \tag{2}$$

переводит вихревые многообразия в вихревые многообразия.

Цель настоящей заметки — применить эти идеи к изучению адиабатических процессов в равновесной термодинамике.

2. Форма притока тепла. Традиционное изложение классической термодинамики связано с некоторыми затруднениями методического характера, о которых писал еще Клейн [2]. По его словам, читателю "...предлагается пробиваться к цели сквозь барьеры непривычных математических понятий по пути, с трудом проложенному первыми исследователями (Карно, Клаузиус), между тем как очертания этой цели могут быть уже издали ясно и отчетливо постигнуты, если только обратить внимание в соответствующую сторону". Достаточно вспомнить, что обычно одним и тем же символом (dQ) обозначаются как дифференциалы функций, так и бесконечно малые приращения величин, которые функциями вообще не являются. На самом деле естественным способом изложения равновесной термодинамики является метод внешних дифференциальных форм.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — внешние параметры термодинамической системы, τ — абсолютная температура. В термодинамике фундаментальное значение имеет 1-форма притока тепла

$$\omega = dE + \sum A_i \, da_i, \tag{3}$$

где E — внутренняя энергия системы; A_i — обобщенная сила, отвечающая лагранжевой координате a_i. Например, если в качестве координаты принять объем газа, то обобщенная сила будет, как известно, давлением. Величины E и A_i — функции от a и τ. Их задание входит в определение термодинамической системы. Соотношения $A_i = f_i(a_1, \ldots, a_n, \tau)$ обычно называются уравнениями состояния. Кроме объема в качестве обобщенных координат часто фигурируют концентрация, заряд, намагниченность, электрическая поляризация, тензор деформации. При этом обобщенными силами являются соответственно химпотенциал, потенциал, магнитная напряженность, электрическая напряженность, тензор напряжения.

Дифференциальная форма

$$\sum A_i \, da_i \tag{4}$$

— работа сил A на бесконечно малом перемещении da. В термодинамике предполагается, что при фиксированных значениях τ форма (4) замкнута. Если пространство состояний $\{a_1, \ldots, a_n\}$ совпадает с $\mathbb{R}^n$, то (по лемме Пуанкаре) эта форма будет точной (является дифференциалом некоторой гладкой функции от a).

Будем предполагать, что

$$\sum (\partial A_i / \partial \tau)^2 \neq 0. \tag{5}$$

Значит, форма притока тепла (3) незамкнута. Ее внешний дифференциал $d\omega$ равен

$$\Omega = \sum \frac{\partial A_i}{\partial \tau} \, d\tau \wedge da_i. \tag{6}$$

Матрица этой 2-формы — кососимметрическая $(n+1) \times (n+1)$-матрица:

$$\begin{Vmatrix} 0 & \dfrac{\partial A_1}{\partial \tau} & \ldots & \dfrac{\partial A_n}{\partial \tau} \\ -\dfrac{\partial A_1}{\partial \tau} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{\partial A_n}{\partial \tau} & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Ввиду предположения (5) ранг дифференциальной формы (6) равен 2. Поскольку 2-форма Ω замкнута, то класс этой формы совпадает с ее рангом.

На самом деле в термодинамике предполагается большее: класс формы притока тепла равен 2. Это означает, что в каждой точке $(\tau, a_1, \ldots, a_n)$ коразмерность линейного пространства векторов w, таких, что $i_w \, \omega = 0$, $i_w \, \Omega = 0$, равна 2. Здесь i — внутреннее произведение вектора и внешней формы. Хорошо известно, что 1-формы класса 2 имеют интегрирующий множитель. Более точно, по теореме Дарбу локально всегда найдутся две независимые гладкие функции f и g, такие, что $\omega = f \, dg$.

Согласно второму началу термодинамики [3, 4], такое представление существует в целом:

$$\omega = \tau\, dS, \tag{8}$$

где S — энтропия термодинамической системы — гладкая функция от $\tau, a_1, \ldots, a_n$. Множитель τ по своему физическому смыслу всегда положителен.

Равновесная термодинамика — это по сути дела геометрия дифференциальных форм постоянного класса 2.

3. Адиабатические процессы. Процессом, происходящим в термодинамической системе, называется ориентированный путь $\gamma : \Delta \to M$, где Δ — интервал числовой оси $\mathbb{R}$, $M = \{\tau, a_1, \ldots, a_n\}$ — пространство состояний. Ориентация пути указывает направление процесса. В равновесной термодинамике процесс трактуется как бесконечно медленная смена равновесных состояний термодинамической системы. Такие процессы являются обратимыми.

Интеграл от 1-формы по пути γ — это количество тепла, полученное системой во время процесса, а интеграл

$$\int\limits_\gamma \sum A_i\, da_i$$

равен работе внешних сил. Процесс называется адиабатическим, если он происходит без притока или оттока тепла.

Пусть гладкий путь γ параметризован параметром $\alpha \in \Delta$: координаты τ, a — гладкие функции α. Можно вычислить скорость процесса:

$$v_0 = \frac{d\tau}{d\alpha}, \quad v_1 = \frac{da_1}{d\alpha}, \quad \ldots, \quad v_n = \frac{da_n}{d\alpha}.$$

Критерий адиабатичности выражается равенством

$$i_v\, dS = \frac{\partial S}{\partial \tau} v_0 + \sum \frac{\partial S}{\partial a_i} v_i = 0,$$

где $v = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$.

Обратно, пусть в пространстве состояний M задано векторное поле $v(\tau, a)$. Ему можно поставить в соответствие автономную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = v_0(\tau, a), \quad \frac{da_i}{d\alpha} = v_i(\tau, a), \quad i \geqslant 1, \tag{9}$$

решения которой — квазистатические процессы рассматриваемой термодинамической системы.

Если процесс не изотермический ($v_0 \neq 0$), то в качестве параметра α на пути γ можно принять абсолютную температуру: $a_i = a_i(\tau)$. Тогда в (9) $v_0 = 1$. При таком соглашении с учетом формулы (8) для адиабатического процесса имеем

$$i_v\, d\omega = i_v\,(d\tau \wedge dS) = (i_v\, d\tau) \wedge dS - d\tau \wedge (i_v\, dS) = dS. \tag{10}$$

Это — стационарное уравнение Лашба (1), роль "гамильтониана" h играет энтропия с обратным знаком. Следовательно, к уравнению (10) можно применить все результаты вихревой теории из [1].

Вихревые векторы $w = (w_0, w_1, \ldots, w_n)$ определяются из равенства

$$i_w\, \Omega = 0, \quad \Omega = d\omega.$$

Другими словами, w — собственные векторы кососимметрической матрицы (7) с нулевым собственным значением. Из формул (3) и (8) вытекает, что

$$\frac{\partial A_i}{\partial \tau} = \frac{\partial S}{\partial a_i}, \quad i \geqslant 1. \tag{11}$$

Ввиду предположения (5) получаем равенства

$$w_0 = 0, \quad \sum \frac{\partial S}{\partial a_i} w_i = 0.$$

Второе равенство приводит к "теореме Бернулли": энтропия постоянна на вихревых линиях — интегральных кривых поля w. С учетом равенства $w_0 = 0$ вихревые линии представляют в точности изотермические адиабатические процессы.

Напомним, что вихревые многообразия — это максимальные интегральные поверхности интегрируемого распределения вихревых векторных полей. Легко понять, что они являются $(n-1)$-мерными поверхностями

$$\Sigma_s = \{\tau, a : \tau = \mathrm{const},\ S(\tau, a) = s = \mathrm{const}\}. \tag{12}$$

По "теореме Гельмгольца–Томсона" фазовый поток системы (9) (в которой $v_0 = 1$) переводит вихревые многообразия в вихревые многообразия.

Это наблюдение подсказывает возможность "опустить" динамическую систему (9) на фактор-многообразие M/Σ, которое получается из M отождествлением точек, лежащих на одной и той же поверхности (12). Ясно, что точки M/Σ однозначно задаются параметрами τ, s, которые удовлетворяют уравнению (см. (10))

$$i_v(d\tau \wedge ds) = ds. \tag{13}$$

В переменных τ, s поле v имеет вид

$$v_0 = 1, \quad \frac{ds}{d\tau} = 0.$$

Это — гамильтонов вариант теоремы о выпрямлении векторного поля: система (13) гамильтонова со стандартной симплектической структурой (формой площади $d\tau \wedge ds$) и гамильтонианом $-s$. Аналог уравнения (13) в гидродинамике — это известные уравнения Клебша–Стюарта [1, гл. II].

4. Интегральные инварианты. Пусть γ_α — замкнутый путь в M, вмороженный в поток системы (9) (где $v_0 = 1$). Согласно обобщенной теореме Пуанкаре [1, гл. II]

$$\int_{\gamma_\alpha} \omega = \mathrm{const}. \tag{14}$$

Этот результат можно сформулировать по-другому: работа внешних сил $A_1, \ldots, A_n$ по всем замкнутым циклам γ_α одна и та же.

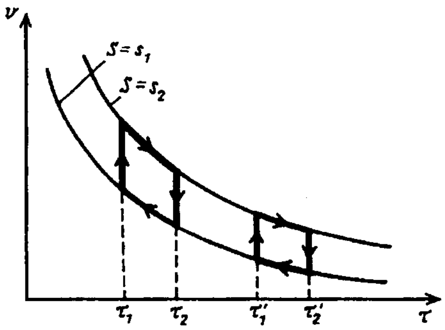

Рис. 1

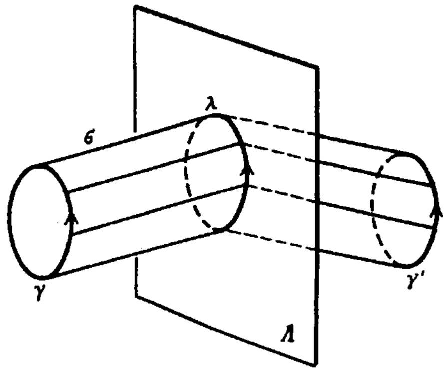

Рис. 2

Пример. Рассмотрим два цикла Карно γ и γ' (рис. 1) для идеального газа, отвечающие одним и тем же значениям энтропии s_1 и s_2. Если $\tau_2 - \tau_1 = \tau_2' - \tau_1'$, то цикл γ' получается в результате сдвига цикла γ по траекториям соответствующей системы (9). Следовательно, ввиду (3) и (14)

$$\int_\gamma p\,dv = \int_{\gamma'} p\,dv. \tag{15}$$

Другими словами, работа, совершенная тепловой машиной на циклах γ и γ' (или количество тепла, полученное машиной), одна и та же. На самом деле работа (15) равна $(\tau_2 - \tau_1)(s_2 - s_1)$. Это легко вывести из классических формул Карно:

$$\Delta S = q_1/\tau_1 = q_2/\tau_2,$$

где $q_1(q_2)$ — количество тепла, отданного (полученного) машиной при изотермическом процессе. Следовательно,

$$q_2 - q_1 = \frac{\tau_2}{\tau_1} q_1 - q_1 = (\tau_2 - \tau_1) \frac{q_1}{\tau_1} = \Delta\tau\Delta S.$$

Впрочем, эта формула сразу следует из формулы $d\omega = d\tau \wedge dS$ и теоремы Стокса.

Формуле (15) можно придать более общий смысл. Она справедлива для цикла γ', который получается из цикла γ с помощью следующего построения: через каждую точку γ проводим адиабату и сдвигаем эту точку по указанной адиабате на фиксированное значение температуры τ.

Инвариантность интеграла (14) также тесно связана с вихревыми линиями. Пусть $n \geqslant 2$ и пусть γ — замкнутый цикл в M. Проводя через каждую точку γ вихревую линию, получим вихревую трубку σ — двумерную цилиндрическую поверхность в M. Оказывается, если γ' — любой другой цикл на σ, гомологичный γ (γ' и γ одинаково охватывают σ), то

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega. \tag{16}$$

Это — простое следствие теоремы Стокса [1, гл. II].

Особенно просто такая конструкция выглядит при $n = 2$. Тогда $\dim M = 3$ и 2-форма Ω будет неособой: через каждую точку M проходит единственная вихревая линия.

Равенство (16) справедливо и для фазовых переходов второго рода [3, 4]. В этом случае фазовое пространство M делится некоторой гиперплоскостью Λ (поверхность равновесия фаз) на две области N и N' ($M = N \cup N'$, $N \cap N' = \Lambda$), в каждой из которых заданы гладкие 1-формы притока тепла ω и ω'. Эти формы можно продолжить до гладких форм в окрестностях N и N', причем на поверхности Λ они совпадают, а их дифференциалы $d\omega$ и $d\omega'$ нет. Это означает, что при переходе из N в N' вихревые линии претерпевают излом.

Пусть σ — трубка вихревых линий в M, γ и γ' — гомологичные циклы на σ, расположенные в N и N' соответственно. Тогда

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega'. \tag{17}$$

Идея доказательства ясна из рис. 2: ввиду непрерывности

$$\int_\lambda \omega = \int_\lambda \omega',$$

где λ — цикл на $\sigma \cap \Lambda$, гомологичный γ и γ'.

Равенство (17) вполне аналогично теореме Малюса из геометрической оптики [1, гл. I].

5. Вариационный принцип. С интегральными инвариантами тесно связан вариационный принцип: решения системы (2) являются экстремалями вариационной задачи

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \omega - h\, dt = 0 \tag{18}$$

в классе кривых с закрепленными концами. Это — обобщение вариационного принципа Гельмгольца–Пуанкаре для гамильтоновых систем.

Пусть γ — гладкий путь в M, параметризованный параметром α, $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$, и

$$v = (v_0, v_1, \dots, v_n)$$

— поле скоростей (9) на γ. Рассмотрим функционал

$$I[\gamma] = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\omega(v) + S]\, d\alpha, \quad \omega(v) = i_v\omega \tag{19}$$

в классе путей с фиксированными концами. Справедлив следующий вариационный принцип:

путь γ — стационарная точка функционала (19) тогда и только тогда, когда

1) $d\tau/d\alpha = 1$ $(v_0 = 1)$,

2) путь γ представляет адиабатический неизотермический процесс.

Вариационные принципы такого типа в литературе по термодинамике, по-видимому, не отмечались (см. [5, 6]).

Стационарность функционала (19) на адиабатических неизотермических процессах вытекает из (18). Для доказательства обратного утверждения введем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} = \omega(v) + S = \tau \frac{dS}{d\alpha} + S$$

и воспользуемся уравнениями Эйлера–Лагранжа

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau'}\right)' = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau}, \quad \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a'}\right)' = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a}. \tag{20}$$

Здесь штрих обозначает производную по α. Второе уравнение дает соотношение

$$\tau' \partial S/\partial a = \partial S/\partial a.$$

Ввиду предположения (5) и равенств (11) имеем $\tau' = 1$. Первое уравнение (20) приводится к соотношению

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + \sum \frac{\partial S}{\partial a_i} v_i = 0,$$

эквивалентному условию адиабатичности.

Адиабатические изотермические процессы характеризуются следующим более простым вариационным принципом: функционал

$$J[\gamma] = \int_\gamma \omega \tag{21}$$

принимает стационарное значение в классе путей с фиксированными концами. Это утверждение легко доказывается тем же способом.

Замечание. Значение функционалов (19) и (21) на адиабатических процессах (соответственно неизотермических и изотермических) равно разности значений функции τS в концевых точках. Напомним, что произведение τS равно разности внутренней и свободной энергий термодинамической системы.

6. Некоторые обобщения. Все сказанное выше справедливо и для несколько более общего класса процессов, чем адиабатические. Предположим, что поле (9) таково, что

$$L_v S = g(\tau), \tag{22}$$

где g — некоторая вещественная функция.

С учетом (22) получаем

$$i_v \Omega = dS - (L_v S)\, d\tau = dB, \tag{23}$$

где $B = S - f(\tau)$, f — первообразная функции g. Соотношение (23) вполне аналогично (10), только роль энтропии играет функция B.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (проект № 96–0793).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Козлов В.В.* Общая теория вихрей. Ижевск, 1998.
2. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л., 1937.
3. *Леонтович М.А.* Введение в термодинамику. М.; Л., 1952.
4. *Зоммерфельд А.* Термодинамика и статистическая физика. М., 1955.
5. *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М., 1974.
6. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М., 1983.

Поступила в редакцию
26.05.99