УДК 531.01

В. В. КОЗЛОВ, А. О. ХАРИН

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Принцип относительности и силы инерции

В классической механике принцип относительности постули-рует эквивалентность инерционных систем отсчета, связанны между собой преобразованиями Галилея. В инерциальных систе-мах законы динамики имеют одинаковый вид. Это обстоятельств налагает определенные ограничения на физические силы, входя-щие в уравнения движения замкнутой механической системы представленные в инерциальной системе отсчета. Использовани неинерциальных систем приводит, как известно, к появлению до-полнительных сил инерции. В настоящей работе показано, что ес-ли задан закон движения замкнутой системы материальных точе в некоторой неинерциальной системе отсчета, то можно, во-пер-вых, однозначно отделить силы инерции от физических сих взаи-модействия и, во-вторых, найти угловую скорость и угловое уско-рение вращения этой неинерциальной системы, а также ускоре-ние от начала координат.

1. Группа Галилея. Как заметил еще Лагранж, механика мо-жет рассматриваться как геометрия в четырехмерном пространс-ве: трех декартовых $(x_1\ x_2,\ x_3)=\overline{x}$ и одной координаты време-ни t достаточно, чтобы определить положение движущейся части-цы в фиксированный момент времени. В соответствии с этим за-мечанием естественно ввести в рассмотрение четырехмерное евкли-дово пространство-время $E^4=\{\overline{x},\ t\}$ и трактовать декарто системы координат $x_1,\ x_2,\ x_3,\ t$ в E^4 как систему отсчета.

Пусть $\overline{x}_1,\ t$ и $\overline{x}_2,\ t$ — две точки в E^4 и $\overline{x}'_1,\ t'_1$ и $\overline{x}'_2,\ t'_2$ - координаты тех же точек относительно другой системы отсч-та. Невырожденное аффинное преобразование координат $\overline{x}$, $t\to\overline{x}',\ t'$ называется *преобразованием Галилея*, есл оно сохраняет:

1) промежутки времени $|t_1-t_2|=|t'_1-t'_2|$;
2) расстояния между точками в один и тот же момен времени, т. е. если $t_1=t_2$ (тогда и $t'_1=t'_2$), то $|\overline{x}_1-\overline{x}_2|=|\overline{x}'_1-\overline{x}'_2|$.

Нетрудно найти явный вид преобразований Галилея. Для этого рассмотрим аффинное преобразование E^4 общего вида:

$$\bar{x}=A\bar{x}'+\bar{v}t'+\bar{a},\ t=(\bar{l},\bar{x}')+kt'+s.$$

Здесь A — матрица размера 3×3; $\bar{v}$, $\bar{a}$ и $\bar{l}$ — векторы трехмерного евклидова пространства, k и s — вещественные числа. Покажем сначала, что для преобразований Галилея $l=0$, а $k=\pm1$. Действительно, используя свойство 1), приходим к равенству

$$|t_1-t_2|=\left|(\bar{l},\ \bar{x}_1'-\bar{x}_2')+k(t_1'-t_2')\right|=|t_1'-t_2'|. \qquad (1)$$

Это соотношение справедливо для всех пар точек $(\bar{x}_1',\ t_1')$ $(\bar{x}_2',\ t_2')$ из E^4. Полагая $t_1'=t_2'$, получаем, что $(\bar{l},\ \bar{x}')=0$ для всех векторов $\bar{x}'$. Откуда $l=0$. Но тогда из (1) получаем, что $k=\pm1$.

Покажем теперь, что A — ортогональная матрица. Для этого положим $t_1=t_2$ и воспользуемся свойством 2):

$$|\bar{x}_1-\bar{x}_2|=|A\bar{x}_1'-A\bar{x}_2'|=|A(\bar{x}_1'-\bar{x}_2')|=|\bar{x}_1'-\bar{x}_2'|$$

для любых $\bar{x}_1'$ и $\bar{x}_2'$. Следовательно, матрица A ортогональная.

Итак, мы нашли общий вид преобразований Галилея:

$$\begin{gathered}\bar{x}=A\bar{x}'+\bar{v}t'+\bar{a},\ t=\pm t'+s,\\ A\in O(3);\ \bar{v},\ \bar{a}\in R^3;\ s\in R.\end{gathered} \qquad (2)$$

Нетрудно проверить, что семейство преобразований вида (2) образует группу; она носит название группы Галилея. Каждое преобразование из этой группы есть композиция сдвига начала отсчета (возможно, с обращением времени), поворота в трехмерном пространстве и движения с постоянной скоростью. Так как ортогональные матрицы образуют трехпараметрическое семейство, то преобразование Галилея общего вида содержит 10 независимых параметров.

2. Принцип относительности. Этот принцип постулирует существование инерциальных систем отсчета, связанных друг с другом преобразованиями Галилея, в которых уравнения динамики имеют одинаковый вид. С физической точки зрения все инерциальные системы отсчета равноправны. В релятивистской механике также имеет место принцип относительности, но только инерциальные системы отсчета связаны преобразованиями из группы Лоренца — Пуанкаре.

Рассмотрим замкнутую систему из n материальных точек $(\bar{x}_1,\ m_1),\ldots,(\bar{x}_n,\ m_n)$, которые взаимодействуют только между собой. Согласно принципу детерминированности, движение этой системы описывается системой n векторных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$m_i \ddot{\bar{x}}_i = F_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \dot{\bar{x}}_1, \ldots, \dot{\bar{x}}_n, t), \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (3)$$

Здесь $\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_n$ — результирующие силы взаимодействия точек с массами $m_1, \ldots, m_n$.

Пусть $(\bar{x}, t) \to (\bar{x}', t')$ — преобразование Галилея (2). Согласно принципу относительности в новых переменных $\bar{x}'$, t' уравнения (3) должны иметь тот же самый вид:

$$m_i \frac{d^2\bar{x}_i'}{dt'^2} = \bar{F}_i\left(\bar{x}_1', \ldots, \bar{x}_n', \frac{d\bar{x}_1'}{dt'}, \ldots, \frac{d\bar{x}_n'}{dt'}, \bar{t}'\right), \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (4)$$

Это обстоятельство накладывает нетривиальные ограничения на вид сил взаимодействия $\bar{F}_1, \ldots, \bar{F}_n$, представленных в инерциальной системе.

Рассмотрим сначала преобразования вида $\bar{x} = \bar{x}'$ и $t = t' + s$. Ясно, что

$$\frac{d\bar{x}'}{dt'} = \dot{\bar{x}} \quad \text{и} \quad \frac{d^2\bar{x}'}{dt'^2} = \ddot{\bar{x}}.$$

Сравнивая правые части систем (3) и (4), заключаем, что функции $\bar{F}_i$ не зависят явно от времени t.

Рассматривая далее преобразования Галилея $\bar{x} = \bar{x}' + \bar{a}$, $t = t'$ и используя принцип относительности, приходим к соотношениям

$$F_i(\bar{x}_1 + \bar{a}, \ldots, \bar{x}_n + \bar{a}, \dot{\bar{x}}_1, \ldots, \dot{\bar{x}}_n) = \bar{F}_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \dot{\bar{x}}_1, \ldots, \dot{\bar{x}}_n).$$

Следовательно, силы $\bar{F}_i$ зависят лишь от относительных координат $\bar{x}_k - \bar{x}_j$.

Инвариантность уравнений динамики относительно преобразований Галилея $\bar{x} = \bar{x}' + \bar{v}t$, $t = t'$ приводит к выводу о зависимости сил $\bar{F}_i$ лишь от относительных скоростей $\dot{\bar{x}}_k - \dot{\bar{x}}_j$. Учтем еще тот факт, что обращение времени $t \to -t$ также входит в группу Галилея. При этом скорости $\dot{\bar{x}}$ меняют знак, а ускорения $\ddot{\bar{x}}$ не изменяются. Поэтому силы $\bar{F}_i$ являются четными функциями от разностей скоростей $\dot{\bar{x}}_k - \dot{\bar{x}}_j$.

Наконец, рассматривая преобразования Галилея $\bar{x} = A\bar{x}'$, $t = t'$ и используя принцип относительности, приходим к тождествам

$$\bar{F}_i(A\bar{x}_k, A\dot{\bar{x}}_j) = A\bar{F}_i(\bar{x}_k, \dot{\bar{x}}_j), \quad i, j, k = 1, \ldots, n, \qquad (5)$$

справедливым для всех ортогональных матриц A.

В качестве простого примера рассмотрим замкнутую систему, состоящую из одной единственной точки ($n=1$). Пусть $\overline{F}(\overline{x}, \dot{\overline{x}}, t)$ — действующая на нее сила. Согласно сказанному выше,

$$\overline{F}(\overline{x}+\overline{a},\ \dot{\overline{x}}+\overline{v},\ t+s)=\overline{F}(\overline{x},\ \dot{\overline{x}},\ t)$$

для всех $\overline{a}$, $\overline{v}$ и s. Отсюда вытекает, что $\overline{F}=\overline{\mathrm{const}}$. Согласно (5), $\overline{F}=A\overline{F}$ для всех $A\in O(3)$. Следовательно, $\overline{F}=0$. **Итак, в любой инерциальной системе отсчета свободная материальная точка движется равномерно и прямолинейно. Это — закон инерции Галилея-Ньютона.**

Пусть теперь $n=2$ и силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ не зависят от скоростей $\dot{\overline{x}}_1$ и $\dot{\overline{x}}_2$. Тогда

$$\overline{F}_k=(\overline{x}_1-\overline{x}_2)f_k(|\overline{x}_1-\overline{x}_2|),\ k=1,2.$$

Действительно, $\overline{F}_k$ зависит лишь от $\overline{x}=\overline{x}_1-\overline{x}_2$, причем

$$\overline{F}_k(A\overline{x})=A\overline{F}(\overline{x})$$

для всех $A\in O(3)$. Выбирая в качестве A матрицы поворотов трехмерного евклидова пространства вокруг вектора $\overline{x}$, получаем требуемое.

Из принципа относительности не вытекает, что $\overline{F}_1+\overline{F}_2=0$. Принцип равенства действия и противодействия является самостоятельным принципом, тесно связанным с определением массы взаимодействующих точек. В дальнейших рассмотрениях этот принцип не участвует.

3. Силы инерции. Согласно п. 2, в инерциальной системе отсчета закон движения имеет вид:

$$m_i\ddot{\overline{x}}_i=\overline{F}_i(\overline{x}_k-\overline{x}_j,\ \dot{\overline{x}}_k-\dot{\overline{x}}_j),\ i,\ j,\ k=1,\ldots,n, \tag{6}$$

причем выполнены соотношения (5). Перейдем теперь в неинерциальную систему, совершив замену переменных

$$t\to t,\ \overline{x}=B(t)\overline{z}+\overline{b}(t), \tag{7}$$

где $\overline{z}=(z_1, z_2, z_3)$ — декартовы координаты точек в новой системе, $B\in O(3)$ при всех значениях t, $\overline{b}$ — радиус-вектор начала неинерциальной системы отсчета.

Дифференцируя соотношение (7) по t, приходим к соотношениям

$$\dot{\overline{x}}=\dot{B}\overline{z}+B\dot{\overline{z}}+\dot{\overline{b}},\ \ddot{\overline{x}}=\ddot{B}\overline{z}+2\dot{B}\dot{\overline{z}}+B\ddot{\overline{z}}+\ddot{\overline{b}}. \tag{8}$$

Подставляя (7) и (8) в (6), получим уравнения движения в новой системе отсчета:

$$
\begin{gathered}
m_i(\ddot{B}\bar{z}_i + 2\dot{B}\dot{\bar{z}}_i + B\ddot{\bar{z}}_i + \ddot{\bar{b}}) = \bar{F}_i\big(B(\bar{z}_k - \bar{z}_j),\\
\dot{B}(\bar{z}_k - \bar{z}_j) + B(\dot{\bar{z}}_k - \dot{\bar{z}}_j)\big).
\end{gathered} \tag{9}
$$

Так как $B \in O(3)$, то, согласно (5),

$$
B^{-1}\bar{F}_i(\bar{x}_k, \dot{\bar{x}}_k) = \bar{F}_i(B^{-1}\bar{x}_k, B^{-1}\dot{\bar{x}}_k).
$$

Следовательно, уравнение (9) можно представить в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
m_i\ddot{\bar{z}}_i = \bar{F}_i\big(\bar{z}_k - \bar{z}_j,\ B^{-1}\dot{B}(\bar{z}_k - \bar{z}_j) + \dot{\bar{z}}_k - \dot{\bar{z}}_j\big) - m_i B^{-1}\ddot{B}\bar{z}_i -\\
- 2m_i B^{-1}\dot{B}\dot{\bar{z}}_i - m_i B^{-1}\ddot{\bar{b}}.
\end{gathered} \tag{10}
$$

Таким образом, при переходе в неинерциальную систему отсчета появляются дополнительные силы

$$
\bar{\Phi}_i = -m_i(B^{-1}\ddot{B}\bar{z}_i + B^{-1}\ddot{\bar{b}}) \quad \text{и} \quad \bar{\Psi}_i = -2m_i B^{-1}\dot{B}\dot{\bar{z}}_i, \tag{11}
$$

называемые **силами инерции**. Покажем, что $\bar{\Phi}_i$ — переносная, а $\bar{\Psi}_i$ — кориолисова сила инерции. Пусть $\bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости неинерциальной системы в «подвижном» пространстве. Хорошо известно, что $B^{-1}\dot{B}$ — кососимметрическая матрица, равная

$$
\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{12}
$$

причем $B^{-1}\dot{B}\bar{z} = \bar{\omega} \times \bar{z}$. Следовательно, формула (11) для $\bar{\Psi}_i$ принимает более привычный вид:

$$
\bar{\Psi}_i = -2m_i(\bar{\omega} \times \dot{\bar{z}}_i).
$$

Здесь $\dot{\bar{z}}_i$ — относительная скорость точки m_i.

Положим $\varepsilon = \dot{\bar{\omega}}$, $\bar{w} = B^{-1}\ddot{\bar{b}}$. Ясно, что $\bar{w}$ — ускорение начала неинерциальной системы как вектор в этом подвижном пространстве. Воспользуемся тождеством

$$
B^{-1}\ddot{B} = (B^{-1}\dot{B})^{\boldsymbol{\cdot}} - (B^{-1})^{\boldsymbol{\cdot}}\dot{B}.
$$

Так как $B^{\mathsf{T}} = B^{-1}$ и $(B^{-1}\dot{B})^{\mathsf{T}} = -B^{-1}\dot{B}$, то

$$-(B^{-1}\dot{B})^{\cdot} = -(\dot{B})^{\mathsf{T}} B B^{-1}\dot{B} = B^{-1}\dot{B}B^{-1}\dot{B}.$$

Следовательно,

$$B^{-1}\ddot{B} = \left(B^{-1}\dot{B}\right)^{\cdot} + B^{-1}\dot{B}B^{-1}\dot{B},$$

Ясно, что

$$\left(B^{-1}\dot{B}\right)^{\cdot}\bar{z} = \bar{\varepsilon}\times\bar{z},\quad B^{-1}\dot{B}B^{-1}\dot{B}\bar{z} = \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{z}).$$

В итоге получаем искомую формулу для Φ_i:

$$\bar{\Phi}_i = -m_i\left(\bar{w} + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{z}_i) + \bar{\varepsilon}\times\bar{z}_i\right).$$

Предположим, что в некоторой (вообще говоря, неинерциальной) системе отсчета задан закон движения замкнутой системы n материальных точек:

$$m_i\ddot{\bar{z}}_i = \bar{G}_i(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n, \dot{\bar{z}}_1, \ldots, \dot{\bar{z}}_n, t), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Тогда вектор-функции $\bar{G}_i$ должны быть представимы в виде правых частей системы (10):

$$\begin{aligned}\bar{G}_i(\bar{z}_j, \dot{\bar{z}}_k, t) = \bar{F}_i\big(\bar{z}_k-\bar{z}_j,\ B^{-1}\dot{B}(\bar{z}_k-\bar{z}_j)+\dot{\bar{z}}_k-\dot{\bar{z}}_j\big) - \\ - m_iB^{-1}\ddot{B}\bar{z}_i - 2m_iB^{-1}\dot{B}\dot{\bar{z}}_i - m_iB^{-1}\ddot{\bar{b}}.\end{aligned} \tag{14}$$

Оказывается, каждое слагаемое в правой части может быть однозначно выражено через $\bar{G}_i$. Действительно, согласно (14),

$$\bar{G}_i(\bar{z}_j, \dot{\bar{z}}_k, t) - \bar{G}_i(\bar{z}_j+\bar{a}, \dot{\bar{z}}_k, t) = m_iB^{-1}\ddot{B}\bar{a} \tag{15}$$

для любого вектора $\bar{a}$, и

$$\bar{G}_i(\bar{z}_j, \dot{\bar{z}}_k, t) - \bar{G}_i(\bar{z}_j, \dot{\bar{z}}_k+\bar{v}, t) = 2m_iB^{-1}\dot{B}\bar{v} \tag{16}$$

для любого вектора $\bar{v}$. Так как $\bar{z}_j \to -\bar{z}_j$ — ортогональное преобразование, то, согласно (5),

$$\overline{F}_i(-\overline{z}_j,\ -\dot{\overline{z}}_k) = -\overline{F}_i(\overline{z}_j,\ \dot{\overline{z}}_k).$$

Поэтому

$$\overline{G}_i(\overline{z}_j,\ \dot{\overline{z}}_k,\ t) + \overline{G}_i(-\overline{z}_j,\ \dot{\overline{z}}_k,\ t) = -2m_i B^{-1}\ddot{\overline{b}}. \qquad (17)$$

Соотношения (15)—(17) позволяют найти $B^{-1}\dot{B}$, $B^{-1}\ddot{B}$ и $B^{-1}\ddot{\overline{b}}$ или, что фактически то же самое, векторы $\overline{\omega}$, $\overline{\varepsilon}$ и $\overline{w}$. В частности, силы $\overline{G}_i$, действующие на материальные точки в инерциальной системе отсчета, могут быть однозначно предствлены в виде суммы сил $\overline{F}_i$ и сил инерции $\overline{\Phi}_i$ и $\overline{\Psi}_i$.

Итак, зная закон движения (12) системы точек в неинерциальной системе, мы можем однозначно найти векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{w} = B^{-1}\ddot{\overline{b}}$. Следовательно, ортогональная матрица $B(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{B} = B\Omega, \qquad (18)$$

где Ω — известная кососимметрическая матрица (12). Для любой ортогональной матрицы B_0 существует единственное решение $B(t)$ уравнения (18), такое, что $B(0) = B_0$. Так как вектор ускорения $\overline{w}$ нам известен, то можно найти вектор $\ddot{\overline{b}}(t) = B(t)\overline{w}(t)$ — ускорение начала подвижной системы отсчета в «неподвижном» пространстве. Следовательно, радиус-вектор этой точки находится по формуле

$$\overline{b}(t) = \int_0^t \int_0^\eta \ddot{\overline{b}}(\xi)\,d\xi\,d\eta + \overline{v}t + \overline{a},$$

где $\overline{v}$ и $\overline{a}$ — некоторые постоянные векторы. При фиксированном выборе B_0, $\overline{v}$ и $\overline{a}$ мы получим формулу (7), связывающую некоторую инерциальную и выбранную нами неинерциальную системы отсчета. Так как в формуле перехода (7) время не преобразуется, то варьируя ортогональную матрицу B_0 и векторы $\overline{v}$, $\overline{a}$, можно получить все семейство инерциальных систем отсчета. Эти наблюдения приводят к **важному следствию принципа относительности**: закон движения любой замкнутой системы взаимодействующих точек в некоторой фиксированной подвижной системе отсчета позволяет найти все инерциальные системы.

Подчеркнем в заключение, что без предположения о справедливости принципа относительности невозможно однозначно отделить физические силы взаимодействия от сил инерции.