Математические заметки

том 65 выпуск 5 май 1999

УДК 517.925

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ИЗОЛИРОВАННЫХ РАВНОВЕСИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИНВАРИАНТНОЙ МЕРОЙ В НЕЧЕТНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. Козлов, Д. В. Трещев

В работе обсуждается гипотеза о неустойчивости изолированных положений равновесия автономных систем в пространстве нечетной размерности, допускающих инвариантную меру. Эта гипотеза доказана для систем, у которых можно выделить квазиоднородное укорочение с изолированной особенностью. Приведен контрпример в классе систем с бесконечно дифференцируемой правой частью и нулевым рядом Маклорена в положении равновесия.

Библиография: 3 названия.

1. Введение. Пусть

$$\dot{x} = v(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

– автономная система дифференциальных уравнений, допускающая инвариантную меру с гладкой плотностью:

$$\operatorname{div}(\rho v) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Пусть $x = 0$ – положение равновесия: $v(0) = 0$.

В. В. Тен высказал предположение, что если n – нечетно и равновесие $x = 0$ изолировано, то оно неустойчиво по Ляпунову. Эта гипотеза имеет важное следствие: все изолированные положения равновесия стационарных течений жидкости в трехмерном евклидовом пространстве неустойчивы.

В типичной ситуации система (1) имеет следующий вид:

$$\dot{x} = Ax + o(|x|), \qquad \det A \neq 0. \tag{3}$$

Перепишем "уравнение неразрывности" (2): $\dot{\nu} = -\operatorname{div} v$, где $\nu = \ln \rho$. Полагая в этом уравнении $x = 0$, получаем равенство $\operatorname{tr} A = 0$. Следовательно, сумма всех собственных значений матрицы A равна нулю. Хотя бы одно из собственных значений лежит в правой полуплоскости. Действительно, в противном случае спектр матрицы A расположен на мнимой оси. Поскольку A – вещественная матрица, сумма всех ее собственных значений равна нулю и n нечетно, то нуль обязательно будет собственным значением. Однако

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00747 и INTAS.

это противоречит предположению о невырожденности матрицы A. Следовательно, по теореме Ляпунова $x = 0$ – неустойчивое равновесие системы (3).

Аналогично доказывается, что невырожденная периодическая траектория динамической системы с инвариантной мерой в четномерном пространстве всегда неустойчива. Напомним, что периодическая орбита называется *невырожденной*, если ее мультипликаторы отличны от единицы. Это наблюдение справедливо и для невырожденных приводимых инвариантных торов нечетной коразмерности, заполненных условно-периодическими траекториями.

2. Полуквазиоднородные системы. Это утверждение о неустойчивости можно распространить на системы с полуоднородной правой частью:

$$v = v_m + v_{m+1} + \cdots, \qquad \text{где} \qquad v_k(\lambda x) = \lambda^k v_k(x), \qquad m \geq 1.$$

Единственное дополнительное условие состоит в том, что $x = 0$ – единственное равновесие однородного поля v_m.

Мы рассмотрим даже более общий случай полуквазиоднородного векторного поля. Напомним, что поле $v(x)$ называется *квазиоднородным полем степени m с показателями квазиоднородности* $g_1, \ldots, g_n > 0$, если

$$v_i(\lambda^{g_1} x_1, \ldots, \lambda^{g_n} x_n) = \lambda^{g_i+m-1} v_i(x_1, \ldots, x_n),$$

где v_i – i-я компонента поля v. Гладкое поле v называется *полуквазиоднородным*, если его можно представить в виде формального ряда

$$v_m + \sum_{\alpha > m} v_\alpha, \tag{4}$$

где v_k – квазиоднородные поля степени k с одними и теми же показателями квазиоднородности. Для однородных полей можно положить $g_1 = \cdots = g_m = 1$.

Поле v_m называется *квазиоднородным укорочением* исходного поля v. Отметим, что для одной и той же системы можно по-разному выбирать квазиоднородные укорочения. Поясним это на примере системы на плоскости

$$\dot{x}_1 = x_2^2, \qquad \dot{x}_2 = x_1^3. \tag{5}$$

Если принять $g_1 = g_2 = 1$, то квазиоднородным укорочением будет система $\dot{x}_1 = x_2^2$, $\dot{x}_2 = 0$. Если $g_1 = 3/5$, $g_2 = 4/5$, то квазиоднородное укорочение совпадает с исходной системой (5). В первом случае начало координат $x_1 = x_2 = 0$ – неизолированное положение равновесия, а во втором случае оно изолировано. Алгоритмы выделения квазиоднородных укорочений обсуждаются в [1].

Теорема 1. *Предположим, что поле v можно представить в виде* (4), *причем $x = 0$ – изолированный нуль поля v_m. Если n нечетно и система допускает инвариантную меру, то равновесие $x = 0$ неустойчиво.*

Доказательство. Поскольку n нечетно и $x = 0$ – единственный нуль квазиоднородного поля v_m, то (как показано в [2]) найдется ненулевой вектор z, удовлетворяющий одному из уравнений

$$v_m(z) = -Gz \quad \text{или} \quad v_m(z) = Gz,$$

где $G = \operatorname{diag}(g_1, \dots, g_n)$ – диагональная матрица. Как установлено в [2], в этом случае уравнения (1) допускают решения с асимптотикой

$$zt^{-G} \quad \text{или} \quad zt^{-G}$$

соответственно при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$. Эти решения стремятся к равновесию $x = 0$ при $t \to \pm\infty$. Если имеется решение второго вида ("выходящее из точки $x = 0$"), то, очевидно, равновесие $x = 0$ неустойчиво. Осталось рассмотреть случай, когда имеется решение, асимптотическое к равновесию $x = 0$ при $t \to +\infty$.

Воспользуемся утверждением, представляющим самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Предположим, что система* (1) *с инвариантной мерой допускает нетривиальное решение $t \mapsto x(t)$, которое стремится к нулю при $t \to +\infty$. Тогда равновесие $x = 0$ неустойчиво.*

Действительно, пусть точка $x_0 = x(0)$ лежит вне некоторой ε_0-окрестности нуля. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется малая окрестность U точки x_0, которая под действием фазового потока через некоторое время целиком окажется в ε-окрестности точки $x = 0$. Так как фазовый поток сохраняет меру, по теореме Шварцшильда–Литтлвуда [3] почти все траектории с начальными условиями из U_ε покинут ε_0-окрестность точки $x = 0$. Это доказывает неустойчивость равновесия $x = 0$, поскольку выходящие траектории пересекаются с ε-окрестностью нуля.

3. Контрпример для гладкого случая. Покажем теперь, что гипотеза Тена не справедлива в гладком случае без каких-либо дополнительных предположений о невырожденности.

Во-первых, отметим, что достаточно иметь пример в $\mathbb{R}^3$, так как, имея пример в $\mathbb{R}^{2n+1}$, с помощью прямого произведения на систему

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

получаем пример в $\mathbb{R}^{2n+3}$.

Согласно построению окажется, что в достаточно малой окрестности равновесия нет периодических решений с периодами, меньшими любой наперед заданной постоянной. Отсюда следует, что, добавляя уравнение $\dot{\psi} = 1$, $\psi \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$, получаем пример устойчивого изолированного периодического решения для бездивергентного векторного поля в четномерном пространстве.

Сначала опишем основную идею. Мы построим последовательность $\mathbb{R}^3 \supset S_0 \supset S_1 \supset \cdots$ вложенных замкнутых полноторий, диаметр которых как множеств в $\mathbb{R}^3$ стремится к нулю. Векторное поле v определено на S_0 и имеет единственную особую точку $O = \bigcap_{n=0}^\infty S_n$. Так как границы полноторий $\sigma_k = \partial S_k$ будут инвариантными относительно v, особая точка O устойчива по Ляпунову.

Излагаемая конструкция индуктивна. Поэтому достаточно определить векторное поле v_0 – ограничение v на область $S_0 \setminus S_1$. С помощью диффеоморфизма F отобразим эту область в пространство $\mathbb{R}^3/G$, где G – группа параллельных переносов $(r,\varphi,h)\mapsto(r,\varphi,h+2\pi k)$, $k\in\mathbb{Z}$. Здесь (r,φ,h) – цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^3$. Пространство $\mathbb{R}^3/G$ диффеоморфно прямому произведению двумерной плоскости на окружность. Ниже удобно представлять себе $\mathbb{R}^3/G$ как полосу $\{(r,\varphi,h):-\pi\le h\le\pi\}$, в которой нижняя и верхняя плоскости отождествлены. Тор $M=F(\sigma_0)$ имеет вид $M=\{(r,\varphi,h):r=a\}$. Будем считать, что

$$F(\sigma_1)=N=\{(r,\varphi,h):(r-a/2)^2+h^2=a^2/16\}.$$

Область $D=F(S_0\setminus S_1)$ заключена между торами M и N (см. рис. 1).

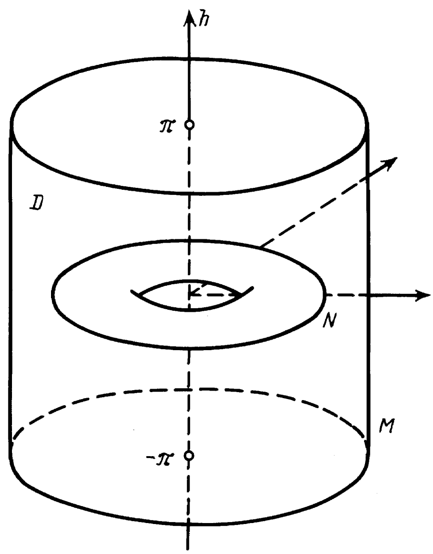

Рис. 1. Область D

Поверхности M и N инвариантны относительно вращений вокруг оси h. Векторное поле $u=F_*(v_0)$ также будет инвариантным относительно вращений. Мы положим $u=u'+u''$, где $u'=\partial/\partial\varphi$, а u'' касается торов M,N "вертикальных цилиндров" $\{(r,\varphi,h):\varphi=\mathrm{const}\}$. Потребуем, чтобы u'' имело положительную проекцию на ось h в точках окружности $\{(r,\varphi,h):r=0\}$. Тогда векторное поле u не имеет особых точек на D. Поле u'' можно сделать бездивиргентным.

Векторные поля $v_k=v|_{S_k\setminus S_{k+1}}$, $k>0$, строятся аналогично. Остается гладко склеить поля v_k и v_{k+1}, а также позаботиться о том, чтобы $|v_k|$ достаточно быстро стремились к нулю при $k\to\infty$.

Теперь перейдем к аккуратному построению. Чтобы добиться гладкости, конструкцию придется несколько усложнить. А именно, последовательность полноторий будет иметь вид

$$\mathbb{R}^3\supset S_0\supset T_1\supset S_1\supset T_2\supset\cdots.$$

Все торы $\sigma_k = \partial S_k$, $\tau_k = \partial T_k$ будут инвариантными. Описанная выше последовательность векторных полей v_k определена на последовательности областей $S_k \setminus T_{k+1}$, а в областях $T_{k+1} \setminus S_{k+1}$, диффеоморфных прямому произведению двумерного тора на полуинтервал, производится гладкий переход от v_k к v_{k+1}.

Опишем подробнее основной элемент конструкции – векторное поле v_k. Сначала построим его прообраз – векторное поле $u = u' + u''$ в области D. Поле u' уже построено. Оно сохраняет стандартный объем на $\mathbb{R}^3/G$. Поле u'' достачно построить на цилиндре

$$Z = \{(r, \varphi, h) : \varphi = 0, 0 < r < 2a\}.$$

В определении цилиндра Z мы пишем $r < 2a$ вместо $r < a$, так как далее удобно предполагать, что u гладко продолжается в окрестность замыкания $\overline{D}$ области D. Стандартная форма объема на $\mathbb{R}^3$ имеет вид $r\,dr \wedge d\varphi \wedge dh$. Поэтому условие сохранения объема полем u'' переходит в условие сохранения формы площади $r\,dr \wedge dh$ на Z.

Рассмотрим гладкую функцию $H\colon Z \to \mathbb{R}$ такую, что

i) $H = r^2$ в окрестности окружности $\{r = 0\}$,

ii) $H = r^2 + \mathrm{const}$ в окрестности окружности $\{(r, \varphi, h) : \varphi = 0, r = a\}$,

iii) функция H постоянна на окружности

$$\Lambda = \{(r, \varphi, h) : \varphi = 0, (r - a/2)^2 + h^2 = a^2/16\}.$$

Возьмем в качестве $u''|_Z$ гамильтоново векторное поле с гамильтонианом H в симплектической структуре $r\,dr \wedge dh$. Очевидно, $u''|_Z$ сохраняет форму $r\,dr \wedge dh$, при малых r и при r близких к a имеем $u''|_Z = 2\partial/\partial h$; кроме того, $u''|_Z$ касается окружностей $\{r = a\}$ и Λ. Итак, векторное поле u на области D (и даже на окрестности ее замыкания) построено. Оно сохраняет объем и не имеет особых точек. Действительно, вне окружности $\{r = 0\}$ проекция u на плоскость $\{h = 0\}$ отлична от нуля, а на окружности $\{r = 0\}$ имеем: $u = u'' = 2\partial/\partial h$.

Далее величину a в определении области D будем считать малой.

Рассмотрим отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^3$, задаваемое формулами $f(r, \varphi, h) = (x, y, z)$, где

$$\begin{aligned} x &= (1 + \rho\cos\varphi)\cos h, \\ y &= (1 + \rho\cos\varphi)\sin h, \\ z &= \rho\sin\varphi. \end{aligned}$$

Здесь $\rho = \rho(r, \varphi)$ – наименьший неотрицательный корень уравнения

$$\rho^2 + \frac{2}{3}\rho^3\cos\varphi = r^2.$$

Так как r принимает значения на отрезке $[0, a]$ (или при необходимости продолжения отображения f на большую область – на отрезке $[0, a]$), где $a > 0$ мало, функция $\rho(r, \varphi)$ гладкая.

В результате прямых вычислений получаем:

$$dx \wedge dy \wedge dz = (\rho + \rho^2\cos\varphi)\,d\rho \wedge d\varphi \wedge dh = r\,dr \wedge d\varphi \wedge dh,$$

т.е. отображение f сохраняет объем. Следовательно, векторное поле $v_0 = f_* u$ сохраняет стандартный объем на области $f(D)$.

Положим $\sigma_0 = f(M)$, $\tau_1 = f(N)$. Из условия малости a следует, что тор σ_0 близок к окружности

$$\lambda_0 = \{(x, y, z) : x = \cos h, y = \sin h, z = 0\}.$$

С другой стороны, если величина a мала, то окружность

$$\lambda_1 = \left\{(x, y, z) : x = 1 + \frac{a}{2}\cos\varphi,\ y = 0,\ z = \frac{a}{2}\sin\varphi\right\}$$

лежит внутри тора τ_1. Следовательно, внутри τ_1 лежит некоторый тор, подобный тору σ_0 и близкий к окружности λ_1.

Замкнутые полнотория с границами σ_0, τ_1, σ_1 обозначим S_0, T_1, S_1 соответственно. Очевидно, $S_1 \subset T_1 \subset S_0$. Область $T_1 \setminus S_1$ диффеоморфна двумерному тору, умноженному на полуинтервал.

Пусть $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – преобразование подобия, переводящее σ_0 в σ_1. Положим

$$\begin{aligned} &\tau_2 = g(\tau_1), \quad &\sigma_2 = g(\sigma_1), \quad &\tau_3 = g(\tau_2), \quad \ldots, \\ &T_2 = g(T_1), \quad &S_2 = g(S_1), \quad &T_3 = g(T_2), \quad \ldots . \end{aligned}$$

Векторные поля $v_k = v|_{S_k \setminus T_{k+1}}$ возьмем следующими:

$$v_k = \vartheta_k \Big(\underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{k \text{ раз}} \circ f\Big)_* u, \qquad 0 < \vartheta_k \in \mathbb{R}.$$

Итак, поле v определено в объединении областей $(S_0 \setminus T_1) \cup (S_1 \setminus T_2) \cup \cdots$.

Достроить v до гладкого поля в области S_0 не представляет труда. Действительно, окрестность области $T_k \setminus S_k$ некоторым диффеоморфизмом Q_k переводится в область

$$\{(\mu, \alpha, \beta) : -\varepsilon < \mu < 1 + \varepsilon, \alpha \bmod 2\pi, \beta \bmod 2\pi\}, \qquad 0 < \varepsilon < \frac{1}{3},$$

причем

$$Q_k(\tau_k) = \{(\mu, \alpha, \beta) : \mu = 0\}, \qquad Q_k(\sigma_k) = \{(\mu, \alpha, \beta) : \mu = 1\}.$$

Более того, можно считать, что ограничение поля $(Q_k)_* v$ на торы $Q_k(\tau_k)$ и $Q_k(\sigma_k)$ имеет положительную координату при $\partial/\partial\alpha$ в базисе $\partial/\partial\mu$, $\partial/\partial\alpha$, $\partial/\partial\beta$. Существование гладкого векторного поля, совпадающего с $(Q_k)_* v$ в областях $\{(\mu, \alpha, \beta) : -\varepsilon < \mu < 0\}$ и $\{(\mu, \alpha, \beta) : 1 < \mu < 1 + \varepsilon\}$, вытекает из возможности гладкого продолжения $(Q_k)_* v$ на области $\{(\mu, \alpha, \beta) : \varepsilon < \mu < \varepsilon\}$ и $\{(\mu, \alpha, \beta) : 1 - \varepsilon < \mu < 1 + \varepsilon\}$.

Гладкость в положении равновесия O достигается достаточно быстрым стремлением последовательности ϑ_k к нулю. При этом производные всех порядков поля v в точке O будут нулевыми. Одновременно получаем отсутствие в окрестности точки O периодических решений малых (например, не превосходящих 2π) периодов.

Не исключено, что обсуждаемая гипотеза справедлива в аналитическом случае.

4. Потенциальные поля. Имея в виду приложения к гидродинамике, рассмотрим потенциальное векторное поле (1): $v = \partial\varphi/\partial x$.

Теорема 2. *Пусть φ – непостоянная аналитическая функция. Тогда все равновесия системы* (1) *неустойчивы.*

Подчеркнем, что в этом утверждении нет предположения о нечетности размерности n.

Доказательство. Пусть $x = 0$ – критическая точка функции φ и $\varphi(0) = 0$. Разложим потенциал в ряд Маклорена по однородным формам:

$$\varphi = \varphi_m + \varphi_{m+1} + \cdots .$$

Поскольку $\varphi \not\equiv \mathrm{const}$, то $\varphi_m \not\equiv 0$ при некотором $m \geq 2$. Разложим плотность инвариантной меры в ряд Маклорена: $\rho = \rho_0 + \cdots$, $\rho_0 = \mathrm{const} > 0$. Из уравнения (2) вытекает, что φ_m – гармоническая функция. Ввиду теоремы о среднем она принимает значения разных знаков на единичной сфере $S^{n-1} = \{x : \|x\| = 1\}$. Пусть z – точка максимума функции φ_m на S^{n-1}; очевидно, $\varphi_m(z) > 0$. Согласно правилу множителей Лагранжа в точке $x = z$

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} = \mu x.$$

По формуле Эйлера для однородных функций

$$m\varphi_m = \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}, x\right) = \mu(x, x) = \mu.$$

Следовательно, $\mu > 0$. Итак, алгебраическое уравнение $v_{m-1}(x) = \mu x$ ($v_{m-1}(x) = \partial\varphi_m/\partial x$) имеет нетривиальное решение с $\mu > 0$. Следовательно, согласно [2] исходная система (1) допускает асимптотическое решение, "выходящее" из положения равновесия $x = 0$. Теорема доказана.

Авторы дружески благодарят В. В. Тена за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Брюно А. Д. Степенные асимптотики решений нелинейных систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. №2. С. 329–364.

[2] Козлов В. В., Фурта С. Д. Первый метод Ляпунова для сильно нелинейных систем // ПММ. 1996. Т. 60. №1. С. 10–22.

[3] Зигель К. Л. Лекции по небесной механике. М.: ИЛ, 1959.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
21.05.98