ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1999, том 367, № 2, с. 191–193

МЕХАНИКА

УДК 531.01+517.9

О ХАОТИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ

© 1999 г. Н. В. Денисова, член-корреспондент РАН В. В. Козлов

Поступило 15.03.99 г.

1. Уравнения движения. Конфигурационное пространство системы двух связанных математических маятников – двумерный тор; обобщенные координаты x_1, x_2 – углы отклонений маятников от вертикали. Кинетическая энергия – плоская метрика на конфигурационном торе:

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2}{m_1 l_1^2} + \frac{y_2^2}{m_2 l_2^2}\right).$$

Здесь y_1, y_2 – канонические импульсы, m_1, m_2 – массы точек, l_1, l_2 – длины стержней. Потенциальная энергия V складывается из энергии силы тяжести

$$-\sum_{k=1}^{2} m_k g l_k \cos x_k$$

(g – ускорение свободного падения) и энергии растянутой пружины f.

Если точки подвеса маятников не совпадают, то ряд Фурье потенциальной энергии содержит практически все гармоники. Поэтому, согласно классическим результатам Пуанкаре [1, 2], при достаточно больших значениях полной энергии $h = T + V$ эта система будет демонстрировать хаотическое поведение.

Мы рассмотрим более сложный случай, когда точки подвеса маятников совпадают. Тогда потенциальная энергия взаимодействия f будет зависеть от разности фаз $x_1 - x_2$.

Задача о движении системы при больших значениях h эквивалентна изучению дифференциальных уравнений Гамильтона

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \qquad (1.1)$$

с гамильтонианом $H = T + \varepsilon V$, где ε – малый параметр [2].

2. Упругое взаимодействие. В случае упругой пружины потенциальная энергия V будет тригонометрическим многочленом. Ее спектр (номера ненулевых гармоник) изображен на рис. 1.

Теория возмущений систем такого вида исследована в [3]. Пусть

$$\alpha = (0, 1), \quad \beta = (-1, 1)$$

суть две примыкающие вершины выпуклой оболочки спектра, не ортогональные друг другу во внутренней метрике $\langle\cdot, \cdot\rangle$, определяемой кинетической энергией T. Как показано в [3], инвариантные торы невозмущенной задачи (когда $\varepsilon = 0$), заданные уравнениями

$$\langle y, k\alpha + \beta\rangle = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (2.1)$$

разрушаются при добавлении возмущения. Эти торы резонансные. При их разрушении рождаются пары изолированных долгопериодических решений [2]. При $k \to \infty$ они накапливаются у резонансного тора $y_2 = 0$: второй маятник покоится, а первый совершает равномерное вращение. Мы получим еще одно семейство разрушающихся резонансных торов, если поменяем местами первый и второй маятники.

Поменяем еще местами примыкающие вершины α и β. Тогда уравнение (2.1) примет вид $\langle y, k\beta + \alpha\rangle = 0$. При $k \to \infty$ эти резонансные торы

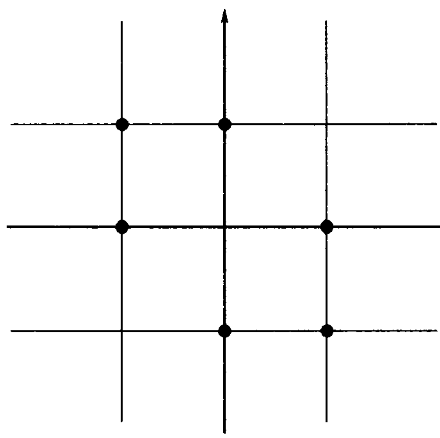

Рис. 1.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

накапливаются у торов, которые заданы резонансным соотношением

$$\omega_1 = \omega_2, \quad \omega_k = \frac{\partial T}{\partial y_k}.$$

Этому тору отвечает семейство равномерных вращений маятников с одинаковой фазой.

3. Неупругое взаимодействие. Для нас наибольший интерес представляет случай, когда ряд Фурье энергии взаимодействия f содержит бесконечное число гармоник.

Рассмотрим более общую систему (1.1), у которой

$$T = \frac{1}{2}\sum a_{ij}y_iy_j, \quad a_{ij} = \text{const},$$

а бесконечная часть спектра потенциальной энергии V лежит на вертикальной прямой. Рассматриваемая нами задача о связанных маятниках приводится к этой задаче поворотом в плоскости x_1, x_2 на угол $\pi/4$.

Как показано в [2], наличие у системы (1.1) первого аналитического интеграла в виде ряда по ε, независимого от интеграла $T + \varepsilon V$, эквивалентно наличию дополнительного интеграла в виде полинома по импульсам с периодическими по x_1, x_2 коэффициентами.

Основной результат составляет

Теорема. *Система* (1.1) *допускает дополнительный полиномиальный интеграл тогда и только тогда, когда остальные точки спектра лежат на горизонтальной прямой, проходящей через начало координат.*

Следствие. *Если система* (1.1) *допускает новый полиномиальный интеграл, то обязательно найдется независимый полиномиальный интеграл степени* ≤ 2.

Доказательство теоремы использует результаты работ [2, 3].

Ключевую роль здесь играют множества Пуанкаре [2]. Напомним их определение.

Пусть

$$V = \sum v_\tau e^{i(\tau, x)}, \quad \tau \in \mathbb{Z}^2.$$

Множество Пуанкаре первого порядка $\mathbb{P}^1$ – это множество импульсов $y \in \mathbb{R}^2$, таких, что

$$\langle y, \tau\rangle = 0, \quad v_\tau \neq 0, \quad \tau \neq 0.$$

Множество Пуанкаре второго порядка $\mathbb{P}^2$ определяется как множество импульсов $y \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{P}^1$, удовлетворяющих условиям

$$\langle y, \tau\rangle = 0, \quad v'_\tau \neq 0, \quad \tau \neq 0,$$

где

$$v'_\tau = \sum_{p+q=\tau} \frac{\langle p, q\rangle v_p v_q}{\langle y, p\rangle\langle y, q\rangle}. \tag{3.1}$$

В условиях теоремы $\mathbb{P}^1$ состоит из конечного числа прямых, проходящих через начало координат. Если число прямых, составляющих $\mathbb{P}^2$, бесконечно, то возмущенная система неинтегрируема [2].

Пусть α – максимальный элемент спектра V относительно стандартного лексикографического порядка. Пусть β – максимальный элемент из V, линейно независимый от α. Вектор β может не существовать. Но тогда конечная часть спектра V лежит на одной прямой, проходящей через начало координат. Справедливость теоремы в этом случае установлена ранее в [2].

Итак, пусть β существует. Используя метод работы [3], нетрудно показать, что тогда векторы α и β удовлетворяют соотношению

$$m\langle\alpha, \alpha\rangle + 2\langle\alpha, \beta\rangle = 0 \tag{3.2}$$

для некоторого целого $m \geq 0$. Следовательно, $\langle\alpha, \beta\rangle \leq 0$ и поэтому угол между векторами α и β не меньше $\pi/2$.

Пусть Γ – вертикальная прямая в правой полуплоскости, содержащая точки спектра и наиболее удаленная от начала координат. Пусть точки спектра на Γ имеют радиус-векторы $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, $s \geq 1$. Расположим их в порядке лексикографического убывания, так что $\alpha_1 = \alpha$. Покажем, что $s \leq 2$.

Пусть $s \geq 3$. Тогда $\alpha_2 = \beta$. После подстановки $x_2 \to -x_2$ наибольшим элементом спектра V будет α_s. Примыкающий вектор α_{s-1} не меньше α_2 (поскольку $s \geq 3$ по предположению). Углы между векторами α_1 и α_2 и между α_s и α_{s-1} не меньше $\pi/2$. Но это может быть лишь при $s \leq 2$.

Покажем, что на самом деле $s = 1$ и соответствующий вектор α горизонтальный. Предположим противное: пусть это будут векторы α и β. Достаточно большие по длине векторы с концами на Γ только двумя способами можно представить в виде суммы пары векторов из спектра V:

$$\tau = \alpha + \gamma_u = \beta + \gamma_v, \tag{3.3}$$

где γ_u, γ_v – вертикальные векторы. Можно считать, что $u = |\gamma_u|$, $v = |\gamma_v|$. Если существует лишь конечное число чисел v'_τ вида (3.1), отличных от нуля, то начиная с некоторого номера будут выполнены соотношения

$$au_p + bu_q = 0,$$

где

$$u_p = \frac{v_{\gamma_p}}{p}, \quad u_q = \frac{v_{\gamma_q}}{q},$$

a и b – некоторые комплексные числа, не равные нулю.

Пусть, например, $p > q$. Тогда

$$u_p = -\frac{b}{a}u_q. \tag{3.4}$$

Если $|b/a| \geq 1$, то либо $|u_n| \to \infty$ при $n \to +\infty$, либо $u_n = 0$ при $n \geq n_0$. Во втором случае V – тригонометрический многочлен, что противоречит нашим предположениям.

Итак, $|b/a| < 1$. Однако равенство (3.4) справедливо и при больших отрицательных p, q. В этом случае его (3.4) следует переписать в виде

$$u_q = -\frac{a}{b}u_p.$$

Поскольку $|a/b| > 1$, то $|u_n| \to \infty$ при $n \to -\infty$. Получили противоречие.

Итак, $s = 1$. В этом случае представление вектора τ в виде (3.3) однозначно. Но тогда в равенстве (3.1) сумма состоит из одного слагаемого, пропорционального $\langle\alpha, \gamma_u\rangle$. Если это скалярное произведение отлично от нуля, то множество Пуанкаре $\mathbb{P}^2$ состоит из бесконечного числа различных прямых, что влечет неинтегрируемое поведение гамильтоновой системы (1.1). Следовательно, вектор α горизонтальный.

Осталось показать, что остальные невертикальные векторы спектра V коллинеарны α. Действительно, пусть β – максимальный из неколлинеарных α векторов. Поскольку спектр V инвариантен при отражении относительно начала координат, то β лежит в правой полуплоскости. Согласно [3], векторы α и β удовлетворяют (3.2). Следовательно, угол между α и β не меньше $\pi/2$ и поэтому вектор β будет вертикальным.

4. Замечания.

1) Рассмотрим маятники одинаковой длины (симпатические маятники), которые могут сталкиваться по закону упругого удара. В этом случае потенциальная энергия взаимодействия представляется функцией Дирака $\delta(x_1 - x_2)$. Такую систему можно назвать симпатическим биллиардом. Рассуждения п. 3 можно формально применить к этой задаче и утверждать отсутствие дополнительного однозначного интеграла. Было бы желательным найти строгое доказательство хаотичности симпатического биллиарда.

2) Результаты этой заметки можно распространить на систему $n \geq 3$ маятников, последовательно связанных друг с другом. Оказывается, если имеется хотя бы одна пара связанных маятников, то эта система с n степенями свободы не допускает n независимых полиномиальных по импульсам интегралов с периодическими коэффициентами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99–01–01096), гранта Intas 93–0570-ext, а также программы “Университеты России” (проект 5581).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. В кн.: Избранные труды. Т. 1. М.: Наука, 1971. 771 с.
2. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск, 1995. 432 с.
3. *Козлов В.В., Трещёв Д.В.* // Мат. сб. 1988. Т. 135(177). С. 119–138.