ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1999, том 366, № 1, с. 30–31

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 532+517.9

НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ С ПОТЕНЦИАЛОМ ДАЙСОНА

© 1999 г. А. В. Борисов, член-корреспондент РАН В. В. Козлов

Поступило 21.10.98 г.

1. Динамика системы n взаимодействующих частиц равной массы описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum y_i^2 + \sum_{i<j} V(x_i - x_j). \qquad (1)$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – импульсы частиц, V – потенциальная энергия взаимодействия. Мы будем, следуя Дайсону [1], рассматривать случай, когда

$$V(z) = \ln|\sin z|. \qquad (2)$$

Системы с таким потенциалом изучались в работе [1] в связи с анализом статистических свойств уровней энергии одномерного классического кулоновского газа. Аналогично ситуации, отмеченной Калоджеро для системы точечных вихрей на плоскости [2], положения равновесия системы (1), (2) определяют стационарные коллинеарные конфигурации на сфере (точечные вихри располагаются в экваториальной плоскости, равномерно вращающейся вокруг некоторой оси, также лежащей в этой плоскости).

Поскольку функция V 2π-периодична (она даже π-периодическая), то можно считать, что частицы движутся по окружности. Система с гамильтонианом (1) всегда допускает два интеграла

$$H, \quad F = \sum y_i.$$

Отысканию условий на потенциал V, при котором рассматриваемая система вполне интегрируема (допускает набор из n независимых интегралов, полиномиальных по импульсам $y_1, y_2, \ldots, y_n$), посвящено большое число работ (см. обзоры в [2, 7]). Если V – непостоянная аналитическая периодическая функция без сингулярностей, то при $n \geq 3$ система с гамильтонианом (1) не может быть вполне интегрируемой [3, 4]. Потенциал Дайсона (2) имеет вещественную логарифмическую особенность. Задача об интегрируемости этой системы обсуждалась в работе [5].

Как отметил Дайсон, система с потенциалом (2) допускает семейство равновесий

$$x_j^0 = x_0 + \frac{\pi j}{n}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Частоты малых колебаний, вычисленные в [6],

$$\omega_s^2 = 2s(n-s), \quad s = 1, 2, \ldots, n. \qquad (4)$$

Равенство $\omega_n = 0$ связано с неизолированностью равновесий (3).

2. Рассмотрим простейший нетривиальный случай, когда $n = 3$. С помощью интеграла момента F можно понизить число степеней свободы на единицу. Для этого перейдем к неинерциальной барицентрической системе отсчета с помощью канонического преобразования $x, y \to q, p$:

$$y_1 = p_1 + p_3, \; y_2 = -p_1 + p_2 + p_3, \; y_3 = -p_2 + p_3,$$

$$q_1 = x_1 - x_2, \; q_2 = x_2 - x_3, \; q_3 = x_1 + x_2 + x_3.$$

С учетом равенства $p_3 = 0$ и четности потенциала гамильтониан редуцированной системы имеет вид

$$H = p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2 + V(q_1) + V(q_2) + V(q_1 + q_2). \qquad (5)$$

Эта система имеет устойчивое равновесие $q_1 = q_2 = \frac{\pi}{3}$ с равными частотами малых колебаний $\omega_1 = \omega_2 = 2$ (согласно (4)). Вычитая из потенциала $\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$, можно считать, что в состоянии равновесия полная энергия равна нулю.

Естественно ожидать, что при малых положительных значениях полной энергии h система с потенциалом (2) будет демонстрировать интегрируемое поведение. Ситуация здесь точно такая же, как и в известной системе Хенона–Хейлеса ([6], см. также [7]). Применяя метод нормальных форм с учетом резонанса $\omega_1 = \omega_2$, можно найти квазиинтеграл, который очень медленно меняется со временем в окрестности положения равновесия (для системы Хенона–Хейлеса такую функцию вычислил Густавсон [8]).

3. Численные расчеты подтверждают это предположение. На рис. 1а показано почти интегрируемое поведение системы при $H = 10$. Для больших H система хаотизируется в окрестности сепаратрис. При этом формальные ряды, определяющие квазиинтеграл, расходятся, и для больших H он не аппроксимирует поведение системы. Рисунки 1б, 1в соответствуют значениям энергии

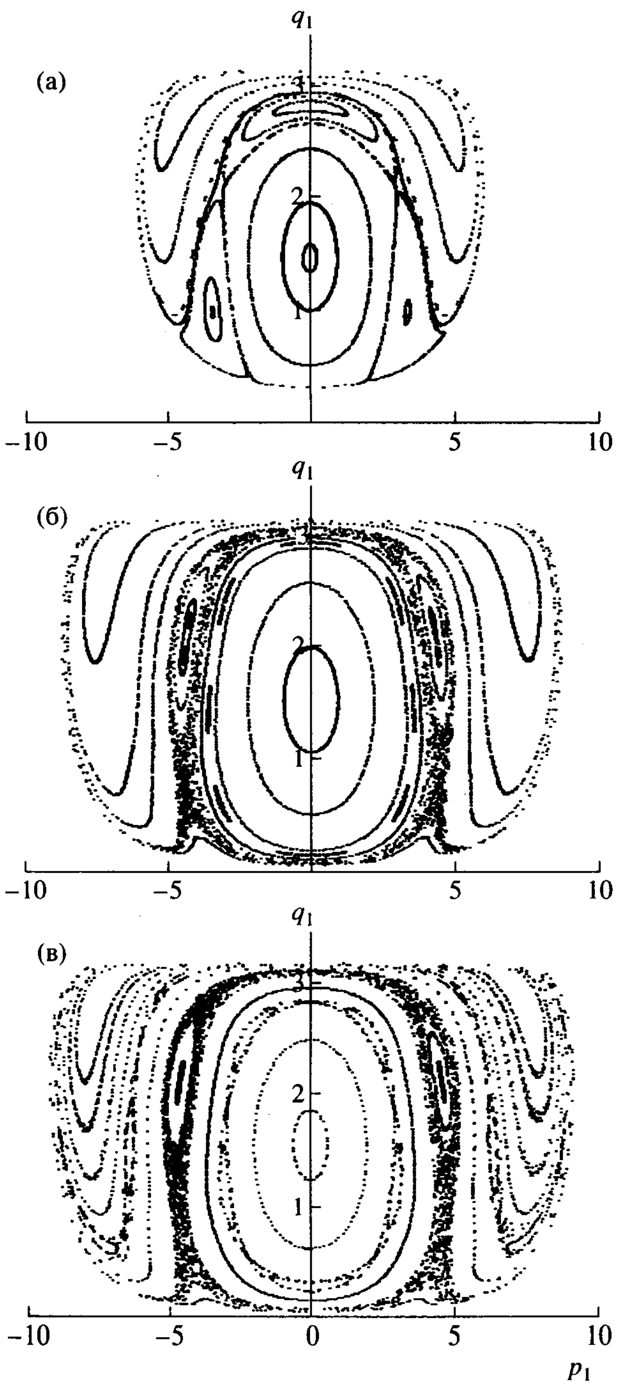

Рис. 1. Сечение Пуанкаре для энергии $H = 10$ (а), 20 (б), 22 (в).

$H = 20$ и $H = 22$, при которых начинается реальная стохастизация системы.

4. К задаче об интегрируемости системы взаимодействующих частиц с потенциалом Дайсона можно подойти с более простой точки зрения, считая канонические координаты x, y и время t комплексными переменными. Будем разыскивать первые интегралы в виде полиномов по импульсам с однозначными аналитическими коэффициентами (см. [3]). Ввиду логарифмической особенности потенциалов энергия H ветвится в комплексном фазовом пространстве, а функция F, конечно, будет однозначной.

Оказывается, интеграл момента F – единственный полиномиальный интеграл с однозначными коэффициентами в системе Дайсона. Это утверждение доказывается с помощью результатов работы [9].

Действительно, пусть $F_j = y_j$, $1 \le j \le n$, – полный набор независимых интегралов в задаче о движении частиц по окружности без взаимодействия. Вычислим производные этих функций в силу гамильтоновой системы с гамильтонианом (1), (2):

$$\dot{F}_j = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ctg}(x_j - x_k), \quad 1 \le j \le k. \tag{6}$$

Подставим теперь в правую часть этих равенств какое-нибудь решение "свободной" системы, например

$$x_1 = \frac{\pi}{n}, \ldots, x_{n-1} = \frac{(n-1)\pi}{n}, \quad x_n = t.$$

Тогда правые части (6) будут мероморфными функциями на плоскости комплексного времени, причем $n - 1$ точек $t = \frac{\pi}{n}, \ldots, t = \frac{(n-1)\pi}{n}$ будут простыми полюсами. Вычисляя вычеты в этих точках для функции $(\dot{F})_t$, нетрудно заметить, что они (как векторы $\mathbb{C}^n$) линейно-независимы. Следовательно, согласно [9], рассматриваемая система может иметь только один однозначный полиномиальный первый интеграл.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96–01–00747) и Федеральной целевой программы "Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки" (проект 294).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dyson F.J.* // J. Math. Phys. 1962. V. 3. № 1. P. 140–156; P. 157–165; P. 166–175.
2. *Calogero F.* In: Lect. NATO Advanced Study Institute on Nonlinear Equations in Physics and Mathematics. Istanbul, 1977. P. 3–53.
3. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1995. 430 с.
4. *Переломов А.М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990. 237 с.
5. *Calogero F., Perelomov A.M.* // Communs. Math. Phys. 1978. V. 59. P. 109–116.
6. *Hénon M., Heiles C.* // Astron. J. 1964. V. 69. P. 73–79.
7. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 168 с.
8. *Gustavson F.* // Astron. J. 1966. V. 71. P. 670–686.
9. *Козлов В.В.* // ПММ. 1998. Т. 62. № 1. С. 3–11.