УДК 531.01+532.5

© 1999 г. В.В. Козлов

УСЛОВИЕ ВМОРОЖЕННОСТИ ПОЛЯ НАПРАВЛЕНИЙ, МАЛЫЕ ЗНАМЕНАТЕЛИ И ХАОТИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Классическая теорема Гельмгольца утверждает, что вихревые линии вморожены в поток баротропной идеальной жидкости, находящейся в потенциальном силовом поле. Этот результат приводит к следующей общей задаче: найти условия, при которых заданная динамическая система допускает поля направлений, вмороженные в ее фазовый поток. По теореме о выпрямлении траекторий, локально всегда имеется целое семейство вмороженных полей направлений. Оказывается, задача о наличии нетривиальных вмороженных полей направлений, заданных во всем фазовом пространстве, тесно связана с известной проблемой малых знаменателей. Результаты общего характера применены к гамильтоновым системам, а также к стационарным течениям вязкой жидкости.

1. Условие вмороженности поля направлений. Пусть M – гладкое многообразие, $\mathbf{v}$ – векторное поле на M, порождающее динамическую систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in M \tag{1.1}$$

g^t – ее фазовый поток.

Пусть $\mathbf{a} \neq 0$ – еще одно гладкое векторное поле на M. Через каждую точку $\mathbf{x} \in M$ проходит единственная интегральная кривая поля $\mathbf{a}$ (в каждой своей точке $\mathbf{x}$ она касается вектора $\mathbf{a}(\mathbf{x})$). Будем говорить, что семейство интегральных кривых *вморожено* в поток системы (1.1), если оно переходит в себя при всех преобразованиях g^t.

Критерий вмороженности интегральных кривых поля $\mathbf{a}$ состоит в выполнении равенства

$$[\mathbf{a}, \mathbf{v}] = \lambda \mathbf{a} \tag{1.2}$$

где $[,]$ – коммутатор векторных полей, λ – некоторая гладкая функция на M. Чтобы доказать (1.2), воспользуемся теоремой о выпрямлении интегральных кривых поля $\mathbf{a}$: в некоторых локальных координатах $x_1, \ldots, x_n$ компоненты поля $\mathbf{a}$ имеют вид $1, 0, \ldots, 0$. Условие (1.2) эквивалентно серии равенств

$$\partial v_1 / \partial x_1 = \lambda, \quad \partial v_2 / \partial x_1 = \ldots = \partial v_n / \partial x_1 = 0 \tag{1.3}$$

где v_i – компоненты поля $\mathbf{v}$. Поскольку в этих координатах интегральные линии поля $\mathbf{a}$ задаются уравнениями $x_k = \mathrm{const}$, $k \geqslant 2$, а компоненты v_k, $k \geqslant 2$ не зависят от x_1, то это семейство линий переходит в себя при преобразованиях g^t и наоборот, если соотношения (1.3) нарушаются, то некоторые из компонент $v_2, \ldots, v_n$ поля $\mathbf{v}$ принимают различные значения при разных значениях координаты x_1 и поэтому фазовый поток g^t будет искривлять координатные линии $x_k = \mathrm{const}$, $k \geqslant 2$.

Условие (1.2) при $n = 3$ впервые получено Пуанкаре, Жоравским и Фридманом (см. [1, 2]) как обобщение теоремы Гельмгольца о вмороженности вихревых линий (интегральных кривых поля ротора) в поток идеальной баротропной жидкости.

находящейся в потенциальном силовом поле. В неавтономном случае интегральные кривые поля $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ рассматриваются при фиксированных значениях времени t, а условие (1.2) заменяется более общим

$$\partial \mathbf{a}/\partial t + [\mathbf{a}, \mathbf{v}] = \lambda \mathbf{a} \tag{1.4}$$

Очевидно, соотношение (1.2) не меняет своего вида при замене поля $\mathbf{a}$ на $\mu\mathbf{a}$, где μ – любая гладкая функция от $\mathbf{x}$. Следовательно, оно не зависит от величины векторов $\mathbf{a}(\mathbf{x})$. Таким образом, равенство (1.2) можно рассматривать как условие *вмороженности поля направлений* в фазовый поток поля $\mathbf{v}$.

Вывод условия (1.4) вмороженности интегральных кривых векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ можно найти также в классическом учебнике [3].

Если $\lambda = 0$, то поле $\mathbf{a}$ будет полем симметрий для системы (1.1). В общем случае соотношению (1.2) можно дать следующую групповую интерпретацию: фазовый поток динамической системы (1.1) переводит фазовые траектории (но не решения) динамической системы:

$$d\mathbf{x}/d\alpha = \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

в траектории той же системы [4]. Отметим, что в отличие от задачи о полях симметрий, отыскание вмороженных полей направлений является нелинейной задачей: кроме поля $\mathbf{a}$ в (1.2) неизвестной величиной будет также множитель λ.

Задача о существовании вмороженных полей направлений для заданной системы дифференциальных уравнений в трехмерном пространстве, по-видимому, впервые была рассмотрена Фридманом ([2], § 10). Метод Фридмана фактически основан на разложении решений в ряды по степеням времени. Поэтому полученные в [2] результаты имеют локальный характер (как по пространственным переменным $\mathbf{x}$, так и по времени t). Более того, для автономных систем вида (1.1) локальные ряды Фридмана дают поля $\mathbf{a}$, явно зависящие от времени. Между тем с помощью теоремы о выпрямлении траекторий системы (1.1) можно получить семейства нетривиальных векторных полей $\mathbf{a}$, не зависящих от t и удовлетворяющих (1.2). Впрочем, эти локальные результаты имеют весьма малое значение для динамики. С современной точки зрения, восходящей к Пуанкаре [5], полезно рассматривать объекты (такие, как первые интегралы, поля симметрий и т.д.), однозначно определенные во всем фазовом пространстве M или его части, где траектории системы (1.1) обладают свойством возвращаемости.

2. Малые знаменатели. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots, \qquad \dot{y} = v_0 + \varepsilon v_1 + \ldots, \qquad \dot{z} = \varepsilon w_1 + \ldots \tag{2.1}$$

правые части которой – ряды по степеням ε, а коэффициенты – аналитические функции по x, y, z, 2π-периодически зависящие от x и y. Предполагается, что u_0 и v_0 – функции только от переменной z. Можно считать, что фазовое пространство M системы (2.1) – прямое произведение $\Delta \times \mathbb{T}^2$, где Δ – интервал изменения переменной z, а $\mathbb{T}^2 = \{x, y \bmod 2\pi\}$ – двумерный тор.

При $\varepsilon = 0$ имеем вполне интегрируемую систему. Координата z – первый интеграл, поверхности уровня которого – двумерные торы, которые несут на себе условно-периодические траектории с двумя частотами u_0 и v_0.

Системы вида (2.1) – один из ключевых объектов нелинейной теории колебаний [6]. В частности, к таким уравнениям сводятся (после изоэнергетической редукции) уравнения Гамильтона с двумя степенями свободы, которые являются возмущениями интегрируемых систем. Изучение систем такого типа Пуанкаре назвал основной проблемой динамики ([5], п. 13).

Рассмотрим задачу о существовании для системы (2.1) векторного поля

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \varepsilon \mathbf{a}_1 + \ldots \tag{2.2}$$

которое удовлетворяет условию (1.2), причем векторные поля $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$, ... однозначны и аналитичны на $\Delta \times \mathbb{T}^2$. При этом, конечно, функцию λ также следует искать в виде степенного ряда $\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \ldots$ с однозначными и аналитическими коэффициентами.

Предположим, что $v_0 \neq 0$. Невозмущенную систему назовем *невырожденной,* если отношение частот u_0/v_0 – непостоянная функция на Δ. Эквивалентное условие: $u'_0 v_0 - u_0 v'_0 \not\equiv 0$ (штрих-производная по z).

Разложим функцию w_1 в ряд Фурье:

$$w_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} W_{mn}(z)\exp[i(mx+ny)]$$

Введем в рассмотрение множество Пуанкаре $\mathbb{P}$ – это множество точек $z \in \Delta$, таких, что

1) $mu_0(z) + nv_0(z) = 0, \quad m^2 + n^2 \neq 0$
2) $W_{mn}(z) \neq 0$

Точки множества Пуанкаре отвечают резонансным торам невозмущенной задачи, которые разрушаются при добавлении возмущения. В типичной ситуации множество $\mathbb{P}$ всюду плотно заполняет интервал Δ и с этим обстоятельством связана проблема малых знаменателей, играющая важную роль при исследовании системы (2.1) [7].

Вмороженное поле направлений назовем *тривиальным,* если $\mathbf{a} = \mu\mathbf{v}$. В этом случае вмороженными оказываются фазовые траектории системы (1.1). В рассматриваемой задаче поля $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$ зависят от параметра ε; будем считать, что условие нетривиальности поля направлений выполнено при $\varepsilon = 0$: $\mathbf{a}_0 \neq \mu\mathbf{v}_0$. В соответствии со сказанным в разд. 1, будем также предполагать, что $\mathbf{a}_0 \neq 0$. В противном случае некоторые из интегральных кривых поля $\mathbf{a}_0$ теряют свойство регулярности и вырождаются в точки.

Основной результат работы составляет

Теорема 1. Предположим, что невозмущенная система невырождена, а множество Пуанкаре имеет хотя бы одну предельную точку внутри Δ. Тогда уравнения (2.1) не допускают нетривиальных вмороженных полей направлений, аналитических по ε.

Ранее было доказано [8], что в предположениях теоремы 1 система (2.1) не допускает непостоянных интегралов и нетривиальных полей симметрий в виде рядов по ε с аналитическими коэффициентами. Если дополнительно потребовать, чтобы $W_{00}(z) \not\equiv 0$, то система (2.1) не допускает нетривиальных линейных интегральных инвариантов $\oint \varphi_\varepsilon$, где 1-форма φ_ε аналитична по ε и $d\varphi_\varepsilon \neq 0$ [9]. Коэффициент W_{00}, очевидно, равен среднему значению функции w_1 по двумерному тору $\mathbb{T}^2$. Было показано [10], что условие $W_{00} \not\equiv 0$ существенно: для гамильтоновых систем оно не выполняется и такие системы допускают нетривиальный интегральный инвариант Пуанкаре – Картана. Результат о несуществовании интегральных инвариантов системы (2.1) можно трактовать как отсутствие аналога теоремы Томсона о сохранении циркуляции идеальной жидкости по вмороженному в поток замкнутому контуру.

Докажем теперь теорему 1. Согласно (2.1) поле $\mathbf{v}$ разлагается в ряд $\mathbf{v}_0 + \varepsilon\mathbf{v}_1 + \ldots$, причем компоненты поля $\mathbf{v}_0$ равны u_0, v_0, 0. Пусть поле $\mathbf{a}$ имеет вид (2.2); компоненты поля $\mathbf{a}_0$ обозначим a_0, b_0, c_0. При $\varepsilon = 0$ из (1.2) получим три уравнения

$$\begin{aligned} &c_0\partial u_0/\partial z - u_0\partial a_0/\partial x - v_0\,\partial a_0/\partial y = \lambda_0 a_0 \\ &c_0\partial v_0/\partial z - u_0\partial b_0/\partial x - v_0\,\partial b_0/\partial y = \lambda_0 b_0 \\ &-u_0\partial c_0/\partial x - v_0\partial c_0/\partial y = \lambda_0 c_0 \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Зафиксируем значение $z = z_0 \in \Delta$. Последнее уравнение системы (2.3) можно переписать в виде

$$\dot{c}_0 = -\lambda_0 c_0 \tag{2.4}$$

где точка означает полную производную функции $c_0 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ в силу системы на торе

$$\dot{x} = u_0(z_0), \quad \dot{y} = v_0(z_0) \tag{2.5}$$

Предположим, что тор $z = z_0$ нерезонансный. Если функция c_0 обращается в нуль в некоторой точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2$, то (ввиду линейности уравнения (2.4)) она равна нулю на всей траектории системы (2.5), проходящей через точку $x = x_0$, $y = y_0$. Согласно предположению, при $z = z_0$ отношение частот u_0/v_0 иррационально. Следовательно, все траектории системы (2.5) всюду плотны на торе и ввиду непрерывности $c_0 \equiv 0$.

Предположим теперь, что $c_0 \neq 0$ при $z = z_0$. Полагая $\nu = a_0/c_0$, из первого и третьего уравнений системы (2.3) получаем соотношение

$$u_0 \partial\nu / \partial x + v_0 \partial\nu / \partial y = \partial u_0 / \partial z$$

или, что то же самое, $\dot{\nu} = \partial u_0/\partial z$. Так как правая часть этого равенства не зависит от x и y, то

$$(\nu(t) - \nu(0))/t = \partial u_0/\partial z$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$ и учитывая ограниченность функции ν, получаем, что $\partial u_0/\partial z = 0$ при $z = z_0$. Аналогичный вывод справедлив и для производной $\partial v_0/\partial z$.

Итак, на нерезонансном подмножестве из Δ справедливо соотношение $(u_0' v_0 - u_0 v_0')c_0 = 0$. По непрерывности оно справедливо всюду на $\Delta \times \mathbb{T}^2$. Поскольку в кольце аналитических функций нет делителей нуля, то один сомножитель должен быть тождественно равен нулю. Ввиду предположения о невырожденности $c_0 \equiv 0$.

При $c_0 = 0$ первые два уравнения (2.3) имеют тот же вид, что и третье уравнение системы (2.3). Следовательно, на нерезонансных торах функции a_0, b_0 либо тождественно равны нулю, либо, наоборот, вообще не имеют нулей. Пусть, например, $a_0 \neq 0$. Тогда отношение $\varkappa = b_0/a_0$ удовлетворяет уравнению

$$u_0 \partial\varkappa / \partial x + v_0 \partial\varkappa / \partial y = 0$$

Следовательно, на нерезонансных торах $b_0/a_0 = \text{const}$.

Согласно предположению, $a_0^2 + b_0^2 \neq 0$. Поэтому можно положить $a_0 = r\xi$, $b_0 = r\eta$, где

$$r = (a_0^2 + b_0^2)^{1/2}, \quad \xi = a_0 / r, \quad \eta = b_0 / r$$

причем r, ξ, η – аналитические функции на $\Delta \times \mathbb{T}^2$. Поскольку ξ, η зависят на самом деле от соотношения b_0/a_0, то они постоянны на нерезонансных торах. Так как нерезонансные торы всюду плотны, то ξ, η – аналитические функции только от z.

Пусть a_1, b_1, c_1 – компоненты векторного поля $\mathbf{a}_1$. Приравнивая к нулю коэффициенты при ε в равенстве (1.2), получим три уравнения; укажем одно из них, отвечающее координате z:

$$a_0 \partial w_1 / \partial x + b_0 \partial w_s / \partial y - u_0 \partial c_1 / \partial x - v_0 \partial c_1 / \partial y = \lambda_0 c_1 \tag{2.6}$$

Так как $r \neq 0$, то можно положить $c_1 = \sigma r$, где σ – некоторая аналитическая функция на $\Delta \times \mathbb{T}^2$. Из (2.3) вытекает, что функция r удовлетворяет уравнению

$$-u_0 \partial r / \partial x - v_0 \partial r / \partial y = \lambda_0 r \tag{2.7}$$

Полагая $a_0 = r\xi$, $b_0 = r\eta$ и учитывая соотношение (2.7), уравнение (2.6) можно привести к следующему виду:

$$\xi \partial w_1 / \partial x + \eta \partial w_1 / \partial y - u_0 \partial\sigma / \partial x - v_0 \partial\sigma / \partial y = 0$$

Это линейное уравнение решается методом Фурье. Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем бесконечную цепочку простых алгебраических уравнений

$$(m\xi + n\eta)W_{mn} = (mu_0 + nv_0)\Sigma_{mn} \tag{2.8}$$

где $\Sigma_{mn}(z)$ – коэффициенты Фурье функции σ.

Пусть теперь $z \in \mathbb{P}$. Тогда $mu_0 + nv_0 = 0$ и из (2.8) вытекает, что $m\xi + n\eta = 0$. Поскольку $m^2 + n^2 \neq 0$, то определитель этой линейной системы $f = u_0\eta - v_0\xi$ равен нулю. Функция f аналитична на Δ и ее нули имеют предельную точку внутри Δ. Следовательно, $f \equiv 0$. Таким образом, при $\varepsilon = 0$ векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$ линейно зависимы во всех точках фазового пространства. Теорема доказана.

Пусть множество M компактно, а система (1.1) эргодическая. Тогда имеются траектории, всюду плотно заполняющие M; в частности, такие системы не допускают непостоянных первых интегралов. Однако свойство эргодичности не противоречит наличию нетривиальных полей симметрий.

Вот простой пример: M – n-мерный тор $\{x_i \bmod 2\pi\}$, а система задается уравнениями

$$\dot{x}_1 = \omega_1, \ldots, \dot{x}_n = \omega_n \tag{2.9}$$

с постоянными несоизмеримыми частотами ω. Ясно, что любое векторное поле с постоянными компонентами будет полем симметрий. Эргодическая система (2.9) в известном смысле вырождена: ее энтропия равна нулю. Пример противоположного свойства представляют системы Аносова [11] с неустойчивым поведением фазовых траекторий. В частности, все периодические траектории гиперболические и их совокупность заполняет фазовое пространство всюду плотно.

Было показано [8], что системы Аносова не допускают нетривиальных полей симметрий. Однако у таких систем могут существовать нетривиальные вмороженные поля направлений.

Вот простой пример (ср. с [12], § 14). Рассмотрим трехмерное многообразие M, которое получается из прямого произведения тора $\mathbb{T}^2 = \{x_1, x_2 \bmod 2\pi\}$ на отрезок $0 \leqslant x_3 \leqslant 1$ склейкой торцевых торов по следующему правилу: точка $(x_1, x_2, 1)$ отождествляется с точкой $(x_1', x_2', 0)$, где

$$x_1' = 2x_1 + x_2, \quad x_2' = x_1 + x_2 \pmod{2\pi} \tag{2.10}$$

Рассмотрим на $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ векторное поле $\mathbf{v}$ с компонентами 0, 0, 1. После склейки это поле превращается в гладкое поле на M, которое задает систему Аносова. Положим $\mathbf{a} = (a_1, a_2, 0)$, где (a_1, a_2) – собственный вектор линейного отображения (2.10) (таких линейно независимых векторов на самом деле два). Ясно, что поле $\mathbf{a}$ порождает нетривиальное поле направлений, вмороженное в поток поля $\mathbf{v}$. Стоит отметить, что интегральные линии поля $\mathbf{a}$ всюду плотно заполняют двумерные торы $x_3 = \mathrm{const}$.

3. Некоторые приложения. Фридман ([2], § 9) нашел условия, при которых вихревые линии поля $\mathbf{v}$ вморожены в поток g^t, а также условия сохранения циркуляции поля $\mathbf{v}$ по любому замкнутому контуру. В этом случае M – обычное трехмерное евклидово пространство. Условия Фридмана носят локальный характер. Были указаны примеры полей, для которых циркуляция не меняется, а свойство вмороженности вихревых линий места не имеет [2].

Приведем пример противоположного характера, имеющий отношение к динамике однородной несжимаемой жидкости в потенциальном поле внешних сил, когда учитывается вязкое трение в форме Релея. Уравнения движения имеют вид

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = -\partial f / \partial \mathbf{x} - k\mathbf{v} \tag{3.1}$$

Здесь f – трехчлен Бернулли, k – коэффициент вязкого трения. Применяя к обеим частям (3.1) операцию ротора и используя формулы векторного анализа, а также условие несжимаемости

($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$), приходим к равенству

$$\partial \mathbf{a}/\partial t + [\mathbf{a}, \mathbf{v}] = -k\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$$

Следовательно, согласно (1.4), линии поля ротора скорости вморожены в поток.

Пусть теперь γ – замкнутый контур; положим

$$I(t) = \int\limits_{g^t \gamma} (\mathbf{v}, d\mathbf{x})$$

Из (3.1) получаем соотношение, приводящее к изменению циркуляции по экспоненциальному закону: $I(t) = I(0)\exp(-kt)$.

Задачу Фридмана можно обобщить, сравнивая условия существования в целом вмороженных полей направлений и интегральных инвариантов динамических систем на трехмерных многообразиях. С этой целью рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = \partial H / \partial z, \quad \dot{z} = -\partial H / \partial y; \quad H = H_0(z) + \varepsilon H_1(x, y, z) + \ldots \tag{3.2}$$

Здесь $y \bmod 2\pi$, z – переменные действие – угол невозмущенной системы, функция H считается 2π-периодической по "времени" $x = t$. Системы вида (3.2) получаются из автономных систем с двумя степенями свободы после понижения порядка по Уиттекеру.

Для системы (3.2) имеем

$$u_0 = 1, \quad v_0 = \partial H_0 / \partial z, \quad w_1 = -\partial H_1 / \partial y$$

Следовательно, условие невырожденности невозмущенной системы эквивалентно неравенству $d^2H_0/dz^2 \not\equiv 0$, а множество Пуанкаре $\mathbb{P}$ совпадает с множеством

$$\{z \in \Delta : dH_0 / dz = -n/m, \quad H_{mn} \neq 0\}$$

где H_{mn} – коэффициенты Фурье возмущающей функции H_1. В типичной ситуации $\mathbb{P}$ всюду плотно заполняет Δ. Следовательно, по теореме 1, уравнения (3.2) не допускают нетривиальных вмороженных полей направлений. Однако они всегда имеют интегральный инвариант Пуанкаре–Картана

$$\oint z\,dy - H\,dx$$

Обобщим несколько эту ситуацию. Пусть M – трехмерное многообразие, а система (1.1) на M допускает нетривиальный интегральный инвариант

$$\oint \varphi \tag{3.3}$$

где φ – 1-форма, $d\varphi \neq 0$. Условие инвариантности (3.3) имеет вид

$$L_{\mathbf{v}}\varphi = dg \tag{3.4}$$

где $L_{\mathbf{v}}$ – производная Ли, g – гладкая функция на M. По формуле гомотопии

$$L_{\mathbf{v}} = d i_{\mathbf{v}} + i_{\mathbf{v}} d$$

($i_{\mathbf{v}}$ – внутреннее произведение поля $\mathbf{v}$ и дифференциальной формы). Следовательно, соотношение (3.4) имеет вид

$$L_{\mathbf{v}}\Phi = dh; \quad \Phi = d\varphi, \quad h = g - \varphi(\mathbf{v})$$

Так как $\Phi \neq 0$ и множество M трехмерно, то в каждой точке имеется ненулевой касательный вектор $\mathbf{a}(x)$, такой, что $i_{\mathbf{a}}\Phi = 0$. Этот вектор определяется однозначно с точностью до постоянного множителя. Можно показать, что интегральные кривые поля $\mathbf{a}$ вморожены в поток системы (1.1). Конечно, может оказаться, что $h = \mathrm{const}$. Тогда поле $\mathbf{a}$ коллинеарно полю $\mathbf{v}$ и вмороженное поле направлений будет тривиальным. Такая ситуация имеет место как раз для гамильтоновых систем. Однако если функция h не является интегралом поля $\mathbf{a}$, то это поле порождает нетривиальное вмороженное поле направлений.

4. Хаотизация стационарных течений вязкой жидкости. Рассмотрим стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в приближении Стокса [13]. Предположим для простоты, что внешние силы отсутствуют. Уравнения движения принимают вид

$$\partial p / \partial \mathbf{x} = \mu \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{4.1}$$

Здесь p – давление, μ – коэффициент динамической вязкости, который будем считать равным единице (например, можно сделать подстановку $p \to p/\mu$).

Будем искать решения системы (4.1) в виде

$$u = u_0 + \varepsilon u_1, \; v = v_0 + \varepsilon v_1, \quad w = \varepsilon w_1, \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 \tag{4.2}$$

где ε – параметр, а функции u_0, v_0 и p_0 зависят только от z. Решения такого вида при $\varepsilon = 0$ имеют значение для метеорологии [2]. Функции u_1, v_1, w_1, p_1 предполагаются 2π-периодическими по координатам x и y.

Подставляя (4.2) в (4.1), получаем соотношения

$$u_0 = \alpha z + \xi, \quad v_0 = \beta z + \eta, \quad p_0 = \text{const}$$

Коэффициенты α, β, ξ, η постоянные; будем считать, что

$$\alpha\eta - \beta\xi \neq 0 \tag{4.3}$$

Пусть U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, P_{mn} – коэффициенты Фурье функций u_1, v_1, w_1, p_1. Они зависят от z и находятся из следующей линейной системы:

$$\begin{gathered} U''_{mn} = (m^2 + n^2)U_{mn} + imP_{mn}, \quad V''_{mn} = (m^2 + n^2)V_{mn} + inP_{mn} \\ P'_{mn} = -(m^2 + n^2)W_{mn} - i(mU'_{mn} + nV'_{mn}) \\ W'_{mn} = -i(mU_{mn} + nV_{mn}) \end{gathered} \tag{4.4}$$

(штрих означает производную по z). Уравнения (4.4) можно рассматривать как линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по U, V и первого порядка по P, W. Они имеют решения на каждом интервале Δ оси $\{z\}$, принимающие в фиксированной точке Δ заданные значения (и значения производных U', V'). Поскольку при фиксированных значениях m, n линейная система (4.4) замкнута, то построение сходящихся рядов Фурье не представляет никаких трудностей.

Итак, поле скоростей (4.2) имеет вид (2.1). Резонансные торы $mu_0 + nv_0 = 0$ отвечают точкам

$$z_{mn} = -(m\xi + n\eta)/(m\alpha + n\beta)$$

Ввиду предположения (4.3), они заполняют ось $\{z\}$ всюду плотно. Для типичных течений значения W_{mn} в точках z_{mn} отличны от нуля. Следовательно, в общем случае множество Пуанкаре плотно на прямой $\mathbb{R} = \{z\}$. Условие (4.3) является также условием невырожденности невозмущенной системы. Таким образом, по теореме 1 типичное стационарное течение (4.2) не допускает нетривиальных вмороженных полей направлений.

Поскольку жидкость несжимаемая, то плотность – первый интеграл. Согласно полученному ранее результату [8], типичное поле (4.2) не допускает непостоянных первых интегралов. Следовательно, в этом случае вязкая жидкость обязательно будет однородной.

Замечание. Решения полных уравнений Навье–Стокса также можно найти в виде формальных рядов по степеням ε, однако при этом возникает нетривиальная задача доказательства их сходимости [9].

5. Заключительные замечания. В теореме 1 утверждается отсутствие вмороженных полей направлений, аналитических по параметру ε. По-видимому, предположение об аналитической зависимости от ε можно снять, но это пока не доказано. Не решена пока более простая задача: доказать, что в предположениях теоремы 1 при малых фиксированных значениях $\varepsilon \neq 0$ дифференциальные уравнения (2.1) не допускают непостоянных аналитических интегралов. Задачи такого рода очень трудные. Достаточно упомянуть вытекающий из КАМ-теории результат о том, что при малых $\varepsilon \neq 0$ гамильтоновы системы вида (2.1) всегда имеют непостоянный непрерывный первый интеграл [14]. С другой стороны, имеются примеры гамильтоновых систем, допускающих интеграл класса гладкости C^k, но не имеющих интегралов из класса C^{k+1}, заданных во всем фазовом пространстве [7].

В ряде случаев с помощью метода расщепления сепаратрис [7, 14] удается доказать отсутствие аналитических интегралов при фиксированных малых значениях $\varepsilon \neq 0$. Однако расщепление сепаратрис не препятствует существованию нетривиальных вмороженных полей направлений. Действительно, в примере разд. 2 система на M^3 имеет бесконечное число гиперболических периодических траекторий, сепаратрисы которых трансверсально пересекаются.

Были указаны [9] примеры стационарных течений вязкой жидкости с пересекающимися сепаратрисами. Исследовалась [15] хаотическая структура некоторых течений вязкой жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00747) и Федеральной целевой программы "Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки" (№ 294).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Poincaré H.* Théorie des tourbillons. Paris: G. Carre, 1893. 211 p.
2. *Фридман А.А.* Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости. Л.; М.: Гостехиздат, 1934. 368 с.
3. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. I, II. М.: Физматгиз, 1963.
4. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
5. *Пуанкаре А.* Избр. тр. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 771 с.
6. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958. 408 с.
7. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1995. 429 с.
8. *Козлов В.В.* О группах симметрий динамических систем // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 531–541.
9. *Kozlov V.V.* Dynamical systems determined by the Navier–Stokes equations // Rus. J. Math. Phys. 1993. V. 1. № 1. P. 57–69.
10. *Козлов В.В.* Об интегральных инвариантах уравнений Гамильтона // Мат. заметки. 1995. Т. 58. Вып. 3. С. 379–393.
11. *Аносов Д.В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях // Тр. Мат. Ин-та АН СССР. 1967. Т. 90. С. 3–210.
12. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
13. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
14. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1985. 304 с.
15. *Neishtadt A.I., Vainshtein D.L., Vasiliev A.A.* Chaotic advection in the cubic Stokes flow // Phys. D. 1998. V. 111. P. 227–242.

Москва

Поступила в редакцию
24.III.1998