## Приложение

# О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДУФФИНГА

**1. Уравнения Дуффинга.** Мы будем рассматривать колебания одномерной системы, возбуждаемой внешней гармонической силой. Они описываются уравнением

$$\ddot{x} + f(x) = \varepsilon \sin \lambda t; \quad \varepsilon,\, \lambda = \mathrm{const}. \tag{1.1}$$

Восстанавливающая сила потенциальна; потенциальная энергия задается формулой

$$V(x) = \int\limits_0^x f(\xi) d\xi.$$

Будем считать, что $x = 0$ — простой нуль аналитической функции $f$, причем $f'(0) > 0$. Тогда в окрестности точки $x = 0$ график потенциала $V$ будет иметь вид параболы с ветвями, направленными вверх. Таким образом, $x = 0$ — устойчивое равновесие невозмущенной системы.

Нас будут интересовать два основных примера, рассмотренных впервые Дуффингом в его работе 1918 года [1]:

а) $f = \omega_0^2 x + \alpha x^3$, при $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) говорят о жесткой (мягкой) восстанавливающей силе,

б) $f = \omega_0^2 x \sin x$ (маятник); здесь $V = \omega_0^2 \cos x + \omega_0^2$.

Уравнения второго порядка (1.1) можно представить в виде канонических дифференциальных уравнений Гамильтона:

$$\begin{gathered} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial y}; \quad H = H_0 + \varepsilon H_1, \\ H_0 = \frac{y^2}{2} + V(x), \quad H_1 = x \sin \lambda t. \end{gathered} \tag{1.2}$$

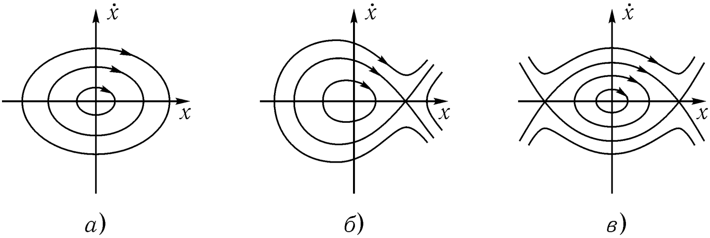


Рис. 1. Фазовые портреты

При $\varepsilon = 0$ будем иметь интегрируемую систему с одной степенью свободы. Различные типы фазовых портретов изображены на рис. 1.

Тип *а* характеризует область колебательных движений (например, при жесткой восстанавливающей силе). В случае *в* имеется пара сдвоенных сепаратрис; соответствующие двоякоасимптотические решения Пуанкаре назвал гетероклиническими (такой фазовый портрет имеет, например, система Дуффинга при мягкой восстанавливающей силе). Петля сепаратрисы в случае *б* является траекторией гомоклинических решений (по Пуанкаре). Фазовый портрет такого типа получится при добавлении квадратичного по $x$ слагаемого в выражение для восстанавливающей силы.

**2. Периодические решения.** Поиску периодических решений уравнения (1.1) посвящена обширная литература. Обычно для этой цели применяют методы теории возмущений или используют функциональные и вариационные методы. Ссылки на некоторые наиболее известные работы можно найти, например, в книгах [2, 3]. Укажем также некоторые более поздние работы [4]–[8].

Мы будем рассматривать случай, когда параметр $\varepsilon$ мал. Для поиска периодических решений уравнения (1.1) можно воспользоваться методом малого параметра, разлагая эти решения в сходящиеся ряды по степеням $\varepsilon$. Представление уравнения (1.1) в виде гамильтоновой системы (1.2) позволяет воспользоваться теорией Пуанкаре рождения пар невырожденных периодических решений, развитой им в главах I и III знаменитых «Новых методов небесной механики» [9].

Прежде всего отметим, что критическим точкам потенциальной энергии при малых значениях $\varepsilon$ отвечают невырожденные периодические решения полной системы. Причем, точки локального минимума порождают решения эллиптического типа (их мультипликаторы лежат на единичной окружности), а точки максимума порождают решения гиперболического типа (их мультипликаторы вещественные и отличны от 1). Период таких решений равен $2\pi/\lambda$; они часто называются гармоническими.

Периодические решения в общем случае имеют период $2\pi n/\lambda$ ($n$ целое); при этом система совершает ровно $m$ полных колебаний. Это субгармонические решения типа $\{m, n\}$. Числа $m$ и $n$ можно считать взаимно простыми. Существуют ли субгармоники, сколько их и что можно сказать об их устойчивости при малых $\varepsilon \neq 0$.

Чтобы ответить на эти вопросы, перейдем к переменным действие-угол $J$, $\varphi \mod 2\pi$ в невозмущенной системе с одной степенью свободы (см., например, [10]). Нас будет интересовать, в основном, колебательная область на фазовой плоскости (возможно, ограниченная сепаратрисами), в которой такие переменные можно ввести в целом:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2\left[H_0 - V(x)\right]}\, dx, \tag{2.1}$$

$$\varphi = \omega(J) \int\limits_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{2\left[H_0 - V(\xi)\right]}}. \tag{2.2}$$

Из (2.1) получаем, что $H_0 = H_0(J)$,

$$\omega = \frac{dH}{dJ}$$

— частота свободных колебаний невозмущенной системы, координата $x$ находится из (2.2) обращением интеграла. Например, для системы Дуффинга (пример а) переход к переменным действие-угол осуществляется с помощью эллиптических функций.

В новых переменных

$$\begin{aligned} H &= H_0(J) + \varepsilon H_1(J,\, \varphi,\, t),\\ H_1 &= g(J,\, \varphi)\sin\lambda t. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Функция $g$ — это координата $x$, представленная в переменных действие-угол. Ее можно разложить в ряд Фурье:

$$g = \sum_{k\in Z} g_k(J)e^{ik\phi}.$$

В невозмущенной задаче резонансные режимы колебаний типа $\{m,\, n\}$ определяются равенствами

$$\omega(J_0) = \frac{m}{n}\lambda, \quad \varphi = \omega(J_0)t + \varphi_0. \tag{2.4}$$

Первое уравнение определяет возможные резонансные значения переменной действия.

Метод Пуанкаре основан на анализе возмущающей функции $H_1(J,\, \varphi,\, t)$ на резонансных решениях (2.4) невозмущенной системы:

$$t \to H_1\big(J_0,\, \omega(J_0)t + \varphi_0,\, t\big).$$

Это $2\pi/\lambda$-периодическая функция $t$. Ее временное среднее

$$\langle H_1\rangle = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau H_1\, d\tau$$

будет, очевидно, $2\pi$-периодической функцией начальной фазы $\varphi_0$. Ввиду периодичности, функция $\langle H_1\rangle$ имеет локальные максимумы и минимумы. Нас интересуют невырожденные точки экстремума, в которых отлична от нуля вторая производная. Пуанкаре доказал, что если невозмущенная система невырождена ($d^2H_0/dJ^2 \neq 0$ при резонансном значении $J_0$), то каждой невырожденной критической точке $\varphi_0$ усредненной возмущающей функции $\langle H_1\rangle$ отвечают периодические решения (2.4), которые не исчезают при возмущении, а переходят в невырожденные периодические решения полной системы (1.2). Их можно представить в виде рядов по степеням $\varepsilon$, а их мультипликаторы разлагаются в ряды по степеням $\sqrt{\varepsilon}$.

Пуанкаре изучил также вопрос об устойчивости найденных периодических решений в линейном приближении. Оказывается, если

$$\frac{d^2 H_0}{dJ^2}(J_0) > 0,$$

то локальным максимумам и минимумам функции $\langle H_1 \rangle$ отвечают соответственно гиперболические и эллиптические периодические решения. Если же вторая производная функции $H_0$ отрицательна, то свойства устойчивости меняются местами.

Для возмущающей функции из (2.3), очевидно, $\langle H_1 \rangle = 0$, если $m \neq 1$. Здесь все критические точки вырождены и теория Пуанкаре непосредственно не применима. Пусть $m = 1$. Тогда

$$\langle H_1 \rangle = -\frac{g_n}{2i} e^{in\varphi_0} + \frac{g_{-n}}{2i} e^{-in\varphi_0}. \tag{2.5}$$

Поскольку $g_{-n} = \overline{g}_n$, то $\langle H_1 \rangle$ будет линейной комбинацией $\sin n\varphi_0$ и $\cos n\varphi_0$ с вещественными коэффициентами: если $g_n = -a - bi$, $g_{-n} = -a + bi$, то

$$\langle H_1 \rangle = a \sin n\varphi_0 + b \cos n\varphi_0.$$

Все критические точки этой функции невырожденные, если $g_n \neq 0$ и $n \neq 0$. Действительно, пусть $\psi$ — вырожденная критическая точка. Тогда

$$\frac{d\langle H_1 \rangle}{d\psi} = na \cos n\psi - nb \sin n\psi = 0,$$

$$\frac{d^2\langle H_1 \rangle}{d\psi^2} = -n^2 a \sin n\psi - n^2 b \cos n\psi = 0.$$

Но тогда определитель этой линейной системы $-n^3(a^2 + b^2)$ должен быть равен нулю. Но это не так, согласно нашему предположению.

Таким образом, если $g_n \neq 0$, то $2\pi$-периодическая функция (2.5) имеет на периоде ровно $n$ невырожденных максимумов и $n$ невырожденных минимумов, которые перемежаются между собой. Если невозмущенная система невырождена, то каждая такая точка порождает периодическое решение возмущенной системы типа $\{1, n\}$. На самом деле разные точки локального максимума (минимума) отвечают одной и той же периодической траектории; они соответствуют лишь различным значениям начальной фазы $\varphi_0$. Итак, если $g_n \neq 0$, то при малых значениях $\varepsilon$ возмущенные уравнения (1.2) имеют два $2\pi n/1$-периодических решения, причем одно из них эллиптическое, а другое — гиперболическое. Гиперболические решения, конечно, неустойчивы по Ляпунову. Достаточные условия устойчивости по Ляпунову эллиптических периодических решений Пуанкаре получены в работе [11] с помощью КАМ-теории. Эти условия выполнены в ситуации общего положения.

Применим эти результаты к уравнениям Дуффинга. Сначала рассмотрим систему из примера *a*. Прежде всего докажем, что при $\alpha \neq 0$ невозмущенная система невырождена. Более точно, знак второй производной $d^2H_0/dJ^2$ совпадает со знаком коэффициента $\alpha$ в выражении для восстанавливающей силы. Кстати сказать, при $\alpha \neq 0$ эта система тождественно вырождена.

Дифференцируя равенство (2.1) по $J$, получим формулу для частоты:

$$\omega = \frac{2\pi}{\displaystyle\oint \frac{dx}{\sqrt{2\left[H_0 - V(x)\right]}}}. \tag{2.6}$$

Она имеет простой смысл: в знаменателе стоит выражение для периода колебаний. Период $T$ есть функция от энергии $H_0$. Дифференцируя (2.6) по $J$, приходим к соотношению

$$\frac{d^2H_0}{dJ^2} = -\frac{2\pi\omega}{T^2}\frac{dT}{dH_0}.$$

Поскольку $\omega > 0$, то вторая производная имеет знак противоположный знаку $dT/dH_0$. Воспользуемся результатом работы [12]: если функция

$$\frac{f(x)}{x} \tag{2.7}$$

возрастает или убывает с ростом $x$, то функция $H_0 \to T(H_0)$ изменяется в противоположном направлении. В нашем случае функция (2.7) есть $\omega_0 + \alpha x^2$. Она возрастает (убывает) при $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$). Утверждение доказано.

Перейдем теперь к анализу возмущения. В рассматриваемой задаче функция $g$ — это координата $x$, представленная как функция $\varphi$ с помощью соотношения (2.2). Для системы Дуффинга обращение интеграла (2.2) приводит к выводу, что $x$ — это эллиптический синус Якоби с точностью до несущественного постоянного множителя. Воспользуемся классической формулой

$$\operatorname{sn} u = \frac{2\pi}{kK} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{q^{s-\frac{1}{2}}}{1 - q^{2s-1}} \sin(2s-1)\frac{\pi u}{2K}.$$

Здесь использованы стандартные обозначения (см., например, [13]). Отсюда сразу видно, что коэффициенты $g_n$ с нечетными $n$ отличны от нуля при всех значениях переменной действия.

Таким образом, задача о парах периодических решений возмущенной системы сводится к разрешимости алгебраического уравнения (2.4)

$$\omega(J) = \frac{\lambda}{2k+1}, \quad k = 0,\, 1,\, 2, \ldots \tag{2.8}$$

Здесь надо различать случаи жесткой и мягкой восстанавливающей силы. Как уже отмечалось, при $\alpha > 0$ с возрастанием энергии (или, что то же самое, с возрастанием переменной $J$) период $T = 2\pi/\omega$ монотонно убывает от $2\pi/\omega_0$ до нуля. Следовательно, уравнение (2.8) имеет решения для целых значений $k = 0,\, 1, \ldots,$ удовлетворяющих неравенству

$$2k + 1 < \lambda/\omega_0. \tag{2.9}$$

Если же $\alpha < 0$, то период $T$ монотонно возрастает от значения $2\pi/\omega_0$ до бесконечности. Следовательно, в этом случае неравенство (2.9) заменяется на противоположное

$$2k + 1 > \lambda/\omega_0. \tag{2.10}$$

Здесь при возмущении рождается бесконечно много различных пар невырожденных долгопериодических решений.

В случае жесткой восстанавливающей силы локальным максимумам (минимумам) усредненного возмущения отвечают гиперболические (соответственно, эллиптические) периодические решения. Для мягкой силы свойства устойчивости меняются на противоположные.

Эти выводы полезно сравнить с результатами работы [14], в которой при выполнении неравенств (2.9) или (2.10) доказано существование одного периодического решения с частотой (2.8). Метод Пуанкаре позволяет удвоить количество периодических решений и, что даже более важно, сделать заключение об их устойчивости. Любопытно отметить, что в книге Лефшеца [3] (в которой изложена работа [14] в несколько более общем виде) имеется ссылка на классическое сочинение Пуанкаре [9]. Специалистам по теории колебаний следовало бы более внимательно изучать работы Пуанкаре. Это замечание относится и к работам по синхронизации динамических систем (см., например, [15]): сформулированные в этой теории экстремальные свойства синхронных (резонансных) движений часто оказываются следствием результатов Пуанкаре о рождении периодических решений многомерных гамильтоновых систем.

В задаче о вынужденных колебаниях маятника (пример *б*) функция (2.7), очевидно, убывает и, следовательно, частота $\omega(J)$ убывает с ростом $J$. В частности, $d^2H_0/dJ^2 < 0$. Можно показать, что в этой задаче ряд Фурье для функции $g$ содержит все гармоники с ненулевыми коэффициентами, и поэтому возмущенная задача имеет бесконечное число пар невырожденных $2\pi n/\lambda$-периодических решений, где $n > \lambda/\omega_0$.

В заключение этого параграфа сделаем важное замечание. Как заметил В. И. Арнольд (см. [16], добавление 9), если для заданных $m$ и $n$ уравнение

$$\omega(J) = \frac{m\lambda}{n}$$

имеет решение, то при малых значениях параметра $\varepsilon$ уравнения (1.2) имеют не менее двух различных периодических решений типа $\{m, n\}$. Доказательство основано на применении теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении сильно нерезонансных инвариантных торов и геометрической теоремы Пуанкаре о неподвижных точках отображения кольца. При этом остается неясным вопрос об аналитической зависимости этих решений от параметра $\varepsilon$, а также ничего определенного нельзя сказать об их устойчивости.

Аналогичные соображения использованы в [8] для доказательства существования бесконечного числа периодических решений различных типов при фиксированных конечных значениях параметра $\varepsilon$. В [8] малый параметр вводится искусственно в области, где потенциальная энергия много меньше кинетической. Периодические решения, полученные в работах [4]–[7], составляют половину периодических решений, существование которых установлено в [8] методами гамильтоновой механики.

Другой конструктивный подход к поиску новых периодических решений основан на использовании подходящих канонических замен переменных $J, \varphi \mod 2\pi \to \widetilde{J}, \widetilde{\varphi} \mod 2\pi$ (зависящих от $\varepsilon$), после которых гамильтониан принимает вид

$$H = H_0(\widetilde{J}) + \varepsilon H_1(\widetilde{J}) + \varepsilon^2 H_2(\widetilde{J}, \widetilde{\varphi}, t) + o(\varepsilon^2).$$

Ряд Фурье функции $H_2$, как правило, содержит новые нетривиальные гармоники, и поэтому метод Пуанкаре (после несложной модификации) приводит к появлению новых субгармонических решений. Примеры эффективного использования этой идеи можно найти в книге [16, гл. IV].

**3. Расщепление сепаратрис и периодические решения.** Предположим, что фазовый портрет невозмущенной системы содержит петлю сепаратрис или пару сдвоенных сепаратрис. Оказывается, при малых значениях $\varepsilon \neq 0$ эти сепаратрисы, как правило, расщепляются (перестают быть сдвоенными), и это явление, обнаруженное Пуанкаре, приводит к появлению областей с квазислучайным поведением траекторий (см. [9, 10, 16]). Как показано в [17], расщепление сепаратрис тесно связано с рождением бесконечного числа пар различных долгопериодических решений, одно из которых эллиптическое, а другое — гиперболическое.

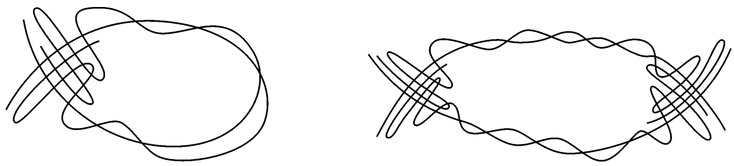

Рис. 2. Расщепление сепаратрис

Пусть

$$t \to x\alpha(t), \quad y\alpha(t), \quad -\infty < t < +\infty \tag{3.1}$$

— двоякоасимптотическое решение невозмущенной задачи. Ввиду автономности, в (3.1) время $t$ можно заменить на $t-\alpha$, $\alpha$ — произвольный вещественный параметр.

Чтобы сформулировать условия расщепления сепаратрис, введем функцию

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \{H_0,\, H_1\}\big|_{x_\alpha,\, y_\alpha} dt = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}_\alpha(t-\alpha)\sin\lambda t\, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}_\alpha(t)\sin\lambda(t+\alpha)dt. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Видно, что $I$ — $2\pi/\lambda$-периодическая функция от $\alpha$. Оказывается, если $I(\alpha) \neq 0$, то возмущенные сепаратрисы расщепляются. Более того, если функция $\alpha \to I(\alpha)$ имеет простые нули, то расщепленные сепаратрисы пересекаются, причем трансверсально (см. [16]). Картины трансверсально пересекающихся сепаратрис показаны на рис. 2.

В нашем случае, согласно (3.2),

$$\int\limits_0^{2\pi/\lambda} I(\alpha)d\alpha = 0.$$

Поэтому функция $I$ обязательно имеет нули. Вопрос в том, когда среди них имеются простые нули. Справедлива

**Теорема.** *Функция* (3.2) *имеет на периоде ровно два простых нуля для всех значений* $\lambda \in R$ *кроме, быть может, счетного множества изолированных точек.*

Действительно, формулу (3.2) можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered} I(\alpha) = c_1 \sin \lambda\alpha + c_2 \cos \lambda\alpha, \\ c_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}_a(t) \cos \lambda t \, dt, \quad c_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}_a(t) \sin \lambda t \, dt. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Следовательно,

$$c_1(\lambda) - ic_2(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}_\alpha(t) e^{-i\lambda t} dt$$

преобразование Фурье функции $t \to \dot{x}_a(t)$. Поскольку функция $t \to \dot{x}_a(t)$ аналитическая и экспоненциально быстро стремится к нулю при $t \to \pm\infty$ (теорема Ляпунова), то $c_1 - ic_2$ также аналитически зависит от $\lambda$ (теорема Пэли–Винера).

Покажем, что $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$. Действительно, в противном случае по теореме обращения преобразования Фурье

$$\dot{x}_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(c_1(\lambda) - ic_2(\lambda)\big) e^{-i\lambda t} d\lambda$$

будет иметь $x_a(t) \equiv \mathrm{const}$. Однако асимптотические решения не сводятся к равновесиям. Ввиду аналитичности, $c_1^2(a) + c_2^2(a) = 0$ лишь для дискретного набора частот $\lambda$. Согласно (3.3), для оставшихся значений $\lambda$ функция $I(\alpha)$ имеет на периоде два простых нуля. Теорема доказана.

Исключительное множество значений $\lambda$, о котором идет речь в теореме, не пусто. Оно содержит точку $\lambda = 0$.

В работе [17] получен следующий результат о рождении изолированных периодических решений вблизи расщепляющихся сепаратрис в гомоклиническом случае. Если функция $I(\alpha)$ имеет простые нули, то возмущенная система допускает бесконечно много невырожденных периодических решений с частотой

$$\omega = \lambda/n, \tag{3.4}$$

где $n$ — любое достаточно большое целое число ($n \geqslant n_0$).

Доказательство этой теоремы основано на проверке выполнения всех условий теоремы Пуанкаре о рождении изолированных резонансных решений, если выполнено неравенство (3.4). При этом начальные фазы порождающих решений стремятся к нулю функции $I$, когда $n \to \infty$.

В теореме о расщеплении сепаратрис утверждается, что функция $I(\alpha)$ имеет на периоде два простых нуля (в которых $I' \neq 0$). Пусть $\alpha_0$ — простой нуль и $\varepsilon I'(\alpha_0) > 0$. Тогда периодические решения, о которых идет речь в теореме из работы [17], будут гиперболическими и, следовательно, неустойчивыми. Если же $\varepsilon I'(\alpha_0) < 0$, то получим бесконечное семейство эллиптических периодических решений. С помощью результата работы [11] С. А. Довбыш показал, что при выполнении дополнительного условия

$$\left[5(I'')^2 - 3I'I'''\right](\alpha_0) \neq 0$$

эти эллиптические решения устойчивы по Ляпунову для малых $\varepsilon$ [18]. Им же доказано, что найдется такая постоянная $c > 0$, что с возрастанием $|\varepsilon| < c/n$ мультипликаторы $\mu$, $\mu^{-1}$ периодического решения Пуанкаре, появляясь из точки $\mu = \mu^{-1} = 1$ при $\varepsilon = 0$, либо монотонно движутся в противоположных направлениях положительной вещественной полуоси (когда $\varepsilon I'(\alpha_0) > 0$), либо обегают единичную окружность на комплексной плоскости, встречаются в точке $\mu = \mu^{-1} = -1$ и затем расходятся в противоположных направлениях отрицательной вещественной полуоси (когда $\varepsilon I'(\alpha_0) < 0$), становясь неустойчивыми. При $|\varepsilon| \geqslant c/n$ монотонный характер движения мультипликаторов может нарушиться.

Важно отметить, что предположение о наличии петли сепаратрисы является существенным. В гетероклиническом случае (например, в системе Дуффинга с мягкой восстанавливающей силой) теорема Пуанкаре может давать лишь периодические решения с частотой (3.4), где $n$ пробегает нечетные числа.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России» (проект № 5581).

## Литература

[1] Duffing G. *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung.* Sammlung Vieweg, Braunschweig, 1918.

[2] Сансоне Дж. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Т. II, М.: ИЛ, 1954.

[3] Лефшец С. *Геометрическая теория дифференциальных уравнений.* М.: ИЛ, 1961.

[4] Harvey C. A. *Periodic Solutions of Differential Equation* $\ddot{x} + g(x) = p(t)$ // Contribution to diff. equations. 1963, v. 1, № 4, p. 425–451.

[5] Heinbockel J., Struble R. A. *The existence of periodic solutions of nonlinear oscillators* // Journal SIAM, 1965, v. 13, № 1, p. 6–36.

[6] Morris G. R. *A differential equations for undamped forced nonlinear oscillations.* I, II, III // Proc. Cambr. Phil. Soc., 1955, v. 51, part. 2, p. 297–312; 1958, v. 54, part. 4, p. 426–438; 1965, v. 61, part. 1, p. 133–155.

[7] Morris G. R. *An infinite class of periodic solutions of* $\ddot{x} + 2x^3 = p(t)$ // Proc. Cambr. Phil. Soc., 1965, V. 61, part. 1, p. 157–164.

[8] Довбыш С. А. *Колмогоровские торы в некоторых неинтегрируемых системах, не содержащих малого параметра* // Вестн. Моск. ун-та., Сер. Матем., механ., 1988, № 2, с. 36–39.

[9] Пуанкаре А. *Новые методы небесной механики.* В кн.: Избранные труды, т. 1, М.: Наука, 1972.

[10] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. *Математические аспекты классической и небесной механики.* М.: ВИНИТИ АН СССР, 1985.

[11] Маркеев А. П., Чуркина Н. И. *О периодических решениях Пуанкаре канонической системы с одной степенью свободы* // Письма в астрон. журнал, 1985, т. 11, № 8, с. 634–639.

[12] Opial Z. *Sur les periodes des solutions de l'equation differentielle* $\ddot{x} + g(x) = 0$ // Ann. Polon. Math., 1961, v. 10, p. 49–72.

[13] Уиттекер Е., Ватсон Г. *Курс современного анализа.* Т. II, М.: Физматгиз, 1962.

[14] Shimizu T. *On differential equations for non-linear oscillations* // Mathematica Japonica, 1951, v. 2, p. 86–96.

[15] Блехман И. И. *Синхронизация в природе и технике.* М.: Наука, 1981.

[16] Козлов В. В. *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике.* Ижевск: Изд-во Удм. гос. ун-та, 1995.

[17] Козлов В. В. *Расщепление сепаратрис и рождение изолированных периодических решений в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы* // УМН, 1986, т. 41, № 5, с. 177–178.

[18] Довбыш С. А. *Расщепление сепаратрис и рождение изолированных периодических решений в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы* // УМН, 1989, т. 44, № 2, с. 229–230.