Интегральные инварианты после Пуанкаре и Картана* 

А. Основы общей теории интегральных инвариантов заложены А. Пуанкаре в III-ем томе его «Новых методов небесной механики» [1]. Важные конкретные примеры интегральных инвариантов были известны, конечно, и до Пуанкаре (например, знаменитая теорема Томсона из гидродинамики о сохранности циркуляции). Теория Пуанкаре развита и дополнена Э. Картаном [2].

Напомним сначала основные определения в современных обозначениях. Пусть

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in M^n,$$

— гладкая динамическая система на многообразии $M$. Производную Ли вдоль векторного поля $v$ будем обозначать $L_v$. По формуле гомотопии

$$L_v = di_v + iv d.$$ 

Пусть $\varphi$ — $k$-форма, $\gamma$ — $k$-цепь, $g^t_v$ — фазовый поток системы (1). Справедлива простая формула (см., например, [3, гл. VII]):

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{g^t(\gamma)} \varphi = \int_\gamma L_v \varphi.$$ 

Таким образом, если

$$L_v \varphi = 0,$$

то интеграл

$$I[\gamma] = \int_\gamma \varphi$$

будет абсолютным интегральным инвариантом для системы (1):

$$I[g^t(\gamma)] = I[\gamma] \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$ 

Если

$$L_v \varphi = d\psi,$$

где $\psi$ — некоторая $(k-1)$-форма, то равенство (4) справедливо для любого $k$-цикла $\gamma$: $\partial \gamma = 0$. В этом случае интеграл (3) называется относительным интегральным инвариантом.

*Работа написана при финансовой поддержке INTAS (проект “Symmetry and cohomology approach to equations of mechanics and mathematical physics; № 96-0793”).
ДОБАВЛЕНИЕ

Разделение интегральных инвариантов на абсолютные и относительные, предложенные Пуанкаре, не охватывает все интересные случаи. Например, может оказаться, что

$$L_v \varphi = \psi, \quad d\psi = 0,$$

(6)

причем $k$-форма $\psi$ не является точной. В этом случае равенство (4) имеет место для любого $k$-мерного цикла, гомологического нулю. Такой интегральный инвариант назовем условным.

Приведем простой пример линейного интегрального инварианта, который является условным, но не относительным. Пусть

$$M^2 = T \times \mathbb{R} = \{ q \mod 2\pi, p \},$$

$$\dot{q} = 0, \quad \dot{p} = 1; \quad \varphi = pdq.$$

Тогда

$$L_v \varphi = i_v d\varphi = dq.$$  

Форма $\psi = dq$ замкнута, но не точна. Поэтому,

$$\hat{I}[g'(\gamma)] = 2\pi$$

для любого замкнутого контура $\gamma$, «охватывающего» цилиндр $M$

(например, $\gamma = \{ 0 \leq q < 2\pi, \ p = 0 \}.$)

Пусть $k$-форма $\varphi$ порождает условный или относительный интегральный инвариант. Тогда $(k + 1)$-форме $d\varphi$, очевидно, отвечает абсолютный инвариант.

Действительно,

$$L_v d\varphi = dL_v \varphi = d\psi = 0.$$  

Это замечание фактически принадлежит Пуанкаре [1, п. 238].

Б. Эли Картан вкладывает в понятие интегрального инварианта несколько иной смысл. По Картану абсолютные интегральные инварианты порождаются дифференциальными формами $\alpha$, такими, что

$$i_v \alpha = i_v d\alpha = 0.$$  

(7)

Такие формы Картан называет во введении к своей книге интегральными формами. Ввиду формулы гомотопии, из (7) сразу вытекает равенство $L_v \alpha = 0$.

Относительные интегральные инварианты порождаются (по Картану) формами $\alpha$, такими, что

$$i_v d\alpha = 0.$$  

(8)

Равенство (8) дает

$$L_v \alpha = di_v \alpha + i_v d\alpha = d\beta,$$

где $\beta = i_v \alpha$. Таким образом, получаем частный случай относительного интегрального инварианта по Пуанкаре.
Подход Картана к теории интегральных инвариантов кажется более узким по сравнению с подходом Пуанкаре. Однако, как пишет Картан во введении к своей книге, «…оказывается, что понятие интегральной формы не отличается существенно от понятия интегрального инварианта. Сопоставление этих двух понятий легко в основу настоящего труда».

О сновная идея Картана основана на расширении фазового пространства $M$ путем добавления нового независимого переменного времени $t$. В расширенном $(n + 1)$-мерном пространстве $\tilde{M} = M \times \mathbb{R}$ уравнение (1) заменяется системой

$$\dot{x} = v(x), \quad \dot{t} = 1. \quad (9)$$

**Предложение 1.** Пусть $k$-форма $\varphi$ порождает абсолютный инвариант системы (1) по Пуанкаре. Тогда система (9) допускает абсолютный инвариант по Картану с $k$-формой

$$\alpha = \varphi + (-1)^k (i_\varphi \varphi) \wedge dt.$$  

Доказательство сводится к проверке двух равенств: $i_{\tilde{v}} \alpha = 0$ и $L_{\tilde{v}} \alpha = 0$, где $\tilde{v}$ — векторное поле на расширенном пространстве, задаваемое уравнениями (9). Предложение 1 фактически принадлежит Картану ([2], п. 30), только вместо явной формулы для $\alpha$ Картан приводит правило ее вывода: в выражение для формы $\varphi$ вместо дифференциалов $dx_i$ надо подставить разности $dx_i - v_i dt$.

Как заметил Картан ([2], п. 32), в общем случае предложение 1 не справедливо для относительных инвариантов. Мы дополним наблюдение Картана следующим утверждением.

**Предложение 2.** Пусть $k$-форма $\varphi$ порождает условный интегральный инвариант по Пуанкаре системы (1): $i_\varphi d\varphi = dv$. Тогда система (9) допускает условную инвариантную $k$-форму по Картану: $i_{\tilde{v}} d\alpha = 0$, где

$$\alpha = \varphi + (-1)^{k-1} \psi \wedge dt. \quad (10)$$

Сам Картан фактически использовал формулу (10) в некоторых конкретных ситуациях. Однако, в общем случае он предлагал действовать по-другому ([2], п. 32): если система (1) допускает условный инвариант, то она допускает и абсолютный инвариант (см. А); после этого приведения уже можно воспользоваться предложением 1.

Пусть $\sigma_1$ — замкнутая $k$-мерная поверхность в $\tilde{M}$. Проведя через каждую точку $\sigma_1$ интегральную кривую векторного поля $\tilde{v}$, получим $(k + 1)$-мерную трубку траекторий $\Gamma$. Пусть $\sigma_2$ — еще одна $k$-мерная поверхность, лежащая на $\Gamma$ и гомологическая $\sigma_1$ (т.е. цикл
\( \sigma_1 - \sigma_2 \) является границей некоторого куска \( \Gamma \). Ввиду условия (8), \((k + 1)\)-форма \( d\alpha \) равна нулю на \( \Gamma \). Следовательно, по теореме Стокса,

\[
\int_{\sigma_1} \alpha = \int_{\sigma_2} \alpha. \tag{11}
\]

Пусть теперь \( \sigma_1 \) и \( \sigma_2 \) — сечения трубки \( \Gamma \) гиперповерхностями \( t = t_1 \) и \( t = t_2 \). Тогда в равенстве (11) форму \( \alpha \) можно заменить на \( \varphi \) и мы переходим к инварианту Пуанкаре исходной системы (1).

Систематическое использование времени \( t \) как независимой координаты в расширенном фазовом пространстве — одна из основных идей книги Картана.

**В.** Пусть теперь \( M^{2n} = T^*N^n \) — фазовое пространство гамильтоновой системы с конфигурационным пространством \( N^n = \{x\} \). Введем канонические импульсы \( y \in T^*_x N \) и 1-форму

\[
\varphi = y \, dx = \sum_{k=1}^{n} y_k \, dx_k.
\]

Как заметил Пуанкаре [1, п. 255], уравнения Гамильтона

\[
\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}; \quad 1 \leq k \leq n, \tag{12}
\]

допускают линейный относительный инвариант

\[
\int y_k \, dx_k, \quad \partial \gamma = 0. \tag{13}
\]

Интересно отметить, что инвариант (13) не зависит от гамильтониана \( H \) в уравнениях (12). Поэтому (13) иногда называют универсальным интегральным инвариантом. Как доказал Ли Хуа Чжун [4], каждый линейный универсальный инвариант уравнений Гамильтона может отличаться от инварианта Пуанкаре (13) лишь постоянным множителем. Этот результат, впрочем, носит формальный характер. Его доказательство основано на анализе инвариантности интеграла от одной и той же 1-формы \( \varphi \) относительно фазовых потоков гамильтоновых систем с разными конкретными гамильтонианами.

Стоит подчеркнуть, что теорема Ли Хуа Чжуна доказана для случая, когда \( M = \mathbb{R}^{2n} \). Если первое число Бetti фазового пространства \( M \) отлично от нуля, то эта теорема уже не справедлива. К форме \( \varphi \) можно прибавить замкнутую, но не точную 1-форму. Тогда значение интеграла (13) на негомологических нулях циклов изменится на некото- рые ненулевые аддитивные постоянные. В общем случае теорема Ли Хуа Чжуна имеет место лишь для условных интегральных инвариантов.
Добавление

Пусть $v$ — гамильтоново векторное поле, определяемое дифференциальными уравнениями (12). Нетрудно заметить, что систему (12) можно представить в эквивалентной форме

$$i_v d\varphi = -dH.$$ 

Согласно предложению 2, расширенная гамильтонова система допускает относительный интегральный инвариант

$$\int \varphi - H dt.$$ \hspace{1cm} (14)

Это, пожалуй, самый известный результат Картана из его книги [2]. Инвариант (14) называется интегральным инвариантом Пуанкаре — Картана, а подынтегральное выражение $\sum y dx - H dt$ — формой энергии-импульса.

Как заметил Картан ([2], п. 11), наличие интегрального инварианта (14) однозначно выделяет гамильтонову систему (12).

Г. Пуанкаре поставил задачу о наличии других интегральных инвариантов уравнений динамики, в частности, в задаче трех тел. В [1, п. 257] он пишет: «Можно задаться вопросом, существуют ли другие алгебраические интегральные инварианты, кроме тех, которые мы только что образовали.

Можно было бы применить либо метод Брунса, либо метод, который я использовал в главах IV и V...».

Пуанкаре понимал, что эта задача тесно связана с условиями интегрируемости уравнений Гамильтона. Не случайно он упоминает главу V, в которой им доказана теорема о несуществовании однозначных аналитических интегралов при типичном возмущении функции Гамильтона. Покажем, что действительно в окрестности инвариантных торов вполне интегрируемые системы допускают несколько различных относительных интегральных инвариантов. В переменных действительного угла $J, \varphi \mod 2\pi$ уравнения имеют следующий вид:

$$\dot{J}_1 = \ldots = \dot{J}_n = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = \omega_1, \ldots, \dot{\varphi}_n = \omega_n.$$ \hspace{1cm} (15)

Здесь $\omega_k$ — функция от $J$. Рассмотрим невырожденный случай, когда

$$\frac{\partial(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{\partial(J_1, \ldots, J_n)} \neq 0.$$ 

Оказывается, уравнения (15) можно представить в различных независимых гамильтоновых формах [5]: положим

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial K}{\partial \omega_k} d\varphi_k,$$
а функция Гамильтона $H$ равна

$$
\sum_{l}^{n} \omega_k \frac{\partial K}{\partial \omega_k} - K.
$$

Здесь $K$ — невырожденная функция от частот $\omega_1, \ldots, \omega_n$:

$$
\det \left| \frac{\partial^2 K}{\partial \omega_i \partial \omega_j} \right| \neq 0.
$$

Различные гамильтоновы представления уравнений (15) «нумеруются» функциями $K(\omega)$. Поэтому, по теореме Пуанкаре, система (15) допускает интегральные инварианты

$$
\int \varphi = \int \sum_{l}^{n} \frac{\partial K}{\partial \omega_k} d\varphi_k.
$$

Сам Пуанкаре пытался связать существование новых интегральных инвариантов со свойствами мультипликаторов периодических решений уравнений Гамильтона. Он показал [1, п. 259], что если имеется $p$ различных интегральных инвариантов (когда 1-формы $\varphi$ независимы), причем коэффициенты форм $\varphi$ линейны по канонически переменным (как, например, в (13)), то $p$ мультипликаторов будут равны единице. К сожалению, для общего случая анализ задачи, проведенный Пуанкаре, не привел к законченным результатам. В связи с этим Пуанкаре говорит: «Вероятно, задача трех тел не допускает инвариантных алгебраических соотношений, отличных от тех, которые уже известны. Однако, я еще не в состоянии доказать это» [1, п. 258].


Д. Согласно Пуанкаре, уравнения Гамильтона допускают абсолютный интегральный инвариант, задаваемый 2-формой $\omega = d\varphi$. Очевидно также, что степени $\omega$ ($\omega^2 = \omega \wedge \omega, \ldots$) порождают абсолютные инварианты четных степеней. Особый интерес представляет $2n$-форма $\omega^n$, пропорциональная форме объема в фазовом пространстве $T^*N$. Из ее инвариантности вытекает знаменитая теорема Лиувилля о сохранении фазового объема гамильтоновых систем, известная, конечно, до Пуанкаре и Картана.

Более общо, система (1) на $M^n$ допускает интегральный инвариант

$$
\int_D \rho(x) d^n x
$$

(16)
тогда и только тогда, когда

$$\text{div} \, \rho v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (17)$$

Это уравнение называется уравнением Лиувилля, а функция $\rho$ — плотностью интегрального инварианта. Для гамильтоновых систем $\rho \equiv 1$. Если $\rho > 0$, то интеграл (16) часто называется инвариантной мерой: его значение можно принять за меру $\text{mes}$ области $D$. Таким образом,

$$\text{mes} (g^t D) = \text{mes} D,$$

где $g^t$ — фазовый поток системы (1).

Для систем с инвариантной мерой на компактном $M^n$ Пуанкаре доказал теорему о возвращении, которая положила начало эргодической теории: для почти всех (в смысле меры Лебега) $x \in M$ траектория $g^t x$ бесконечное число раз скользит вдоль нерегулярно сходится к начальной точке $x$. Приведем количественный вариант этого результата, установленный недавно Н. Г. Мошевитином.

**Теорема 1.** Пусть положительная функция $\psi(t)$ сколь угодно медленно возрастает $\to +\infty$ при $t \to +\infty$ и $\psi(t)/t^{1/n}$ монотонно убывает к нулю при $t \to +\infty$. Тогда для почти каждого $x \in M^n$ найдется последовательность $t_v \to +\infty$, такая, что

$$\rho (g^t_v x, x) < \frac{1}{t_v^{1/n}} \psi (t_v).$$

Здесь $\rho$ — некоторое расстояние на $M$. Н. Г. Мошевитин привел пример сохраняющего объем сдвига $g$ на $n$-мерном торе $\mathbb{T}^n$, для которого

$$\rho (g^t x, x) > Ct^{-1/n}, \quad C = \text{const}$$

при всех $t \in \mathbb{N}$ и всех $x \in \mathbb{T}^n$.

Для уравнений (15) уравнение Лиувилля принимает вид

$$\sum \omega_k \frac{\partial \rho}{\partial \varphi_k} = 0.$$

В предположении невырожденности это уравнение имеет решения, зависящие лишь от переменных действия: $\rho = \rho (J_1, \ldots, J_n).$ Оказывается, все такие инвариантные меры лиувиллевы [5]: они получаются возведением в $n$-ую степень дифференциала 1-формы $\varphi = \sum \partial K / \partial \omega_k d\varphi_k$ из п. Г. Если принять за переменные действие $J$ частоты $\omega$, то свойство лиувиллевости меры с плотностью $\rho (J)$ эквивалентно уравнению

$$\text{det} \left| \frac{\partial^2 K}{\partial J_i \partial J_j} \right| = \rho (J).$$
Это классическое уравнение Монжа — Ампера, которое, как известно, локально разрешимо относительно функции $K$ при условии положительности функции $\rho$.

Е. Согласно теореме Крылова — Богословкия, любая динамическая система на компактном многообразии имеет хотя бы одну инвариантную меру (см. [7], современное изложение — в [8]). Однако, в общем случае эти меры сингулярные и никак не связаны с гладкой структурой фазового пространства: они могут быть сосредоточены на конечном числе траекторий (например, асимптотически устойчивых положений равновесия).

Укажем некоторые общие условия существования у системы (1) инвариантной меры с гладкой плотностью. Уравнение Лиувилля (17) с учетом положительности плотности $\rho$ можно переписать в виде

$$\dot{f} = - \text{div} \, v, \quad \text{где} \quad f = \ln \rho.$$  \hspace{1cm} (18)

Ясно, что $f$ — гладкая функция на $M$.

По теореме о выпрямлении траекторий (восходящей к Пуанкаре), в малой окрестности неособой точки систему (1) можно привести к следующему виду

$$\dot{z}_1 = 1, \quad \dot{z}_2 = \ldots = \dot{z}_n = 0.$$  \hspace{1cm} (19)

Следовательно, локально система (1) допускает целое семейство инвариантных мер: их плотности — произвольные функции от $z_2, \ldots, z_n$. Таким образом, задачу об интегральном инварианте имеет смысл рассматривать или в окрестности положений равновесия, или же в достаточно больших областях фазового пространства, где траектория обладает свойством возвращаемости (например, во всем $M^n$).

**Теорема 2** ([9]). Пусть $t \mapsto x(t)$ — решение системы (1) с компактным замыканием его траектории. Если система (1) допускает инвариантную меру с гладкой плотностью, то существует

$$\lim_{s \to -\infty} \frac{1}{s} \int_{0}^{s} (\text{div} \, v)_{x(t)} \, dt = 0.$$  \hspace{1cm} (20)

Доказательство этого утверждения простое. Пусть $x(t) \in D$ и $D$ — компактная подобласть $M$. Согласно (18)

$$\lim_{s \to -\infty} \frac{1}{s} \int_{0}^{s} (\text{div} \, v) \, dt = \lim_{s \to -\infty} \frac{f(x(0)) - f(x(s))}{s} = 0,$$

так как непрерывная функция $f$ ограничена сверху и снизу на множестве $D$.

Отметим ряд следствий теоремы 1.
Следствие 1. Пусть \( x = 0 \) — равновесное решение нелинейной системы
\[
\dot{x} = \Lambda x + \ldots.
\] (21)
Если \( \text{tr} \Lambda \neq 0 \), то эта система не имеет в окрестности точки \( x = 0 \) интегрального инварианта с гладкой положительной плотностью.

Действительно, в этом случае \( (\text{div} \, v)_{x=0} = \text{tr} \Lambda \). Остается воспользоваться формулой (20) для решения \( x(t) \equiv 0 \).

Интересно отметить, что условие \( \text{tr} \Lambda = 0 \) означает сохранение стандартной формы объема в \( \mathbb{R}^n \) фазовым потоком линейной системы \( \dot{x} = \Lambda x \). Таким образом, если линейная система с постоянными коэффициентами имеет хотя бы одну инвариантную меру, то она обязательно допускает стандартную инвариантную меру (с единичной плотностью). В работе [9] указаны применения следствия 1 для некоторых задач неограниченной динамики.

Предположим теперь, что система (1) на \( M^n, \, n = m + k \) имеет \( k \)-мерный инвариантный тор \( T^k \), заполненный траекториями условно периодических движений. В малой окрестности этого тора можно ввести координаты \( x_1, \ldots, x_k \mod 2\pi, \, y_1, \ldots, y_m \), в которых уравнения (1) примут вид
\[
\dot{x} = \omega + f(x, y), \quad \dot{y} = \Omega y + g(x, y).
\] (22)
Здесь \( \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k) \) — нерезонансный набор частот условно-периодических движений на \( T^k \), \( f(x, 0) = 0, \, g(x, y) = O(|y|^2) \). Инвариантный тор задается, очевидно, уравнением \( y = 0 \). Элементы квадратной матрицы \( \Omega \) порядка \( m \) \( 2\pi \)-периодически зависят от \( x_1, \ldots, x_n \).

Следствие 2. Если система (22) допускает инвариантную меру с гладкой плотностью, то
\[
\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} (\text{tr} \, \Omega) \, dx_1 \ldots dx_n = 0.
\] (23)

Действительно, согласно теореме Г. Вейля,
\[
\lim_{s \to -\infty} \frac{1}{s} \int_0^s (\text{div} \, v) \, dt = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{T^k} (\text{tr} \, \Omega) \, d^k x
\]
для решений \( x = \omega t + x_0, \, y = 0 \). Остается воспользоваться теоремой 2.

При \( k = 0 \) матрица \( \Omega \) имеет постоянные элементы и мы приходим к следствию 1: сумма собственных чисел матрицы \( \Lambda \) равна нулю. Согласно теореме Флока—Ляпунова, при \( k = 1 \) с помощью линейной замены координат \( y \), \( 2\pi \)-периодической по \( x \), матрицу \( \Omega \) можно привести к постоянной матрице. Собственные числа матрицы \( \exp(2\pi \Omega/\omega) \)
называются мультипликаторами периодической траектории $T^1 (k = 1)$. Следствие 2 дает нам необходимое условие существования инвариантной меры в окрестности периодической траектории: произведение ее мультипликаторов равно единице.

Если матрицу $\Omega$ можно привести к постоянной, то такой инвариантный тор называется приводимым. Обсуждение задачи о приводимости торов при $k > 1$ можно найти в работах [10, 11]. Для приводимых торов условие (23) переходит в простое равенство $\text{tr} \, \Omega = 0$.

Следствие 1 допускает некоторое уточнение. Вычислим дивергенцию правой части системы (21) и разложим ее в ряд Маклорена

$$ - \text{div} \, v = \text{tr} \, \Lambda + (a, x) + \ldots $$

Здесь $a$ — некоторый постоянный вектор из $\mathbb{R}^n$.

**Предложение 3 ([9]).** Пусть $X = \Lambda^T$, $Y = \|X, a\|$. Если $\text{rank} \, X < \text{rank} \, Y$, то система (21) не имеет инвариантной меры в окрестности точки $x = 0$.

Если матрица $\Lambda$ невырождена, то ранги матриц $X$ и $Y$ заведомо совпадают.

В приложениях встречаются системы с однородными правыми частями: $v(\lambda x) = \lambda^k v(x)$ с некоторым целым $k \geq 1$. Для таких систем критерий существования инвариантной меры с гладкой плотностью дает

**Предложение 4 ([12]).** Система дифференциальных уравнений с однородными правыми частями имеет инвариантную меру в том и только том случае, когда ее фазовый поток сохраняет стандартную меру. При этом плотность инвариантной меры является ее первым интегралом.

Укажем любопытное применение этого утверждения к уравнениям Эйлера — Пуанкаре на алгебрах Ли, которые описывают геодезические линии на группах Ли с левоинвариантной метрикой (или, что то же самое, движение по инерции механической системы, кинетическая энергия которой инвариантна при левых сдвигах на группе Ли — конфигурационном пространстве системы). Уравнения Эйлера — Пуанкаре, как известно [13], имеют следующий вид:

$$ \dot{m}_i = \sum c^i_{ik} m_k \omega_k, \quad m = \sum I_{sp} \omega_p. $$

Здесь $c^i_{ik}$ — структурные постоянные алгебры Ли $g$, $\omega$ (скорость системы) — вектор из $g$, а $m$ (кинетический момент) — вектор из двойственного пространства $g^*$, $I = \|I_{sp}\|$ — тензор инерции системы. Пусть $g$ — алгебра Ли группы $G$ — конфигурационного пространства рассматриваемой системы.
Теорема 3 ([12]). Уравнения Эйлера — Пуанкаре имеют инвариантную меру с гладкой плотностью тогда и только тогда, когда группа \( G \) унимодулярна.

Напомним, что унимодулярность группы означает наличие меры \( \text{Haara} \), которая не меняется при левых и правых сдвигах группы \( G \). Аналитический критерий унимодулярности имеет следующий вид: для каждого \( i \) выполнено равенство \( \sum c_{ik}^k = 0 \), где \( c \) — структурные постоянные алгебры Ли группы \( G \).

В работе [12] указаны условия наличия инвариантной меры в более общем случае, когда на систему наложены левоинварианты неголономные связи. Инвариантные меры систем с правоинвариантными связями изучены в [14].

Ж. Задача об инвариантных мерах возмущенных уравнений (15) рассмотрена в работе [9] (даже в более общей ситуации, когда количество медленных и быстрых переменных не совпадает). Ограничиваем рассмотрением простейшего из нетривиальных случаев, когда имеется одна медленная \( z \) и две быстрых угловых переменных \( x \) и \( y \). Уравнения будут иметь следующий вид:

\[
\dot{x} = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots, \quad \dot{y} = v_0 + \varepsilon v_1 + \ldots, \quad \dot{z} = \varepsilon w_1 + \ldots \tag{24}
\]

Здесь \( \varepsilon \) — малый параметр \( u_0 \) и \( v_0 \) зависят только от \( z \). Правые части этих уравнений — ряды по \( \varepsilon \), коэффициенты которых — аналитические функции по \( x, y, z, 2\pi \)-периодические по \( x \) и \( y \). Можно считать, что коэффициенты определены и аналитичны в прямом произведении \( \Delta \times \mathbb{T}^2 \), где \( \Delta \) — интервал в \( \mathbb{R} = \{ z \} \), а \( \mathbb{T}^2 = \{ x, y \mod 2\pi \} \).

Будем искать решение уравнения (18) в виде ряда по степеням \( \varepsilon \)

\[
f = f_0 + \varepsilon f_1 + \ldots
\]

с аналитическими в \( \Delta \times \mathbb{T}^2 \) коэффициентами. Приравнивая в уравнении (18) коэффициенты при одинаковых степенях \( \varepsilon \), получим следующую цепочку уравнений:

\[
\frac{\partial f_0}{\partial x} u_0 + \frac{\partial f_0}{\partial y} v_0 = 0,
\]

\[
\frac{\partial f_0}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f_0}{\partial y} v_1 + \frac{\partial f_0}{\partial z} w_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x} u_0 + \frac{\partial f_1}{\partial y} v_0 = - \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right). \tag{25}
\]

При \( \varepsilon = 0 \) система (24) будет вполне интегрируемой: фазовое пространство \( \Delta \times \mathbb{T}^2 \) расслоено на инвариантные торы \( z = \text{const} \).
условно-периодическими движениями. Невозмущенную систему будем называть ненесложенной, если отношение частот \( u_0/v_0 \) — непостоянная функция от \( z \); другими словами, \( u_0/v_0 - u_0 v_0' \neq 0 \) на интервале \( \Delta \).

Для ненесложенных систем из первого уравнения (25) вытекает, что \( f_0 \) — функция только от переменной \( z \). Пусть черта обозначает усреднение по переменным \( x, y \):

\[
\bar{F} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x, y, z) \, dx \, dy.
\]

Применяя операцию усреднения ко второму уравнению системы (25), получим

\[
\frac{df_0}{dz} \bar{w}_1 = - \frac{d\bar{w}_1}{dz}.
\]

Это соотношение приводит нас к принципу усреднения, установленному в [9]: функция \( \bar{f}_0 \) является плотностью интегрального инварианта усредненной системы

\[
\bar{z} = \varepsilon \bar{w}_1.
\] (26)

Переход от полной системы (24) к усредненной (26) является стандартным приемом теории возмущений. Отметим одно из следствий принципа усреднения: если функция \( \bar{w}_1 \) имеет изолированный нуль, то полная система (24) не допускает инвариантной меры с плотностью \( \rho = \exp f \), где \( f \) задана в виде ряда (25).

Положим

\[
w_1 = \sum W_{mn}(z) \exp [i(mx + ny)]
\]

\[
\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = - \sum G_{mn}(z) \exp [i(mx + ny)]
\]

\[
f_1 = \sum F_{mn}(z) \exp [i(mx + ny)].
\]

Приравнивая во втором уравнении (25) коэффициенты при одинаковых гармониках, приходим к серии равенств

\[
f_0 W_{mn} + i(mu_0 + nv_0) F_{mn} = G_{mn}.
\] (27)

Предположим, что при \( z = z_0 \) выполнено нетривиальное резонансное соотношение \( mu_0 + nv_0 = 0 \) с некоторыми целыми \( m, n \). Если \( W_{mn}(z_0) = 0 \), а \( G_{mn}(z_0) \neq 0 \), то уравнение (27) противоречиво и исходная система (24) не допускает меры с однозначной плотностью, аналитической по параметру \( \varepsilon \).

Пусть \( W_{mn}(z_0) \neq 0 \). Заметим, что при \( z = z_0 \), очевидно, будут справедливы соотношения

\[
f_0' W_{km, kn} = G_{km, kn}, \quad k \in \mathbb{Z}.
\]
Если хотя бы при одном целом $k$

$$W_{m,n}G_{kn,km} \neq W_{km,kn}G_{m,n},$$

то система (24) также не имеет инвариантных мер с однозначными и аналитическими плотностями.

Этот метод применен в работе [9] для изучения условий существования инвариантных мер уравнений неголономной механики. Более точно, рассматривается механическая система с конфигурационным пространством в виде трехмерного тора $T^3 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \bmod 2\pi\}$, лагранжианом $L = (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2)/2$ (внешние силы отсутствуют) и связью

$$\dot{\varphi}_3 = \varepsilon(a_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \dot{\varphi}_2). \quad (28)$$

Здесь $\varepsilon$ — малый параметр. При $\varepsilon = 0$ связь (28) будет интегрируемой и мы имеем обычную голономную систему, обладающую инвариантной мерой (согласно классической теореме Лиувилля). В общем случае (когда $\varepsilon \neq 0$) связь (28) будет, конечно, неинтегрируемой. Системы со связями вида (28) Я. В. Татаринов предложил назвать слабо неголономными.

С точностью до членов $o(\varepsilon)$ уравнения движения имеют следующий вид:

$$\dot{\varphi}_1 = J_1, \quad \dot{\varphi}_2 = J_2, \quad \dot{\varphi}_3 = \varepsilon(a_1 J_1 + a_2 J_2), \quad \dot{J}_1 = \dot{J}_2 = 0.$$  

Медленными переменными будут частоты $J_1$ и $J_2$, а также угловая координата $\varphi_3$. Здесь невозмущенная система оказывается вырожденной, однако к ней можно применить указанный выше метод поиска плотности инвариантной меры в виде ряда по степеням $\varepsilon$.

Результаты анализа этой задачи можно сформулировать в следующей геометрической форме. Множество всех систем с лагранжианом $L$ и связью (28) имеет естественную структуру бесконечномерного линейного пространства (изоморфного пространству пар функций $a_1$ и $a_2$ на трехмерном торе). Обозначим это пространство $K$. Все системы, обладающие инвариантной мерой (в первом приближении по $\varepsilon$), образуют линейное подпространство $K' \subset K$. Точно также, системы с интегрируемой связью (28) образуют линейное подпространство $K''$. Действительно, условия интегрируемости соотношения (28) в первом приближении по $\varepsilon$ имеет вид

$$\frac{\partial a_1}{\partial \varphi_2} = \frac{\partial a_2}{\partial \varphi_1}.$$  

Оно линейно по $a_1$ и $a_2$. По теореме Лиувилля, $K'' \subset K'$. Оказывается,

$$\dim K/K' = \infty, \quad \dim K'/K'' = \infty.$$
Первое соотношение показывает, что наличие инвариантной меры с гладкой плотностью является редким исключением среди неголономных систем. Второе соотношение указывает на существование массивного множества неголономных систем с инвариантной мерой, не сводящихся к голономным системам. Среди них имеются, в частности, системы Чаплыгина (для которых функции $a_1$ и $a_2$ не зависят от $\varphi_3$), которые в первом приближении по $\varepsilon$ удовлетворяют всем условиям применимости метода приводящего множителя, гарантирующего существоование интегрального инварианта (см. [15]). Было бы интересным выяснить, справедливы ли эти заключения при малых фиксированных значениях $\varepsilon \neq 0$ (а не только в первом приближении по параметру $\varepsilon$).

З. Идея Пуанкаре о связи задачи о линейных интегральных инвариантах с проблемой малых знаменателей [1, п. 257] реализована в работе [16]. В ней рассмотрена система уравнений (24) с малым параметром $\varepsilon$, которая часто встречается в теории нелинейных колебаний.

В [16] рассмотрена задача об условиях существования у системы (24) относительно интегрального инварианта

$$\int \varphi_\varepsilon,$$

(29)

причем коэффициенты 1-формы $\varphi_\varepsilon$ — однозначные аналитические функции на $\Delta \times T^2$, аналитически зависящие от $\varepsilon$. Конечно, следует исключить тривиальный случай, когда

$$d\varphi_\varepsilon = 0.$$

(30)

При этом условии интеграл (29) тождественно равен нулю в силу теоремы Стокса.

Разложим функцию $w_1$ в двойной ряд Фурье:

$$w_1 = \sum W_{mn}(z) \exp [i(mx + ny)].$$

Введем множество $\mathcal{P} \subset \Delta$, состоящее из точек $z$, таких, что

1) $\mu w_0(z) + \nu v_0(z) = 0$ для некоторых целых $m$, $n$, не равных одновременно нулю,

2) $W_{mn}(z) \neq 0$.

Такие множества впервые рассматривались Пуанкаре в связи с проблемой интегрируемости уравнений Гамильтона [1, гл. V].

Теорема 4 ([16]). Предположим, что

(A) множество $\mathcal{P}$ имеет предельную точку $z_*$, внутри $\Delta$,

(B) $u'_0 v_0 - u_0 v'_0 |_{z_*} \neq 0$,

(C) $W_{00}(z) \neq 0$.

Тогда система (24) не имеет нетривиальных интегральных инвариантов вида (29).
Условие (B) означает невырожденность невозмущенной системы (когда \( \varepsilon = 0 \)): отношение частот \( u_0/v_0 \) непостоянно. Кроме того, из (B) вытекает, что при \( z = z_* \) и \( \varepsilon = 0 \) правые части (24) не обращаются в нуль. Условия (A)+(B) гарантируют отсутствие непостоянных аналитических интегралов и нетривиальных полей симметрий, аналитических по \( \varepsilon \) [16].

Можно попытаться применить теорему 4 к гамильтоновым системам, мало отличающимися от вполне интегрируемых. Здесь речь может идти о системах с двумя степенями свободы, порядок которых понижен на единицу с помощью интеграла энергии. Применя метод Уитткера, приведенной системе можно придать вид неавтономной гамильтоновой системы с периодическим по времени гамильтонианом (см. [17, гл. 1]).

Итак, рассмотрим уравнение Гамильтона

\[
\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial z}, \quad \dot{z} = -\frac{\partial H}{\partial y},
\]

\[ H_\varepsilon = H_0(z) + \varepsilon H_1(x, y, z) + \ldots \]  

Здесь \( y \mod 2\pi \), \( z \) — канонические переменные действие-угол невозмущенной системы, функция \( H \) считается 2\( \pi \)-периодической по «времени» \( x = t \).

Для системы (31) имеем:

\[
u_0 = 1, \quad v_0 = \frac{\partial H_0}{\partial z}, \quad w_1 = -\frac{\partial H_1}{\partial y}.\]

Следовательно, условие (B) эквивалентно невырожденности невозмущенного гамильтониана:

\[
\frac{d^2 H_0}{dz^2} \neq 0.
\]

Множество \( \mathcal{P} \), очевидно, совпадает с множеством

\[
\left\{ z \in \Delta : \frac{dH_0}{dz} = -\frac{n}{m}, \ H_{mn} \neq 0 \right\},
\]

где \( H_{mn} \) — коэффициенты Фурье возмущающей функции \( H_1 \). Из (32) вытекает, что условие (C) для гамильтоновых систем никогда не выполняется \( (W_{00} \equiv 0) \). Впрочем, это не удивительно: уравнения (31) имеют интегральный инвариант Пуанкаре — Кардана

\[
\int z \, dy - H_\varepsilon \, dx.
\]

Очевидно, этот инвариант нетривиальный (условие вырождения (30) не выполняется).

Укажем достаточные условия несуществования второго интегрального инварианта. Для этого нам потребуется
Лемма 1 ([16]). Пусть выполнены условия (A) и (B) теоремы 1. Тогда найдется функция
\[ \lambda_\varepsilon = \lambda_0(z) + \varepsilon \lambda_1(z) + \ldots, \]
tакая, что
\[ d\varphi_\varepsilon = i_v(\lambda_\varepsilon \Omega), \tag{36} \]
где \( v_\varepsilon \) — векторное поле (24), \( \Omega = dx \land dy \land dz \).

Покажем, как отсюда выводится заключение теоремы 4. Проинтегрируем 2-формы в обеих частях (36) по двумерному тору \( z = \text{const} \). По теореме Стокса интеграл от формы \( d\varphi \) равен нулю, а интеграл справа равен
\[ \lambda_\varepsilon W_{00} + o(\varepsilon). \]
Применяя условия (C), получаем, что \( \lambda_\varepsilon = 0 \). Поэтому равенство (36) будет совпадать с условием выражения (30).

Лемма 2. Если выполнено (36), то 3-форма \( \lambda \Omega \) порождает абсолютный интегральный инвариант системы (24).

Действительно,
\[ 0 = dd\varphi = di_v(\lambda \Omega) = di_v(\lambda \Omega) + i_v d(\lambda \Omega) = L_v(\lambda \Omega). \]

Лемма 3. Предположим, что система (24) имеет еще один абсолютный инвариант, порождаемый 3-формой \( \lambda' \Omega \), причем \( \lambda' \neq 0 \). Тогда отношение \( \lambda / \lambda' \) интеграл уравнений (24).

Этот простой факт (правда, в других терминах) был отмечен Якоби в его «Лекциях по динамике».

Хорошо известно, что фазовый поток уравнений Гамильтона (31) сохраняет «стандартную» 3-форму объема \( \Omega \). Более того, для 1-формы «энергии-импульса» из (35) справедливо равенство (36), причем \( \lambda_\varepsilon = 1 \).

Теорема 5 ([6]). Пусть выполнено условие (33), а множество (34) имеет предельную точку внутри интервала \( \Delta \). Тогда любой условный интегральный инвариант (29) гамильтоновой системы (31) отличается от инварианта Пуанкаре — Картана (35) постоянным множителем \( c_\varepsilon \).

Доказательство. Предположим, что имеется интегральный инвариант вида (29) системы (31). Так как выполнены условия (A) и (B) теоремы 4, то справедливо равенство (36). Учтем теперь, что \( L_0 \Omega = 0 \). Тогда, по леммам 2 и 3, множитель \( \lambda_\varepsilon \) в (36) — интеграл системы (31). Однако, при условиях теоремы 5, \( \lambda_\varepsilon = c_\varepsilon = \text{const} \) [17, гл. 1]. Итак,
\[ d\varphi_\varepsilon = c_\varepsilon d(z dy - H_\varepsilon dx). \]
Отсюда вытекает, что значения интегралов (29) и (35) на гомологических нуля циклах отличаются множителем $c_\epsilon$. Что и требовалось.

Замечание. Предположим, что
1) $u_0'v_0 - u_0v_0' \neq 0$,
2) $P$ всюду плотно в $\Delta$,
3) система (24) допускает нетривиальный инвариант (29). Можно показать, что тогда любой другой условный интегральный инвариант системы (24) отличается от (29) постоянным множителем, аналитически зависящим от $\epsilon$.

Теорему 5 можно применить к плоской круговой ограниченной задаче трех тел. Малым параметром $\epsilon$ здесь служит отношение массы Юпитера к массе Солнца. Динамика третьего тела ничтожно малой массы (астероида) во вращающейся системе отсчета (где Солнце и Юпитер неподвижны) описывается уравнениями Гамильтона [18]

$$
\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \quad k = 1, 2, 
$$

$$
H = H_0 + \epsilon H_1 + \ldots, \quad H_0 = -\frac{1}{2p_1^2} - p_2.
$$

(37)

Разложение возмущающей функции в двойной ряд Фурье было найдено Леверье. Оно имеет следующий вид:

$$
H_1 = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} h_{uv} \cos [uq_1 - v(q_1 + q_2)].
$$

Коэффициенты $h_{uv}$, зависящие от $p_1$, $p_2$, вообще говоря, отличны от нуля. Принимая угловую переменную $q_2$ за новое «время» и применяв процедуру понижения порядка Уиттекера, приходим к уравнениям Гамильтона вида (31). При этом

$$
H_0(z) = -\frac{1}{z_2}.
$$

Так что условие (33) выполнено автоматически. Можно показать, что множество $P$ заведомо всюду плотно на полуоси $z > 0$. Таким образом, приведенные уравнения Гамильтона ограниченной задачи трех тел не имеют новых относительных интегральных инвариантов, аналитических по параметру $\epsilon$ и независимых от инварианта Пуанкаре — Картана.

И. Теорема 4 применена в работе [16] для выяснения причины отсутствия линейных условных интегральных инвариантов для течений вязкой несжимаемой жидкости. Как известно, в невязком случае сохраняется циркуляция жидкости по подвижному контуру. Это —
знаменитая теорема Гельмгольца — Томсона, которая с разных точек зрения обсуждалась Картаном в его книге.

Течение однородной жидкости (плотность $\rho$ постоянна) в потенциальном силовом поле описывается уравнением Навье — Стокса

$$\frac{dv}{dt} = -\text{grad} \left( \frac{p}{\rho} + V \right) + \nu \Delta v.$$  \hspace{1cm} (38)

Здесь $v$ — поле скоростей, $p$ — давление, $V$ — потенциальная энергия поля сил, $\nu$ — коэффициент вязкости. Для простоты мы будем писать $p$ вместо $p/\rho + V$. В силу предположения об однородности, уравнение неразрывности сводится к условию несжимаемости

$$\text{div} \, v = 0.$$  \hspace{1cm} (39)

Мы будем рассматривать стационарные течения, когда поле скоростей $v$ и функция $p$ не зависят явно от времени. В этом случае поле $v$ порождает бездивергентную динамическую систему

$$\dot{x} = v(x),$$  \hspace{1cm} (40)

фазовый поток которой сохраняет стандартный объем в $\mathbb{R}^3 = \{x\}$.

Пусть $u$, $v$, $w$ — компоненты векторного поля $v$. Нетрудно понять, что уравнения (38)–(39) допускают следующие частные решения:

$$u_0 = \alpha z + \xi, \quad v_0 = \beta z + \eta, \quad w_0 = 0, \quad p = p_0,$$

$$\alpha, \beta, \xi, \eta, p_0 = \text{const}.$$  \hspace{1cm} (41)

Решение (41) соответствует сдвиговому плоско-параллельному течению.

Будем искать стационарные решения системы уравнений (38)–(39) в виде степенных рядов

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots, \quad v = v_0 + \varepsilon v_1 + \ldots, \quad w = \varepsilon w_1 + \ldots, \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \ldots$$  \hspace{1cm} (42)

Здесь $\varepsilon$ — малый параметр, а коэффициенты — аналитические функции от $x$, $y$, $z$, $2\pi$-периодические по $x$, $y$. Подставляя ряды (42) в (38)–(39) и приравнивая коэффициенты при $\varepsilon$, мы получаем следующую линейную систему:

$$u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + w_1 \alpha + \frac{\partial p_1}{\partial x} = \nu \Delta u_1,$$

$$u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} + w_1 \beta + \frac{\partial p_1}{\partial y} = \nu \Delta v_1,$$

$$u_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial p_1}{\partial z} = \nu \Delta w_1,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0.$$  \hspace{1cm} (43)
Добавление

Будем решать эту систему методом Фурье. Обозначая коэффициенты Фурье функций $u_1, v_1, w_1, p_1$ через $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, P_{mn}$ соответственно, получим линейные уравнения

$$i\left[m(\alpha z + \xi) + n(\beta z + \eta)\right] U_{mn} + \alpha W_{mn} + imP_{mn} =$$
$$= \nu\left[-(m^2 + n^2) U_{mn} + U''_{mn}\right],$$
$$i\left[m(\alpha z + \xi) + n(\beta z + \eta)\right] V_{mn} + \beta W_{mn} + inP_{mn} =$$
$$= \nu\left[-(m^2 + n^2) V_{mn} + V''_{mn}\right],$$
$$i\left[m(\alpha z + \xi) + n(\beta z + \eta)\right] W_{mn} + P'_{mn} =$$
$$= \nu\left[-(m^2 + n^2) W_{mn} + W''_{mn}\right],$$
$$i(m U_{mn} + n V_{mn}) + W'_{mn} = 0.$$

Если $\nu \neq 0$, то уравнения (44) образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая имеет второй порядок относительно $U_{mn}, V_{mn}$ и первый относительно $W_{mn}$ и $P_{mn}$. Следовательно, для однозначного определения этих коэффициентов мы должны задать их значения и значения производных $U'_{mn}, V'_{mn}$ в некоторой точке $z = z_0$.

Коэффициенты Фурье функций $u_k, v_k, w_k$ и $p_k$ ($k \geq 2$) можно найти по индукции. Вопрос о сходимости рядов (42) является содержательной проблемой, которая, однако, решается положительно для так называемых ползучих течений (или течений Стокса), когда в уравнениях (38) пренебрегают производной $\dot{\psi}$ [16].

Принимая во внимание разложения (42), мы видим, что система (40) имеет как раз вид (24) и поэтому к ней можно попробовать применить теорему 4. Прежде всего проверим условие (A). Ясно, что

$$mu_0 + nv_0 = (m\alpha + n\beta) z + m\xi + n\eta \equiv 0$$

только если одновременно

$$m\alpha + n\beta = 0, \quad m\xi + n\eta = 0.$$ 

Поскольку $m^2 + n^2 \neq 0$, то $\alpha\eta - \beta\xi = 0$. Поэтому, если

$$\alpha\eta - \beta\xi \neq 0,$$

то невозмущенная система невырождена.

Обсудим теперь условие (В). Ясно, что $mu_0 + nv_0 = 0$ в точке

$$z_{mn} = -\frac{m\xi + n\eta}{m\alpha + n\beta}.$$ 

(45)

Конечно, мы можем исключить из рассмотрения пары целых чисел $m, n$, удовлетворяющих условию $m\alpha + n\beta = 0$. Напомним, что множество $\mathbb{P}$ состоит из точек $z_{mn}$, в которых $W_{mn} \neq 0$. Если $\nu \neq 0$, то
коэффициенты $W_{mn}$ в этих точках могут быть выбраны произвольными. Значит, в общем случае множество $\mathbb{P}$ всюду плотно на оси $\mathbb{R} = \{z\}$. Более точно, это условие может нарушаться на подпространстве бесконечной коразмерности в пространстве всех векторных полей (42). Согласно теореме 4, типичное стационарное течение вида (42) не допускает нетривиальных интегралов, полей симметрий и линейных интегральных инвариантов.

С этой точки зрения интересно рассмотреть случай идеальной жидкости, когда $\nu = 0$. Здесь происходит вырождение системы (44): первое и второе дифференциальные уравнения становятся алгебраическими. В точках $z_{mn}$ они принимают следующий вид:

$$a W_{mn} + im P_{mn} = 0, \quad \beta W_{mn} + in P_{mn} = 0.$$ 

Следовательно, если $\alpha n - \beta m \neq 0$, то $W_{mn}(z_{mn}) = 0$ и, следовательно, $z_{mn} \notin \mathbb{P}$. Поскольку $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, то мы видим, что в случае $\alpha n - \beta m = 0$ все точки (45) совпадают. Таким образом, множество $\mathbb{P}$ состоит не более, чем из одной точки, и, следовательно, для идеальной жидкости условие (B) не выполняется.

К. Идеи Картана о связи интегральных инвариантов с симметриями дифференциальных уравнений развиты в работе [6]. Вернемся вновь к системе (1) и будем считать, что $M$ — трехмерное многообразие, $v$ — гладкое касательное векторное поле без особых точек. Более того, предположим, что система (1) допускает инвариантную форму объема $\Omega$:

$$L_v \Omega = 0.$$ 

Форма объема задает каноническую ориентацию $M$. Если $M$ компактно, то можно считать, что

$$\int_M \Omega > 0.$$ 

В частности, форма $\Omega$ определяет гладкую инвариантную меру системы (1).

Наиболее важный пример систем указанного вида дают гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Здесь $M^3$ — связная компонента неосоей поверхности уровня функции Гамильтона, $v$ — ограничение гамильтонова поля на $M$, форма объема определяется инвариантной 4-формой Лиувилля (подробности см., например, в [19]).

Лемма 4. (Картан [2, п. 91]) При выполнении предположений 2-форма

$$\Phi = i_v \Omega$$ 

замкнута и порождает абсолютный интегральный инвариант системы (1).
Действительно,
\[ d\Phi = d_i \Omega = L_\nu \Omega - i_\nu d\Omega = 0, \]
\[ L_\nu \Phi = L_\nu i_\nu \Omega = i_\nu L_\nu \Omega = 0. \]
Так как форма (46) замкнута, то локально
\[ \Phi = d\varphi. \]
Поскольку \( i_\nu \Phi = 0, \) то
\[ L_\nu \varphi = i_\nu d\varphi + di_\nu \varphi = d(i_\nu \varphi). \]
Следовательно, 1-форме \( \varphi \) отвечает «локальный» относительный интегральный инвариант.

Если класс когомологий 2-формы \( \Phi \) равен нулю, то 1-форма \( \varphi \) корректно определена в целом. В частности, это заведомо так, если
\[ H^2(M, \mathbb{R}) = 0. \] (47)

Эти рассуждения фактически содержатся в [2, п. 91]. Правда, там обсуждается случай, когда \( M = \mathbb{R}^3 \).

В дальнейшем всюду предполагается, что для многообразия \( M^3 \) справедлива теорема о разбиении единицы. В частности, сюда относятся компактные многообразия.

Лемма 5. Пусть \( \Psi \) — гладкая 2-форма на \( M \). Найдется векторное поле \( x \mapsto u(x) \) такое, что
\[ \Psi = i_u \Omega. \] (48)

Действительно, пусть \{\( \lambda_\alpha(x) \)\} — разбиение единицы, подчиненное некоторому открытому покрытию \( M \). Считается, что в областях \( \lambda_\alpha \) можно ввести координаты «в целом». Легко проверить, что в области \( \text{supp} \lambda_\alpha \) для 2-формы \( \lambda_\alpha \Psi \) алгебраическое уравнение (48) имеет единственное гладкое решение \( u_\alpha \) такое, что
\[ \text{supp} u_\alpha \subset \text{supp} \lambda_\alpha. \]

Остаётся положить
\[ u(x) = \sum \alpha u_\alpha(x). \]

Замечание. В аналитическом случае поле \( u \), конечно, будет аналитическим.

Лемма 6. Предположим, что система (1) имеет условный интегральный инвариант
\[ \oint \varphi. \]
Положим
\[ d\varphi = i_u \Omega. \] (49)
Тогда векторное поле \( u \) является полем симметрий: \([u, v] = 0\).
Доказательство. По определению условного инварианта

\[ L_v \phi = \psi, \quad d\psi = 0. \]

Следовательно,

\[ 0 = dL_v \phi = L_v d\phi = L_v i_u \Omega = (L_v i_u - i_u L_v) \Omega = i_{[v,u]} \Omega. \]

Так как форма объема невырождена, то поля \( u \), \( v \) коммутируют. Что и требовалось.

Замечание. Лемма 6 остается справедливой, если в (49) заменить форму \( d\phi \) любой замкнутой 2-формой. Условия существования нетривиальных полей симметрий (когда векторы \( u(x) \) и \( v(x) \) независимы почти всюду) уравнений Гамильтона получены в [20].

Лемма 6 имеет важные приложения к гамильтоновой механике. В качестве примера рассмотрим геодезический поток на замкнутой двумерной поверхности \( \Sigma \). Он определяется заданием римановой метрики. Уравнения геодезических на \( \Sigma \) описываются уравнениями Гамильтона, причем гамильтонианом \( H \) служит риманова метрика, представленная в канонических координатах на \( T^* \Sigma \). Хорошо известно, что при положительных значениях полной энергии \( h \) гамильтоновы системы на трехмерных энергетических поверхностях

\[ \{ x \in T^* \Sigma : H(x) = h \} \]

изоморфны. Обычно полагают \( h = 1 \); соответствующая динамическая система называется геодезическим потоком на \( \Sigma \). Ясно, что геодезический поток имеет относительный интегральный инвариант Пуанкаре — Картана.

Теорема 6 ([6]). Пусть \( \Sigma \) — аналитическая поверхность рода >1 с аналитической римановой метрикой. Любой условный инвариант геодезического потока на \( \Sigma \), определяемый аналитической 1-формой на (50), пропорционален инварианту Пуанкаре-Картана.

Доказательство. Пусть \( \Omega \) — инвариантная аналитическая 3-форма объема на (50). Если геодезический поток имеет условный интегральный инвариант, определяемый аналитической 1-формой \( \phi \), то (по лемме 6) найдется аналитическое поле симметрий \( u \). Однако, геодезический поток на аналитической поверхности не имеет нетривиальных симметрий [21]:

\[ u = c v, \quad c = \text{const}. \]

Но тогда, согласно (49),

\[ d\phi = c i_v \Omega. \]

Следовательно, рассматриваемый условный интегральный инвариант отличается от инварианта Пуанкаре — Картана постоянным множителем \( c \).
Теорема доказана.

В заключении этого пункта укажем еще на одно приложение полученных результатов к одному из ограниченных вариантов задачи трех тел. Пусть два массивных тела одинаковой массы обращаются вокруг их общего центра масс по эллиптическим орбитам с ненулевым эксцентриситетом, а третье тело ничтожно малой массы все время движется по прямой, ортогональной плоскости массивных тел (подробности см. в [22]). Эта задача предложена А. Н. Колмогоровым для проверки возможности комбинаций финальных движений трех тел по классификации Шази.

Динамика пылинки описывается неавтономной гамильтоновой системой вида (32) с периодическим гамильтонианом. Расширенное фазовое пространство совпадает с прямым произведением

$$T \times \mathbb{R}^2 = \{x \mod 2\pi, y, z\}.$$ 

Разумеется, эта система имеет инвариант Пуанкаре — Картана (35).

Задача А. Н. Колмогорова неинтегрируема: она не допускает несамостоятельных аналитических интегралов [22]. Причина заключается в квазислучайном характере поведения ее траекторий. В частности, имеется бесконечное число невырожденных долгопериодических траекторий. Как показано в [20], отсюда вытекает отсутствие нетривиальных аналитических полей симметрий: $u = c v$, $c = \text{const}$. Применяя лемму 6, получаем, что уравнения рассматриваемой задачи не допускают новых условных интегральных инвариантов. Аналогично доказывается отсутствие новых аналитических инвариантов на фиксированных энергетических многообразиях с большой отрицательной энергией плоской круговой ограниченной задачи трех тел. Необходимые подготовительные результаты о структуре множества долгопериодических невырожденных траекторий установлены в [23] методами символической динамики.

Эти результаты, полученные в работе [6], доказывают гипотезу Пуанкаре об отсутствии новых интегральных инвариантов для различных вариантов ограниченной задачи трех тел.

Л. Теми же методами можно изучить вопрос об условиях инвариантов второго порядка:

$$\int_D \Phi.$$ 

Здесь $D$ — двумерный цикл в $M^3$, $\Phi$ — 2-форма. Условия инвариантности интеграла (51) имеет вид

$$L_\nu \Phi = \Psi, \quad d\Psi = 0.$$
Добавление

Для относительных инвариантов 2-форма Ψ точна, а для абсолютных инвариантов Ψ = 0.

Так как инвариантная 3-форма объема Ω невырождена, то

\[ dΦ = fΩ, \quad f : M^3 \to \mathbb{R} \quad (53) \]

Лемма 7. Функция \( f \) — интеграл системы (1) на \( M^3 \).

Действительно, применяя (52) и (53), получим:

\[
0 = dΨ - dL_vΦ = L_vdΦ = L_v(fΩ)
\]

\[
= (L_vf)Ω + fL_vΩ = \dot{f}Ω.
\]

Следовательно, \( \dot{f} = 0 \). Что и требовалось.

По лемме 4 система (1) имеет абсолютный инвариант \( i_vΩ \). Так что речь может идти о существовании еще одного интегрального инварианта.

Для дальнейшего полезно ввести понятие многозначного интеграла системы (1). Это замкнутая 1-форма \( θ \), такая, что

\[ i_vθ = 0. \quad (54) \]

Локально \( θ = dg \), причем

\[ \dot{g} = i_vdg = 0 \]

согласно (54). Таким образом, локально функция \( g \) является обычным интегралом системы (1). Если

\[ H^1(M, \mathbb{R}) = 0, \quad (55) \]

то функция \( g \) определена в целом и многозначный интеграл превращается в обычный интеграл системы (1). Так как \( \dim M = 3 \), то по теореме двойственности Пуанкаре условия (47) и (55) эквивалентны.

Всюду ниже рассматриваемые объекты \( (M, v, Ω, Φ) \) считаются аналитическими.

Теорема 7 ([6]). Пусть \( M^3 \) компактно и система (1) допускает условный интегральный инвариант (51), причем

\[ Φ \neq ci_vΩ, \quad c = \text{const}. \quad (56) \]

Тогда система (1) имеет нетривиальный многозначный интеграл \( θ \neq 0 \).

Доказательство. По лемме 7, функция \( f \) из равенства (53) — интеграл системы (1). Если \( f \neq \text{const} \), то теорема 7 доказана. Пусть \( f = α = \text{const} \). Интегрируя обе части равенства

\[ dΦ = αΩ \quad (57) \]
ДОБАВЛЕНИЕ

по компактному многообразию $M$ и применяя теорему Стокса, получаем

$$
\alpha \int_M \Omega = 0.
$$

Так как 3-форма $\Omega$ есть форма объема, то $\alpha = 0$. Следовательно, согласно (56), форма $\Phi$ замкнута.

Положим (лемма 5)

$$
\Phi = i_u \Omega.
$$

Так как 2-форма $\Phi$ замкнута, то по лемме 6, поле $u$ коммутирует с полем $v$. Возможны два случая: 1) векторы $u(x)$ и $v(x)$ линейно зависимы во всех точках $x \in M$, 2) эти векторы почти всюду независимы. Так как $v \neq 0$, то в первом случае

$$
u(x) = \lambda(x) v(x), \quad \lambda : M \to \mathbb{R}.$$

Поскольку $u$ — поле симметрий, то $\lambda$ — интеграл системы (1) [20]. Если $\lambda \neq \text{const}$, то теорема доказана. Случай $\lambda = \text{const}$ невозможен ввиду условия (56). Во втором случае, как доказано в [24], наличие нетривиального аналитического поля симметрий влечет существование аналитического многозначного интеграла $\vartheta \neq 0$. При этом используется трехмерность фазового пространства $M$ и наличие инвариантной 3-формы объема.

Теорема доказана.

Следствие 3. В предположениях теоремы 7 уравнение (1) явно интегрируется с помощью конечного числа алгебраических операций, дифференцирований и квадратур.

Дополнительные дифференцирования требуются для отыскания многозначного интеграла (см. также [24]).

Замечание. Теорема 7 справедлива и в случае, когда имеется линейный интегральный инвариант

$$
\int \varphi.
$$

Требуется только, чтобы 2-форма $\Phi = d\varphi$ удовлетворяла условию (56).

Поскольку дифференцированные уравнения указанных выше различных вариантов задачи трех тел не допускают нетривиальных полей симметрий и многозначных интегралов, то любой условный интегральный инвариант этих уравнений вида (51) может отличаться только постоянным множителем от инварианта

$$
\int_D dz \wedge dy - dH \wedge dx.
$$
Так как \( M = 3 \), то имеет смысл рассматривать лишь абсолютные интегральные инварианты третьего порядка. Соответствующая 3-форма имеет вид \( f\Omega \) и по лемме 3 функция \( f \) — интеграл уравнений (1). Для рассмотренных выше уравнений динамики \( f = \text{const} \).

Интегральные инварианты динамических систем на трехмерных многообразиях с положительной энтропией описаны в работе [25].

Задача об условиях существования интегральных инвариантов гамильтоновых систем со многими степенями свободы требует дополнительного рассмотрения.

М. Как показано в работе [26], наличие интегральных инвариантов тесно связано со свойствами ветвления решений дифференциальных уравнений в плоскости комплексного времени.

Мы рассмотрим эти вопросы на примере систем дифференциальных уравнений

\[
\dot{z}_i = v_i(z_1, \ldots, z_n), \quad 1 \leq i \leq n, \tag{58}
\]

инвариантных относительно преобразований подобия

\[
t \to t/\alpha, \quad z_1 \to \alpha^{g_1} z_1, \ldots, z_n \to \alpha^{g_n} z_n
\]

с целыми положительными \( g_j \). Критерий инвариантности уравнений (58) заключается в выполнении соотношений

\[
v_i(\alpha^{g_1} z_1, \ldots, \alpha^{g_n} z_n) = \alpha^{g_i+1} v_i(z_1, \ldots, z_n).
\]

Такие системы обычно называют квазиоднородными, а числа \( g_1, \ldots, g_n \) — показателями квазиоднородности. Квазиоднородные системы часто встречаются в приложениях. Примером служат уравнения Эйлера — Пуанкаре на алгебрах Ли с квадратичными правыми частями (которые упоминались в п. Ж): здесь можно положить \( g_1 = \ldots = g_n = 1 \). Несколько более сложными примерами являются уравнения Эйлера — Пуассона, описывающие вращение твердого тела вокруг неподвижной точки, а также уравнения задачи \( n \) гравитирующих тел.

Оказывается, для квазиоднородных систем задача об условиях однозначности решений в плоскости комплексного времени практически может быть доведена до конца. Мы воспроизводим здесь анализ уравнений (58), выполненный Х. Иошидой [27] по методу Ковалевской. Напомним знаменитый результат Ковалевской: общее решение дифференциальных уравнений Эйлера — Пуассона представляется морфоморфными функциями времени \( t \) только в тех случаях, когда имеется дополнительный первый интеграл. Именно таким путем она пришла к открытию нового случая интегрируемости, который теперь носит ее имя.
Добавление

Сначала заметим, что система (58) допускает частные мероморфные решения

\[ z_1 = c_1/t^{q_1}, \ldots, z_n = c_n/t^{q_n}, \]

где постоянные \( c_1, \ldots, c_n \) удовлетворяют алгебраической системе уравнений

\[ v_i(c_1, \ldots, c_n) = -g_i c_i, \quad 1 \leq i \leq n. \]

Как правило, эти уравнения имеют ненулевые комплексные корни.
Общее решение уравнений (58) ищем в виде

\[ z_i = (c_i + x_i)^{-g_i}. \]  \hspace{1cm} (59)

Можно показать, что функции \( t \mapsto x(t) \) удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений

\[ t \dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} K_{ij} x_j + \sum_{|m|=2}^{\infty} K_{m_1, \ldots, m_n}^{(i)} x_{m_1} \cdots x_{m_n}, \]  \hspace{1cm} (60)

\[ K_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial z_j}(c) + g_i \delta_{ij}, \]

\[ K_{m_1, \ldots, m_n}^{(i)} = \frac{\partial^{m_1+\cdots+m_n} v_i}{\partial^{m_1} z_1 \cdots \partial^{m_n} z_n}(c). \]

Здесь \( \delta_{ij} \) — символ Кронекера. Матрица \( K = ||K_{ij}|| \) называется матрицей Ковалевской, а ее собственные значения \( \rho_1, \ldots, \rho_n \) — показателями Ковалевской.

Предложение 5. Если \( c \neq 0 \), то \( \rho = -1 \) — показатель Ковалевской.

Действительно, ненулевой вектор \( v(c) \) является собственным вектором матрицы \( K \) с собственным значением \(-1\). Положим, для определенности, \( \rho_1 = -1 \).

Теорема 8 (Ляпунов, [28]). Если все решения системы (58) однозначные функции комплексного времени, то

1) показатели Ковалевской — целые числа,
2) матрица Ковалевской приводится к диагональной форме \( \text{diag} [\rho_1, \ldots, \rho_n] \).

Доказательство основано на исследовании уравнений в вариациях

\[ t \dot{x} = K x, \]

которые являются уравнениями Фукса. Они имеют частные решения

\[ t^{\rho_i} \xi_i, \quad \xi_i \in \mathbb{C}^n, \]  \hspace{1cm} (61)
где $\xi_i$ — собственные векторы матрицы $K$, отвечающие собственным значениям $\rho_i$. Если $\rho_i$ не целые, то решения (61) (а вместе с ними и функции (59)) ветвятся при обходе точки $t = 0$. Оказывается, свойство ветвления сохраняется и для решений полной системы (60).

С. В. Ковалевская решила задачу об условиях мероморфности общего решения системы (58). Для этого необходимо, чтобы ряды Лорана решений (58) содержали $n - 1$ произвольную постоянную. Еще один параметр возникает при замене $t$ на $t + \beta$, $\beta = \text{const}$ (ввиду свойства автономности). Необходимое условие мероморфности решений (59) состоит в том, что $\rho_2, \ldots, \rho_n$ — целые неотрицательные числа.

Функция $z \mapsto f(z)$ называется квазидиоднородной степени $m$, если

$$f(\alpha^{g_1}z_1, \ldots, \alpha^{g_n}z_n) = \alpha^m f(z_1, \ldots, z_n).$$

Любую аналитическую функцию $f$ можно разложить в ряд по квазидиоднородным формам:

$$f(z) = \sum_{m \geq 0} f_m(z), \quad \text{deg} f_m = m.$$

Ясно, что квазидиоднородные формы разложения интеграла системы (58) сами будут первыми интегралами.

**Теорема 9 ([27]).** Пусть $f$ — квазидиоднородный интеграл степени $m$ системы (58) и $df(c) \neq 0$. Тогда $\rho = m$ — показатель Ковалевской.

Этот результат устанавливает замечательную связь между свойством мероморфности общего решения и наличием непостоянных интегралов.

Предположим теперь, что система (58) допускает абсолютный интегральный инвариант, порождаемый $k$-формой

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k}(z) dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_k}.$$  

Эту форму также можно разложить в ряд по квазидиоднородным формам. Форма $\omega$ называется квазидиоднородной формой степени $m$, если

$$\omega_{i_1 \ldots i_k}(\alpha^{g_1}z_1, \ldots, \alpha^{g_n}z_n) = \alpha^j \omega_{i_1 \ldots i_k}(z), \quad j = m - g_{i_1} - \ldots - g_{i_k}. \quad (62)$$

**Теорема 10 ([26]).** Пусть квазидиоднородная $k$-форма $\omega$ степени $m$ порождает абсолютный инвариант системы (58) и $\omega \neq 0$ в точке $z = c$. Тогда для некоторых индексов $i_1, \ldots, i_k$ показатели Ковалевской удовлетворяют соотношению

$$\rho_{i_1} + \ldots + \rho_{i_k} = m. \quad (63)$$
Добавление

Теорема 10 является далеко идущим обобщением теоремы 9. Действительно, если $f$ — квазеждуодородный интеграл степени $m$ системы (58), то $\omega = df$ будет инвариантной квазиодородной формой степени $m$. Если $z = c$ не является критической точкой функции $f$, то в этой точке $\omega \neq 0$. Поскольку $\omega$ — 1-форма, то соотношение (63) дает нам, что $\rho_i = m$ для некоторого $i$.

В частности, если $\omega$ — квазиодородная форма объема степени $m$, то теорема 10 приводит к следующему соотношению для показателей Ковалевской:

$$\rho_1 + \ldots + \rho_n = m.$$  \hspace{1cm} (64)

Например, уравнения Эйлера — Пуанкаре на $n$-мерной унитарной алгебре Ли допускают стандартную инвариантную меру, порождаемую $n$-форму объема $dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$. Согласно (62), она будет квазиодородной степени $n(j = 0)$ с показателями квазиодородности $g_1 = \ldots = g_n = 1$. Следовательно, из (64) вытекает, что в этом случае сумма всех показателей Ковалевской равна $n$.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим волчок Эйлера, описываемый дифференциальной системой в $\mathbb{R}^3$

$$I\omega = I\omega \times \omega.$$  \hspace{1cm} (65)

Здесь $\omega$ — вектор угловой скорости, $I$ — тензор инерции. Уравнения (65) — это уравнения Эйлера — Пуанкаре на алгебре $so(3)$. Для уравнений (65) имеются нетривиальные решения алгебраической системы

$$(Ic) \times c = -Ic, \quad c \neq 0.$$  

Кроме этого, они допускают два квадратичных интеграла

$$(I\omega, \omega), \quad (I\omega, I\omega),$$  

дифференциалы которых линейно независимы в точке $\omega = c$, если тензор инерции $I$ не шаровой. Следовательно, по теореме Иошиды, $\rho = 2$ — показатель Ковалевской кратности два. Итак, показателями Ковалевской являются числа $-1$, $2$, $2$, сумма которых равна $\dim so(3) = 3$.

В работе [26] на самом деле рассматривалась более общая задача о наличии тензорных инвариантов уравнений (58) — тензорных полей вида

$$T_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}(z),$$

инвариантных при действии фазового потока системы (58). Например, $(1,0)$-тензорам отвечают поля симметрий. В [26] доказано, что существование тензорных инвариантов влечет резонансные соотношения для показателей Ковалевской, обобщающие равенства (63):

$$\rho_{i_1} + \ldots + \rho_{i_p} - \rho_{j_1} - \ldots - \rho_{j_q} + m = 0.$$  \hspace{1cm} (66)
В частности, если имеется нетривиальное поле симметрий со степенью квазиоднородности \( m \), то среди показателей Ковалевской имеется число \( \rho = -m \). Поскольку поле \( v \) само является полем симметрий со степенью квазиоднородности \( m = 1 \), то мы приходим к заключению предложения 5.

Н. В этом пункте мы обсудим круг вопросов, поднятых Картаном в главах XV и XVI. Он не рассматривает подробно общей задачи интегрирования системы дифференциальных уравнений, допускающих заданное число известных интегральных инвариантов, ограничившись наиболее простым случаем, когда система (1), заданная на \( n \)-мерном многообразии, имеет \( n - 1 \) линейных абсолютных инвариантов.

Мы расширим задачу Картана, имея в виду использование известных тензорных инвариантов произвольной структуры. Прежде всего полезно задаться вопросом: сколько независимых инвариантов вообще необходимо иметь для точного интегрирования системы (1)? Наше наблюдение состоит в следующем: кроме тривиального инварианта — поля симметрий \( v \) — надо знать еще \( n - 1 \) инвариантов. Поясним этот эмпирический факт некоторыми примерами. Хорошо известно, что для явного интегрирования автономной системы \( n \) дифференциальных уравнений достаточно знать \( n - 1 \) независимых интегралов, либо \( n - 1 \) независимых полей симметрий, порождающих разрешимую алгебру Ли (теорема Ли), либо \( n - 2 \) независимых интегралов и инвариантную меру (теорема Эйлера — Якоби). Знаменитая теорема Лиувилля о полной интегрируемости гамильтоновых систем также подтверждает это наблюдение: в системе с \( n \) степенями свободы достаточно иметь \( n \) независимых интегралов, находящихся попарно в инволюции; кроме этих интегралов гамильтонова система имеет еще \( n \) гамильтоновых полей симметрий, порождаемых этими интегралами (гамильтониан, конечно, порождает тривиальный инвариант).

Картан рассматривает похожую ситуацию: предполагается, что система (1) допускает \( n - 1 \) независимых инвариантных 1-форм \( \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} \):

\[
i_v \varphi_j = 0, \quad L_u \varphi_j = 0, \quad j = 0, \ldots, n - 1.
\]

В п. 156 показано, что с самого начала можно считать выполненными равенства

\[
d\varphi_k = \sum_{p < q} c_{pq}^k \varphi_p \wedge \varphi_q
\]

с постоянными коэффициентами \( c_{pq}^k \).

Картан вводит \( n - 1 \) векторных полей \( u_1, \ldots, u_{n-1} \) с помощью равенств

\[
i_u \varphi_k = \delta_{jk},
\]
где $\delta$-символ Кронекера. Ввиду предположения о независимости 1-форм $\varphi$, равенства (68) однозначно определяют набор независимых полей $u_j$ с точностью до слагаемых вида $\lambda v$, где $\lambda$ — некоторая функция. В п. 164 показано, что эти поля являются полями симметрий (т. е. $[v, u_j] = \lambda_j v$ для всех $j$), а также выведены соотношения

$$[u_p, u_q] = - \sum c_{pq}^k u_k + \lambda_{pq} v.$$ 

Здесь $\lambda_j$ и $\lambda_{pq}$ — некоторые гладкие функции.

Поэтому, если коэффициенты в (67) являются структурными константами некоторой разрешимой алгебры Ли, то уравнения (1) интегрируются с помощью квадратур (теорема Ли).

На эти факты можно взглянуть с иной точки зрения. Вместо общей системы (1) будем рассматривать квазиоднородную систему (58) из п. Н и предположим, что она допускает квазиоднородные тензорные инварианты с целыми степенями, структура которых и их количество определяется указанными выше теоремами об интегрируемости. Если предположить дополнительно, что в выделенной точке $z = c$ эти инварианты не обращаются в нуль, то все показатели Ковалевской оказываются целыми числами с простыми элементарными делителями (т. е. выполнены заключения теоремы Ляпунова о необходимых условиях однозначности общего решения).

В связи с этим замечанием возникают два предположения.

1) При выполнении условий известных теорем об интегрируемости все решения квазиоднородной системы (58) в виде рядов (59), действительно, являются однозначными функциями комплексного времени.

2) Дополнительные условия на тензорные инварианты, фигурирующие в условиях теорем об интегрируемости (структура коммутационных соотношений для полей симметрий в теореме Ли, свойства структурных постоянных в соотношении (67)) можно вывести из условия однозначности решений квазиоднородных систем.

Это наблюдение приводит к следующему эвристическому способу получения условий интегрируемости: число и тип ее инвариантов должны приводить к ряду соотношений между показателями Ковалевской вида (66) таких, что эти показатели с необходимостью являются целыми.

В качестве примера укажем следующее утверждение, которое, по-видимому, ранее не упоминалось.

**Теорема 11.** Пусть система (1) имеет $n - 2$ независимых коммутирующих векторных полей симметрий $u_3, \ldots, u_n$ и инвариантную $n$-форму $\Omega$, таких, что

$$L_{u_k} \Omega = 0, \quad 3 \leq k \leq n.$$
ДОБАВЛЕНИЕ

Тогда эта система интегрируема в квадратурах.

Замечание. Для квазиподнородных систем наличие $n - 2$ квазиподнородных полей симметрий, линейно независимых в точке $z = c$, влечет целочисленность (и отрицательность) $n - 2$ показателей Ковалевской (п. Н). Ещё один из показателей равен $-1$. Существование инвариантной меры даёт соотношение (64), из которого вытекает целочисленность оставшегося показателя Ковалевской.

Доказательство теоремы 11. Во-первых, заметим, что $d i_v \Omega = L_v \Omega - i_v d \Omega = 0$. Далее,

$$i_u (d i_v \Omega) = (-d i_u + L_u)(i_v \Omega) = -d(i_u i_v \Omega) + L_u i_v \Omega = 0.$$ 

Поскольку $u_3$ — поле симметрий, то $[v, u_3] = 0$ и

$$L_u i_v \Omega = i_v L_u \Omega = 0.$$ 

Следовательно,

$$d(i_u i_v \Omega) = 0.$$ 

Аналогично получаем

$$d(i_u i_{u_1} \ldots i_{u_3} i_v \Omega) = 0.$$ 

По лемме Пуанкаре,

$$\Omega(v, u_3, \ldots, u_n, \cdot) = df.$$ 

Отсюда получаем, что $i_v df = L_v f = 0$ и $i_u df = L_u f = 0$. Следовательно, $f$ является интегралом (1) и каждого из векторных полей $u_k (k \geq 3)$. Поскольку векторы $v, u_3, \ldots, u_n$ независимы, то $f \neq \text{const}.

Таким образом, поля $v, u_3, \ldots, u_n$ касаются интегральных гиперповерхностей $\Sigma_a = \{x : f(x) = a\}$ и коммутируют. Остаётся применить теорему Ли для ограничения системы (1) на $\Sigma_a$. Утверждение доказано.

К сожалению, теория интегрирования дифференциальных уравнений с использованием тензорных инвариантов пока еще недостаточно развита. Полученные в этом направлении результаты пока носят разрозненный характер. В заключение этого пункта укажем один специальный результат, найденный недавно П. Топаловым.

Теорема 12 ([29]). Предположим, что геодезический поток на изоэнергетической поверхности $Q^3$ допускает тензорный инвариант типа $(p, q)$, который обязательно обращается в нуль на конечном числе замкнутых траекторий $N$. Тогда геодезический поток имеет непостоянный интеграл на универсальной накрывающей над $Q^3 \setminus N$.

Стоит, наверное, отметить, что обращение в нуль тензорного инварианта не является типичным свойством.
О. В качестве примеров, иллюстрирующих общую теорию инвариантов, Э. Кардан постоянно использует гамильтоновы системы, динамику идеальной жидкости и геометрическую оптику. Оказывается, эти три на вид различные теории имеют под собой одну общую математическую конструкцию, в которой интегральные инварианты играют центральную роль.

Как хорошо известно, уравнения движения идеальной жидкости (уравнения (38) при \( \nu = 0 \)) можно представить в следующей форме:

\[
\frac{\partial v}{\partial t} + (\text{rot} \, v) \times v = -\frac{\partial f}{\partial x},
\]

где \( f = v^2/2 + P + V \), \( P \) — функция давления (для однородной жидкости \( P = p/\rho \)). Уравнение (69) называется уравнением Ламба.

Рассмотрим теперь распространение света в неоднородной изотопной среде с показателем преломления \( n(x) \), \( x \in \mathbb{R}^3 \): световые частицы движутся по лучам со скоростью, равной \( 1/n \). При построении оптических изображений существенную роль играют не отдельные лучи, а системы лучей — семейства световых лучей, одноразно определяющих пространство: через каждую точку \( x \) проходит единственный луч, причем направление луча перпендикулярно от точки \( x \). Таким образом, система лучей однозначно связана с полем скоростей \( v(x) \) световых частиц. Можно показать, что это поле удовлетворяет уравнению

\[
(\text{rot} \, n^2 v) \times v = 0.
\]

Для однородной среды, когда \( n = \text{const} \), уравнение (70) совпадает с уравнением стационарного течения жидкости, когда поле скоростей коллинеарно своему ротору. Примером служит известное \( ABC \)-течение Арнольда: компоненты поля скорости имеют вид

\[
A \sin x_3 + C \cos x_2, \quad B \sin x_1 + A \cos x_3, \quad C \sin x_2 + B \cos x_1.
\]

Здесь \( \text{rot} \, v = v \). Поскольку поле \( 2\pi \)-периодично по координатам \( x_1 \), \( x_2 \), \( x_3 \), то его можно рассматривать на трёхмерном торе. Для почти всех значений \( A, B, C \) на торе имеются области с хаотическим поведением траекторий.

Нетрудно найти условия, при которых система лучей ортогональна некоторому семейству поверхностей в \( \mathbb{R}^3 \):

\[
(v, \text{rot} \, n^2 v) = 0.
\]

Сопоставляя с (70), получаем, что тогда \( \text{rot} \, n^2 v = 0 \). Следовательно,

\[
n^2 v = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}.
\]

Такие системы лучей называются системами Гамильтона. Классическим результатом является теорема Малюса: если система лучей
ортогональна некоторой регулярной поверхности, то она будет системой Гамильтона и останется такой после любого числа отражений и преломлений. Теорема Малюса просто доказывается с применением линейного интегрального инварианта

\[ \int n^2(v, dx) \]

и обсуждается Картаном в п. 193.

Системы лучей, для которых \( \text{rot} n^2 v \neq 0 \), называются системами Куммера. По сравнению с системами Гамильтона они меньше изучены.

Рассмотрим теперь канонические уравнения Гамильтона (12) с гамильтонианом \( H(x, y, t) \), который может явно зависеть от времени. Предположим, что эти уравнения имеют \( n \)-мерное инвариантное многообразие, задаваемое уравнениями

\[ y = u(x, t), \tag{71} \]

gде \( u \) — гладкое ковекторное поле на конфигурационном многообразии \( N^n \).

Введем векторное поле скорости \( v \) на \( N \), положив

\[ v(x, t) = \dot{x} = \left. \frac{\partial H}{\partial y} \right|_{y = u}, \]

а также функцию \( h(x, t) = H(x, u(x, t), t) \). Оказывается, поля \( u, v \) и функция \( h \) связаны соотношением

\[ \frac{\partial u}{\partial t} + (\text{rot} u) v = - \frac{\partial h}{\partial x}, \tag{72} \]

где

\[ \text{rot} u = \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \end{array} \right\| \]

— кососимметричная \( n \times n \)-матрица. При \( n = 3 \) значение \( (\text{rot} u) v \) совпадает с обычным векторным произведением \( \text{rot} u \times v \).

Уравнение (72) по виду совпадает с (69); будем его также называть уравнением Лаамба. Сходство вида уравнений (69), (70) и (72) дает возможность развить аналогию между гидродинамикой, геометрической оптикой и гамильтоновой механикой. Наличие инвариантных соотношений (71) позволяет свести уравнения Гамильтона (12) в \( 2n \)-мерном фазовом пространстве к системе дифференциальных уравнений

\[ \dot{x} = v(x, t) \tag{73} \]

на \( n \)-мерном конфигурационном пространстве. Система (73) обладает многими свойствами, характерными для течений идеальной жидкости [30].
Добавление

Положим $\omega = \sum u_i dx_i$, $\Omega = d\omega$. Тогда (72) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + i_v \Omega = -dh.$$

Система (71) допускает относительный интегральный инвариант

$$\oint \omega.$$

Это — аналог теоремы Томсона о сохранении циркуляции.

Поле $u$ назовем потенциальным, если $\text{rot} \ u = 0$; локально $u = \partial \varphi / \partial x$. Справедлива теорема Лагранжа: если при $t = 0$ поле $u$ потенциально, то оно будет потенциальным при всех $t$. Это — простое следствие теоремы Томсона. Подставляя $u = \partial \varphi / \partial x$ в уравнение (72), получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + H \left( x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, t \right) = f,$$

где $f$ — некоторая функция $t$. В гидродинамике соотношение (74) называется интегралом Лагранжа—Коши, а в гамильтоновой механике — уравнением Гамильтона—Якоби. После калибровки потенциала

$$\varphi \mapsto \varphi - \int f(t) \, dt$$

функцию $f$ в правой части (74) можно сделать равной нулю.

Ненулевые векторы $w$, удовлетворяющие равенству $(\text{rot} \ u) w = 0$ (или $i_w \Omega = 0$), в гидродинамике называются вихревыми векторами. Распределение вихревых векторов интегрируемо: через каждую точку $x \in N$ проходит единственное максимальное интегральное многообразие этого распределения, которое в каждой своей точке касается всех вихревых векторов. Такие многообразия естественно назвать вихревыми. По терминологии Картана — это характеристические многообразия 2-формы $\Omega$. Подчеркнем, что вихревые многообразия определяются при фиксированном значении $t$.

Справедлив аналог теоремы Гельмгольца — Томсона: фазовый поток системы (73) переводит вихревые многообразия в вихревые многообразия. В стационарном случае (когда поля $u$, $v$ и функция $h$ не зависят явно от $t$) функция $h$ постоянна на линиях тока (интегральных кривых поля $v$) и на вихревых многообразиях. Это — обобщение знаменитой теоремы Бернулли.

Для исследования уравнений Ламба можно применить идеи и методы, развитые в книге Картана. При этом раскрываются интересные связи между подходом Картана и идеями из гидродинамики. Например,
ДОБАВЛЕНИЕ

согласно п. 119 главы XII, 1-форму \( \omega \) локально можно привести к следующему виду:

\[
\omega = dS + x_1 dx_2 + \ldots + x_{2k-1} dx_{2k}.
\]  (75)

Здесь \( S \) — некоторая гладкая функция от \( x \) и \( t \), а \( 2k \) — ранг 2-формы \( \Omega = dw \). Запишем в явном виде компоненты ковекторного поля \( u \)

\[
\begin{align*}
    u_1 &= \frac{\partial S}{\partial x_1}, & u_2 &= \frac{\partial S}{\partial x_2} + x_1, & \ldots, & u_{2k+1} &= \frac{\partial S}{\partial x_{2k+1}}, & \ldots, & u_n &= \frac{\partial S}{\partial x_n},
\end{align*}
\]

и уравнение Ламба (72)

\[
\dot{x}_1 = -\frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + h \right), \quad \dot{x}_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + h \right),
\]  (76)

\[
\begin{align*}
    \dot{x}_{2k-1} &= -\frac{\partial}{\partial x_{2k}} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + h \right), & \dot{x}_{2k} &= \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + h \right),
\end{align*}
\]

\[
\frac{\partial}{\partial x_{2k+1}} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + h \right) = \ldots = \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{\partial S}{\partial t} + h \right) = 0.
\]  (77)

Из (77) вытекает, что \( \partial S/\partial t + h \) — функция лишь от координат \( x_1, \ldots, x_{2k} \) и времени \( t \). Эти соотношения обобщают уравнение Гамильтона — Якоби и переходят в него при \( k = 0 \), когда поле \( u \) потенциально. При этом функция \( S \) будет играть роль действия по Гамильтону.

Таким образом, (76) будет замкнутой системой канонических уравнений Гамильтона с гамильтонианом \( \partial S/\partial t + h \).

Согласно (75), в этих переменных

\[
\Omega = dx_1 \wedge dx_2 + \ldots + dx_{2k-1} \wedge dx_{2k}
\]

и поэтому вихревые многообразия (характеристические \((n-2k)\)-мерные поверхности) задаются уравнениями

\[
x_1 = \alpha_1, \ldots, x_{2k} = \alpha_{2k}, \quad \alpha = \text{const}.
\]

Поскольку производные \( \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{2k} \) зависят лишь от \( x_1, \ldots, x_{2k}, t \), то отсюда сразу же вытекает теорема Гельмгольца — Томсона о вмороженности вихревых многообразий в поток системы (73).

В гидродинамике переменные \( x_1, \ldots, x_{2k} \) и функция \( S \) называются потенциалами Клебша. Еще в 1857 г. Клебш представил 1-форму циркуляции скорости \( v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3 \) в виде (75). При \( n = 3 \) уравнения (76) и (77) получены Клебшем и Стюартом (см., например, [31]).
П. В гидродинамике к уравнению (69) добавляют уравнение неразрывности
\[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0, \] (78)
эквивалентное наличию интегрального инварианта
\[ \int \rho \, d^3x \]
— массы подвижного объема. Спрашивается, допускает ли подобные инварианты система (79) в общем случае?

В этом вопросе существенную роль играет понятие класса дифференциальной формы, введенное Картаном (гл. IV). Мы будем рассматривать формы постоянного класса. Напомним, что класс замкнутой 2-формы всегда четный.

Предложение 6. Пусть \( n = 2s \) четно и класс 2-формы \( \Omega = d\omega \) равен \( n \). Тогда система (73) допускает интегральный инвариант
\[ \int \tau, \quad \tau = \Omega^s. \] (79)

Это утверждение, между прочим, содержит как частный случай знаменитую теорему Лиувилля о сохранении фазового объема в гамильтоновых системах. Пусть теперь \( n = 2s + 1 \) нечетно и класс 1-формы \( \omega \) равен \( n \). Тогда \( n \)-форма \( \tau = \omega \wedge \Omega^s \) — форма объема на \( M \), однако в общем случае она не будет инвариантной. Действительно, для производной по времени от \( \tau \) можно получить следующее выражение:
\[ \dot{\tau} = dg \wedge \Omega^s, \]
где \( g = i_v \omega - h \) — лагранжан рассматриваемой задачи. Поскольку форма \( \Omega \) замкнута, то
\[ dg \wedge \Omega^s = d(g\Omega^s). \]
Поэтому для компактного \( M \) имеем
\[ \frac{d}{dt} \int_M \tau = \int_M dg \wedge \Omega^s = \int_M d(g\Omega^s) = 0. \]
Таким образом, \( \tau \)-объем всего \( M \) сохраняется. Это замечание, однако, содержательно лишь для неавтономных систем.

Рассмотрим важный частный случай, когда уравнения (72) являются уравнениями Ламба для стационарной \( n \)-мерной инвариантной поверхности гамильтоновой системы с гамильтонианом, квадратичным по импульсам (это случай отвечает движению по инерции).
ДОБАВЛЕНИЕ 255

Предложение 7 (132). В рассматриваемом случае, когда форма $\omega$ имеет
нечетный класс $n = 2s + 1$, система (73) допускает интегральный
инвариант (79), где $\tau = \omega \wedge \Omega^s$.

Если класс форм $\omega$ и $\Omega$ не максимальный, то с их помощью
вообще не удается получить форму объема. Таким образом, вопрос о
наличии инвариантных мер уравнений (73) является содержательной
задачей.

Наиболее общий подход заключается в поиске полного решения
$u(x, t, c), \ c = (c_1, \ldots, c_n)$ уравнений Ламбда, которое удовлетворяет
условию невырожденности:

$$\rho = \frac{\partial (u_1, \ldots, u_n)}{\partial (c_1, \ldots, c_n)} \neq 0. \tag{80}$$

Для потенциальных решений $u = \partial \varphi / \partial x$ полное решение уравнения
Ламбда переходит в полный интеграл $\varphi(t, x, c)$ уравнения Гамильтона—
Якоби (74). В этом случае неравенство (80) принимает известный вид

$$\det \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial c_j} \right| \neq 0.$$

Метод Гамильтона — Якоби обсуждается Картаном в гл. XIV.

Предложение 8. При фиксированных значениях с функция (80) удовле-
творяет уравнению неразрывности (78), где $\text{div} = \sum \partial / \partial x_i$.

Таким образом, система (73) допускает интегральный инвариант

$$\int \rho \, d^nx.$$

Предложение 8 выводится из теоремы Лиувилля о сохранении фазового
объема гамильтоновых систем.

В заключение рассмотрим вопрос о существовании инвариантной
меры уравнений (73) в задаче о геодезических линиях левоинвариант-
ных метрик на группах Ли. Пусть $G$ — группа Ли, $g$ — ее
алгебра, $T$ — левоинвариантная метрика на $G$ — кинетическая
энергия механической системы с пространством положений $G$. Если
$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in g$ — скорость системы, то

$$T = \frac{1}{2} \sum I_{ij} \omega_i \omega_j. \tag{81}$$

Ввиду предположения о левоинвариантности, $I_{ij} = \text{const}$. Симметрич-
ная положительно определенная матрица $I = \|I_{ij}\|$ — тензор инерции
ДОБАВЛЕНИЕ

системы. Теорема об изменении момента приводит к уравнениям Эйлера — Пуанкаре на алгебре \( g \) (см. п. Ж), которые следует дополнить \( n (= \dim G) \) кинематическими соотношениями

\[
\dot{x}_i = \sum_j v_i^j \omega_j,
\]  

(82)

gде \( x_1, \ldots, x_n \) — локальные координаты на группе \( G \), \( v_j = (v_j^1, \ldots, v_j^n) \) — левоинвариантные поля на \( G \), для которых справедливы коммутационные соотношения

\[
[v_i, v_j] = \sum_k c_{ij}^k v_k.
\]

Пусть \( w_1, \ldots, w_n \) — правоинвариантные поля на группе \( G \). Их фазовые потоки представляют семейства левых сдвигов. Поскольку лагранжан \( T \) левоинвариантен, то уравнения движения на \( TG \) допускают \( n \) независимых нетеровых интегралов

\[
\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \cdot w_i = c_i, \quad 1 \leq i \leq n.
\]  

(83)

Ввиду (81) и (82), левые части этих уравнений линейны по \( \omega \). Из (83) скорости \( \omega \) можно представить как однозначные функции на группе \( G \) (при фиксированных значениях \( c_1, \ldots, c_n \)). В результате получаем автономные уравнения на группе \( G \) вида (73):

\[
\dot{x}_i = \sum v_i^j(x) \omega_j(x, c).
\]  

(84)

Теорема 13 ([33]). Если группа \( G \) унидоморфная (т.е. \( \sum c_i^k k = 0 \) для всех \( 1 \leq i \leq n \)), то при всех значениях с фазовый поток системы (84) сохраняет меру Хаара на \( G \).

Напомним, что на каждой группе имеется единственная (с точностью до постоянного множителя) мера, инвариантная при всех левых (правых) сдвигах. В случае унидоморфной группы это мера (называемая мерой Хаара) биинвариантна. В частности, все компактные группы унидоморфны.

Теорема 13 доказывается с помощью предложения 8. Она является следствием более общего результата: фазовый поток системы (84) сохраняет правоинвариантную меру на \( G \) (см. [33]).

Р. В п. М введены многозначные интегралы динамических систем. Этот объект естественным образом возникает также в связи с теорией Картана интегрирования системы \( n \) дифференциальных уравнений с известным набором \( n - 1 \) независимых инвариантных 1-форм (п. О).
Добавление

Пусть, например, все константы $C_{pq}^k$ в (67) равны нулю. Тогда 1-формы $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ будут многозначными интегралами. Действительно, $d\varphi_k = 0$ и $i_v \varphi_k = 0$. Следовательно, локально $\varphi_k = df$, где $f$ — некоторая непостоянная гладкая функция, и

$$i_v df = L_v f = 0.$$  

Можно задаться вопросом, существуют ли вообще многозначные интегралы? Вот простой пример системы на $n$-мерном торе $T^n = \{x_1, \ldots, x_n \mod 2\pi\}$:

$$\dot{x}_1 = \omega_1, \ldots, \dot{x}_n = \omega_n,$$  

где $\omega$ — нерезонансный набор постоянных частот. Функции

$$\omega_j x_i - \omega_i x_j \quad (i, j = 1, \ldots, n; \ i \neq j)$$  

(точнее, их дифференциалы) являются многозначными интегралами; среди них $n - 1$ независимых. Стоит отметить, что виду эргодичности система (85) не допускает ни одного однозначного интеграла, который был бы непостоянной непрерывной функцией на $T^n$.

Можно привести примеры многозначных интегралов канонических уравнений Гамильтона. Положим

$$H = \sum \omega_i y_i + f(x_1, \ldots, x_n),$$

где $f : T^n \to \mathbb{R}$, а постоянные числа $\omega$ рационально несоизмеримы. Гамильтона и $H$ — однозначная функция на фазовом пространстве $\mathbb{R}^n \times T^n$. Уравнения Гамильтона с гамильтонацией $H$ допускают набор многозначных интегралов (86). Можно показать, что при подходящем выборе аналитической функции $f$ и набора чисел $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Эта гамильтона система не имеет обычных однозначных интегралов независимых от гамильтона и $H$ (см. [34, 35]).

Функция $H$ и $n - 1$ независимых многозначных функций из (86) образуют полный набор инволютных интегралов. Стоит отметить, что для многозначных интегралов корректно определена их скобка Пуассона. Далее, поверхностью уровня многозначных функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (1-форм) естественно назвать интегральную поверхность интегрируемого $n$-мерного распределения

$$\varphi_1 = \ldots = \varphi_n = 0.$$  

Для гамильтононовых систем с многозначными интегралами справедлив аналог геометрической теоремы Лиувилла об интегралах в инволюции: если для гамильтоновой системы с $n$ степенями свободы найдется $n$ независимых многозначных интегралов, попарные скобки Пуассона которых равны нулю и $(2n - 1)$-мерные энергетические многообразия компактны, то $n$-мерные поверхности уровня этих интегралов диф- 
феоморфны прямому произведению $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, причем можно выбрать
ДОБАВЛЕНИЕ

на них $k$ угловых и $n - k$ линейных переменных, которые равномерно меняются со временем [36].

Если интегралы однозначны, то их совместные уровни компакты и тогда $k = n$. Условие компактности энергетических многообразий гарантирует, что гамильтоновы поля, порожденные интегралами, не стеснены на $n$-мерных совместных поверхностях уровня.

В заключение обсудим вопрос о многоизначных интегралах геодезического потока на компактном римановом многообразии $(M^n, ds)$. Справедлива

Теорема 14 ([37]). Если $n > 2$, то любой многоизначный интеграл геодезического потока будет точной 1-формой. Если $n = 2$ и геодезический поток допускает многоизначный интеграл, то обязательно найдется однозначный первый интеграл.

Укажем пример многоизначного интеграла, когда $M$ является двумерным тором $T^2$. Пусть $ds$ — плоская метрика на $T^2$. Введем угловые координаты $x_1, x_2, \theta$ на единичном расслоении $T^1 T^2 = T^1 \times T^2$: $x_1, x_2$ — координаты на конфигурационном торе, $\theta$ — угловая переменная на единичном слое. Тогда форма $d\theta$ — многоизначный интеграл.

Список цитированной литературы


[29] Топалов П. Тензорные инварианты натуральных механических систем на компактных поверхностях и соответствующие им интегралы // Матем. сборник (в печати).


