УДК 531.36

© 1998 г. В.В. Козлов

ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ

Получены условия ветвления решений уравнений движения натуральных механических систем в плоскости комплексного времени. Изучена связь между структурой ветвления и количеством независимых полиномиальных по импульсам первых интегралов. Результаты общего характера проиллюстрированы примерами из динамики.

Задача о связи между ветвлением решений в плоскости комплексного времени и наличием нетривиальных законов сохранения (они чаще называются первыми интегралами или просто интегралами) восходит к Пенлеве. В.В. Голубев [1] связывает эту задачу с классическими исследованиями Ковалевской, Ляпунова и Гюссона в динамике тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Роль ветвящихся решений как препятствия к интегрируемости в комплексном фазовом пространстве впервые выяснена в [2] с помощью метода малого параметра Пуанкаре. Затем эти вопросы были связаны с самопересечением комплексных сепаратрис [3] и со строением группы монодромии уравнений в вариациях [4]. Другой подход опирается на метод Ляпунова, развитый в применении к общим квазиоднородным системам [5].

Ниже установлена связь структуры ветвления решений как функций комплексного времени и количества полиномиальных по импульсам интегралов, которые могут допускать уравнения динамики.

1. Основные результаты. Пусть M_n – конфигурационное пространство динамической системы, $P^{2n} = T^*M$ – ее $2n$-мерное фазовое пространство. Локальные координаты на M обозначим $(x_1, \ldots, x_n) = x$; пусть $(y_1, \ldots, y_n) = y$ – сопряженные импульсы (декартовы координаты в линейных пространствах T_x^*M). Переменные $(x, y) = z$ являются координатами в фазовом пространстве P.

Пусть

$$K(x,\ y) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x) y_i y_j$$

– кинетическая энергия рассматриваемой системы (положительно определенная квадратичная форма на T_x^*M), $F = (F_1(x), \ldots, F_n(x))$ – силовое поле (ковекторное поле на M). Если силы F потенциальны, то

$$F_i = -\partial \Pi / \partial x_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

где Π: $M^n \to \mathbb{R}$ – потенциальная энергия.

Уравнения движения имеют следующий канонический вид:

$$\dot{x}_i = \partial K / \partial y_i, \quad \dot{y}_i = -\partial K / \partial x_i + F_i; \quad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{1.1}$$

В случае потенциальных сил они принимают форму дифференциальных уравнений Гамильтона с гамильтонианом $H = K + \Pi$, который, конечно, будет их интегралом. Уравнения (1.1) обратимы: они переходят в себя при инволюции $t \to -t$, $y \to -y$.

Все известные интегралы уравнений (1.1) – полиномы по импульсам (либо функциями от полиномов). Задача о наличии полиномиальных интегралов восходит к Уиттекеру [6] и Биркгофу [7]. Линейные по импульсам интегралы связаны со скрытыми циклическими координатами: после подходящей замены одна из координат (скажем, x_1) не входит в кинетическую энергию K и соответствующая компонента силы F_1 равна нулю; тогда исходный линейный интеграл будет совпадать с импульсом y_1. Существование квадратичных по импульсам интегралов связано с возможностью разделения переменных. Задача о полиномиальных интегралах степени, большей или равной трем, оказывается существенно более сложной. Обзор результатов в этом направлении можно найти в [8] (гл. VIII).

В настоящей работе задача Уиттекера – Биркгофа рассматривается с более простой комплексной точки зрения. Предполагается, что многообразие M снабжено комплексной структурой, относительно которой K и $F_1, \ldots, F_n$ являются комплексно-аналитическими функциями на P и M соответственно. Исследуется вопрос о наличии полиномиальных по $y_1, \ldots, y_n$ интегралов с комплексно-аналитическими на M коэффициентами. Такие интегралы часто называют однозначными полиномиальными интегралами.

Положим сначала $F = 0$. Тогда будем иметь задачу о геодезических римановой метрики K на M. Хорошо известно (см., например, [8]), что в этой задаче все интегралы можно считать однородными многочленами по y: каждая однородная форма разложения интеграла в ряд Маклорена по $y_1, \ldots, y_n$ будет интегралом уравнений геодезических. Максимальное число s таких независимых однородных интегралов назовем *степенью интегрируемости* по Биркгофу задачи о геодезических. Степень интегрируемости тесно связана с топологией конфигурационного пространства. Пусть, например, M^2 – компактное ориентируемое связное многообразие. Если род M больше единицы, то $s = 1$ (единственным нетривиальным интегралом является энергия $H = K$), для тора (поверхность рода 1) $s \leq 2$. С другой стороны, геодезический поток на стандартной двумерной сфере имеет три независимых интеграла (поэтому здесь $s = 3$).

Пусть $\Phi : P \to \mathbb{R}$ – аналитический интеграл задачи о геодезических. Производная от Φ в силу канонических уравнений (1.1) равна

$$\dot{\Phi} = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} F_i, \tag{1.2}$$

В случае потенциального силового поля

$$\dot{\Phi} = \{\Phi, \Pi\},$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ – стандартная скобка Пуассона.

Пусть $t \to z_0(t)$ – одно из решений укороченной системы (1.1), когда $F_i = 0$. В силу предположения об аналитичности, $z_0(\cdot)$ – голоморфная функция комплексного времени t, однозначная на некоторой римановой поверхности Ω (Ω получается в результате максимального аналитического продолжения своего аналитического элемента, существование которого гарантирует теорема Коши). Композиция $t \to \dot{\Phi}(z_0(t))$ является голоморфной функцией на Ω или в некоторой ее подобласти, если компоненты силы F имеют сингулярности. Пусть γ – замкнутая ориентированная кривая на Ω, в окрестности которой функция $t \to \dot{\Phi}(t)$ голоморфна.

Теорема 1. Если

$$\int_\gamma \dot{\Phi}(z_0(t))dt \neq 0, \tag{1.3}$$

то полная система уравнений (1.1) имеет решения, многозначные на Ω.

Свойство ветвления решений означает следующее. По теореме Коши уравнения (1.1) имеют решения, которые голоморфны в окрестности точки $t_0 \in \gamma$ и при $t = t_0$

принимают заданное значение из P. Теорема 1 утверждает, что среди этих решений имеются такие, аналитическое продолжение которых вдоль замкнутого пути γ приводит к многозначным функциям.

Теорему 1 удобно применять на практике, когда общее решение задачи о геодезических представляется мероморфными функциями на комплексной плоскости времени. Тогда риманова поверхность Ω – комплексная плоскость $\mathbb{C} = \{t\}$, из которой удалены полюсы мероморфной вектор-функции $t \to z_0(t)$. Пусть компоненты силы F не имеют сингулярностей. Тогда $f(t) = \dot{\Phi}(z_0(t))$ будет мероморфной функцией. Теорема 1 утверждает, что если f имеет хотя бы один полюс с ненулевым вычетом, то решения системы (1.1) ветвятся как функции комплексного времени.

Следует, конечно, иметь в виду, что в общем случае $\dot{\Phi}(z(t)) \neq [\Phi(z(t))]^{\cdot}$, иначе интеграл (1.3) равен нулю по формуле Ньютона-Лейбница.

Ветвление решений принято связывать с хаотической динамикой и отсутствием интегралов – законов сохранения (см., например, [9, 10]). Однако не всякое ветвление опасно с точки зрения свойства интегрируемости.

Простейший пример доставляет одномерная гамильтонова система с гамильтонианом $H = y^2/2 + h(x)$, где $h(x)$ – многочлен степени, большей или равной пяти с простыми корнями. Почти все решения многозначны как функции комплексного времени, однако система допускает полиномиальный интеграл H.

Пусть s – степень интегрируемости по Биркгофу задачи о геодезических риманова многообразия (M, K) и $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$ – набор независимых интегралов, однородных по импульсам. Более точно, предполагается, что градиенты этих функций линейно независимы хотя бы в одной точке фазовой траектории $t \to z_0(t)$. Тогда, оказывается, они независимы во всех точках этой траектории (см., например, [4]). Отображение $\Phi : P \to \mathbb{C}^s$, задаваемое формулой $z \to (\Phi_1(z), \ldots, \Phi_s(z))$, принято называть *отображением момента*.

Вычислим производную $\dot{\Phi}(z)$ в силу полной системы (1.1) (по формуле (1.2)) и затем составим композицию $t \to \dot{\Phi}(z_0(t))$. В результате получим вектор-функцию $\dot{\Phi}$, голоморфную на римановой поверхности Ω.

Рассмотрим естественный гомеоморфизм

$$H_1(\Omega, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^s$$

заданный формулой

$$\gamma \to \int_\gamma \dot{\Phi}(z_0(t))dt \tag{1.4}$$

Здесь γ – одномерные циклы на Ω; ввиду голоморфности $\dot{\Phi}$ интегралы (1.4) по гомологичным циклам совпадают. Пусть r – ранг группы $\pi(H_1)$ как системы векторов в $\mathbb{C}^s$ (максимальное число линейно независимых над $\mathbb{C}$ векторов из $\pi(H_1)$). Например, если $\dot{\Phi}(\cdot)$ – мероморфная вектор-функция на $\mathbb{C}$, то ранг r равен максимальному числу линейно независимых ее вычетов (как векторов из $\mathbb{C}^s$).

Теорема 2. Предположим, что система уравнений (1.1) имеет k полиномиальных голоморфных интегралов с независимыми старшими однородными формами. Тогда

$$k + r \leqslant s \tag{1.5}$$

Легко понять, что старшие однородные формы интегралов системы (1.1) являются интегралами задачи о геодезических (когда $F = 0$). По-видимому, предположение об их независимости можно снять, поскольку во всех известных автору случаях можно указать другие k полиномиальных интегралов, у которых старшие формы независимы почти всюду. Однако это утверждение доказано пока лишь в частных случаях. Например, когда M – n-мерный тор, $K = \sum a_{ij} y_i y_j / 2$ – невырожденная квадратичная форма с постоянными коэффициентами [11]. Используя метод Пуанкаре (см. [8]), предположение о независимости старших форм можно также снять в случае, когда уже известны $n - 1$ полиномиальных интегралов уравнений (1.1) с независимыми старшими однородными формами и задача заключается в отыскании еще одного полиномиального интеграла. Такая ситуация заведомо имеет место для гамильтоновых систем с двумя степенями свободы: роль известного интеграла выполняет интеграл энергии $H = K + \Pi$.

Особенно просто теорема 2 формулируется для консервативных систем с двумя степенями свободы ($n = 2$), степень интегрируемости которых s равна двум. Здесь задача может идти о существовании дополнительного полиномиального интеграла, независимого от интеграла энергии. Теорема 2 дает простое условие неинтегрируемости в комплексном смысле:

$$\int\limits_{\gamma} \{\Phi,\ \Pi\}(z_0(t))dt \neq 0 \tag{1.6}$$

Здесь Φ – однородный интеграл задачи о геодезических.

Условие (1.6) полезно сравнить с известным условием вещественной неинтегрируемости ([8], гл. IV): в качестве решения "невозмущенной" задачи следует взять двоякоасимптотическое гомоклиническое решение, а интегрирование в (1.6) осуществляется по всей оси времени $\mathbb{R} = \{t\}$. Если такой несобственный интеграл отличен от нуля, то полная система не допускает вещественного полиномиального интеграла с аналитическими коэффициентами, независимого от интеграла энергии.

2. Доказательство теорем 1 и 2. Введем в уравнения (1.1) малый параметр ε с помощью подстановки

$$x \to x, \quad y \to y/\sqrt{\varepsilon}, \quad t \to \sqrt{\varepsilon}t$$

Уравнения (1.1) будут иметь тот же вид, только силу F надо заменить на εF. При $\varepsilon = 0$ будем иметь задачу о движении по инерции. Полиномиальные интегралы относительно импульсов y перейдут в многочлены по параметру ε

$$\Phi_j(z,\ \varepsilon) = \Psi_j(z) + \varepsilon G_j(z) + \ldots \tag{2.1}$$

Ясно, что Ψ_j будут старшими однородными формами исходных интегралов ([8], гл. II). Эти функции независимы по предположению.

По теореме Пуанкаре решения системы (1.1) можно разложить в ряды по степеням ε

$$z(t,\ \varepsilon) = z_0(t) + \varepsilon z_1(t) + \ldots \tag{2.2}$$

сходящимся при малых значениях ε равномерно по t из окрестности замкнутой кривой γ.

Докажем теорему 1. Пусть Φ – интеграл невозмущенной системы. Согласно (1.2),

$$\dot{\Phi} = \varepsilon \sum \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} F_i \tag{2.3}$$

Если все решения возмущенной системы однозначны на Ω, то значение функции Φ как функции времени не изменится после обхода замкнутого контура γ. Однако согласно (2.2) и (2.3) приращение этой функции равно $\varepsilon I + o(\varepsilon)$, где I – интеграл в левой части (1.4). Следовательно, при малых $\varepsilon \neq 0$ решение (2.2) ветвится после аналитического продолжения вдоль замкнутой кривой γ. Что и требовалось.

Докажем теперь теорему 2. Пусть $\omega \subset P$ – образ римановой поверхности Ω при отображении $t \to z_0(t)$. Так как $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$ составляют максимальный набор независимых интегралов невозмущенной системы, то в каждой точке ω

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial z} = c_{j,1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \ldots + c_{j,s}\frac{\partial \Phi_s}{\partial z}, \quad 1 \leq j \leq k \tag{2.4}$$

Поскольку $z_0(\cdot)$ – решение, то коэффициенты $c_{j,i}$ постоянны на ω ([8], гл. IV). Следовательно,

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial y} = \sum_{i=1}^{s} c_{j,i}\frac{\partial \Phi_i}{\partial y}$$

и, в частности,

$$\int_\gamma \dot{\Psi}_j(z_0(t))dt = \sum_i c_{j,i}\int_\gamma \dot{\Phi}_i(z_0(t))dt \tag{2.5}$$

Так как (2.1) – однозначный первый интеграл системы (1.1), то все интегралы слева в равенстве (2.5) равны нулю. Поэтому согласно предположению найдутся r линейно независимых векторов

$$\xi = \int_\gamma \dot{\Phi}(z_0(t))dt$$

таких, что $C\xi = 0$, $C = \|c_{j,i}\|$. Но тогда $\operatorname{rank} C \leq s - r$. Согласно (2.4), количество k линейно независимых векторов $\partial\Psi_j/\partial z$ равно рангу C и, следовательно, справедливо неравенство (1.5): $k \leq s - r$.

3. Некоторые приложения. 3.1. Рассмотрим классическую задачу о вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Уравнения движения допускают нётеров интеграл: сохраняется проекция кинетического момента на вертикаль. Полагая эту проекцию нулю и факторизуя по группе поворотов вокруг вертикали, сведем задачу к обратимой системе с двумя степенями свободы ($n = 2$), конфигурационным пространством которой является двумерная сфера (сфера Пуассона). Понижение порядка детально обсуждалось (например, [12], гл. III).

В отсутствие сил имеем интегрируемый волчок Эйлера. Известно, что если не все главные моменты инерции совпадают, то для приведенной задачи $s = 2$ (кстати сказать, для исходной системы Эйлера с тремя степенями свободы $s = 4$). Решения задачи Эйлера выражаются через Θ-функции времени t и, следовательно, являются мероморфными функциями времени на комплексной плоскости $\mathbb{C} = \{t\}$ (см. [6], § 68). Если среди моментов инерции есть равные, то мероморфные функции вырождаются в целые голоморфные функции комплексного времени.

В качестве однородного интеграла Φ задачи Эйлера, независимого от кинетической энергии, возьмем квадрат длины вектора кинетического момента волчка, а в качестве решения $z_0(\cdot)$ возьмем двоякоасимптотическую траекторию, неограниченно приближающуюся к постоянным вращениям твердого тела вокруг средней оси инерции в противоположных направлениях. Конечно, такие решения существуют лишь для динамически несимметричного тела. Двоякоасимптотическое решение выражается через элементарные (а не эллиптические) функции времени, и поэтому дальнейшие вычисления существенно упрощаются.

Было вычислено [13] значение скобки Пуассона

$$\{\Phi, \Pi\}(z_0(t)) \tag{3.1}$$

Эта мероморфная функция всегда имеет полюсы с ненулевыми вычетами. Значит, по теореме 2 приведенные уравнения вращения тяжелого динамически несимметричного волчка не допускают однозначного полиномиального интеграла, независимого от интеграла энергии. Этот результат другим методом получен впервые автором [14] и развит С.Л. Зиглиным [4, 13].

Двоякоасимптотические решения в задаче Эйлера – гетероклинические. Поэтому для доказательства вещественной неинтегрируемости недостаточно условия, чтобы интеграл от (3.1) по оси $\mathbb{R} = \{t\}$ был отличен от нуля: требуется, чтобы он принимал разные значения на семействе двоякоасимптотических траекторий [13]. Это условие сводится к тому, что сумма полюсов мероморфной функции (3.1) в некоторой полосе, примыкающей к вещественной оси, отлична от нуля. Для доказательства более простого факта о комплексной неинтегрируемости достаточно, чтобы имелся хотя бы один ненулевой вычет.

Этот пример имеет и исторический интерес: классические результаты Ковалевской и Ляпунова об однозначных решениях уравнений вращения тяжелого волчка привели к постановке общей проблемы о соотношении ветвления решений уравнений динамики и наличия однозначных интегралов – законов сохранения (см. [1, 8]).

3.2. Пусть теперь M – n-мерный тор $\mathbb{T}^n = \{x_1, \ldots, x_n \bmod 2\pi\}$, кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}\sum g_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j \tag{3.2}$$

– невырожденная квадратичная форма с постоянными коэффициентами, компоненты силы f аналитичны на $\mathbb{T}^n$ и продолжаются до мероморфных функций в аффинном пространстве комплексных переменных. Задача об однозначных полиномиальных интегралах такой системы рассматривалась ранее [15].

Ввиду невырожденности формы (3.2) степень интегрируемости по Биркгофу задачи о геодезических равна n. Набор n независимых полиномиальных интегралов задачи о геодезических составляют импульсы

$$y_1, \ldots, y_n; \quad y_j = \partial T / \partial \dot{x}_j = \sum g_{ji}\dot{x}_i$$

Пусть

$$x = at + b, \quad a, b \in \mathbb{C}^n, \quad t \in \mathbb{C} \tag{3.3}$$

– прямая с $\mathbb{C}^n$, задающая одно из движений по инерции. Предположим, что ограничение мероморфных функций $F_1, \ldots, F_n$ на прямую (3.3) являются мезоморфными функциями на плоскости комплексного времени $\mathbb{C} = \{t\}$. Обозначим их $(f_1, \ldots, f_n) = f$.

Согласно теореме 1, если при некоторых a, b функция $t \to f(t)$ имеет полюс с ненулевым вычетом, то общее решение системы уравнений

$$\dot{x}_i = \partial H / \partial y_i, \quad \dot{y}_i = -\partial H / \partial x_i + F_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n; \quad H = T|_{\dot{x} \to y} \tag{3.4}$$

ветвится на плоскости $\mathbb{C} = \{t\}$.

Пусть при некоторых $a, b \in \mathbb{C}^n$ функция f имеет m полюсов, вычеты в которых линейно независимы над $\mathbb{C}$, а система (3.4) допускает k однозначных независимых полиномиальных по импульсам интегралов. Тогда, по теореме 2, $m + k \leqslant n$.

Эти утверждения доказаны в [15]. Теоремы 1 и 2 – обобщения результатов [15] на обратимые аналитические системы общего вида. Тем же способом были получены [16] аналоги теорем 1 и 2 для систем с конфигурационным пространством S^n.

3.3. В качестве примера, показывающего эффективность теоремы 2, докажем комплексную неинтегрируемость задачи о скольжении точки по наклоненному эллипсоиду вращения (его ось симметрии не вертикальна). Этот результат является новым.

Пусть

$$(x^2 + y^2)/a^2 + z^2/b^2 = 1 \tag{3.5}$$

– уравнение эллипсоида вращения, $\Pi = \alpha x + \beta z$ ($\alpha, \beta = \text{const}$) – потенциальная энергия силы тяжести. Если $\alpha = 0$, то задача будет интегрируемой: кроме энергии, сохраняется момент импульса частицы относительно вертикали

$$\Phi = x\dot{y} - y\dot{x} \tag{3.6}$$

Уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x} = \lambda x / a^2 - \alpha, \quad \ddot{y} = \lambda y / a^2, \quad \ddot{z} = \lambda z / b^2 - \beta \tag{3.7}$$

Здесь λ – множитель Лагранжа; с учетом уравнения связи (3.5) его можно представить в виде явной функции от $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и x, y, z.

Пусть $a \neq b$ (в противном случае будем иметь известную интегрируемую задачу о сферическом маятнике). Тогда $s = 2$ (если $a = b$, то, очевидно, $s = 3$). В качестве однородного интеграла задачи о движении по инерции возьмем интеграл момента (3.6). С учетом уравнений (3.7) получаем формулу $\dot{\Phi} = \alpha y$.

Введем естественную параметризацию поверхности эллипсоида (3.5) угловыми переменными ϑ, φ:

$$x = a\sin\vartheta\sin\varphi, \quad y = a\sin\vartheta\cos\varphi, \quad z = b\cos\vartheta \tag{3.8}$$

Рассмотрим замкнутую геодезическую на (3.5), которая отвечает меридиональному сечению $x = 0$ (или $\varphi = 0$). Переменная ϑ удовлетворяет очевидному уравнению

$$(a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta)\dot{\vartheta}^2 = h \tag{3.9}$$

где h – удвоенная кинетическая энергия. Удобно ввести новую переменную $u = \cos\vartheta$ и перейти к новому времени τ по формуле

$$dt = (a^2\cos^2\vartheta + b^2\sin^2\vartheta)d\tau \tag{3.10}$$

Из (3.9) и (3.10) получим

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = d\zeta, \quad \zeta = b\sqrt{h}\tau, \quad k^2 = \frac{b^2-a^2}{b^2}$$

Следовательно, u – эллиптическая функция переменной ζ с модулем $k \neq 0$: $u = \operatorname{sn}(\zeta, k)$. Согласно (3.8), $y = a\operatorname{cn}\zeta$.

По теореме 2, надо проинтегрировать 1-форму $y(t)dt$ по негомологичному нулю циклу на римановой поверхности рассматриваемой геодезической. После замены $t \to \tau$ получаем 1-форму $y(t(\tau))t'd\tau$. С точностью до ненулевого постоянного множителя она имеет явный вид:

$$\operatorname{cn}\zeta\,\operatorname{dn}^2\zeta d\zeta$$

В точке $\zeta = iK'$ (K' – полный эллиптический интеграл с дополнительным модулем $k' = (1-k^2)^{1/2}$) имеем полюс. Воспользовавшись формулами ([17], гл. 22)

$$\operatorname{cn}(\zeta + iK') = -\frac{i}{k\zeta} + \frac{2k^2-1}{6k}i\zeta + O(\zeta^3)$$

$$\operatorname{dn}(\zeta + iK') = -\frac{i}{\zeta} + \frac{2-k^2}{6}i\zeta + O(\zeta^3)$$

находим вычет. Он равен $-i/(2k)$ и, следовательно, отличен от нуля. Таким образом, задача о движении тяжелой частицы по наклоненному эллипсоиду, действительно, не имеет дополнительного голоморфного интеграла в виде полинома по скорости.

4. Необратимые системы. Результаты разд. 1 можно перенести на более общий случай, когда на систему действуют дополнительные гироскопические силы Γy, линейные по импульсам. Компоненты матрицы $\Gamma = \|\gamma_{ij}\|$ предполагаются голоморфными функциями на комплексном многообразии M^n.

Пусть снова Φ – набор s независимых интегралов задачи о движении по инерции. Производную (1.2) следует заменить на

$$\dot{\Phi} = \sum_{i,j} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \gamma_{ij} y_j \tag{4.1}$$

Можно показать, что теоремы 1 и 2 останутся справедливыми после замены (1.2) на (4.1). Доказательство использует подстановку

$$x \to x, \quad y \to y/\varepsilon, \quad t \to \varepsilon t$$

Уравнения (1.1) не изменят своей формы, только действующая на систему сила будет иметь вид $\varepsilon \Gamma y + \varepsilon^2 F$. Полиномиальные по импульсам интегралы перейдут в многочлены относительно ε.

В качестве примера рассмотрим задачу о движении частицы единичной массы по эллипсоиду (3.5), который вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси y. Производная (4.1) от интеграла (3.6) невозмущенной задачи имеет вид

$$\dot{\Phi} = -\omega y \dot{z}$$

Как и в п. 3.3, рассмотрим замкнутую геодезическую, отвечающую меридиональному сечению $x = 0$. Если $a \neq b$, то с точностью до несущественного постоянного множителя 1-форма $y\dot{z}dt$ имеет явный вид:

$$\mathrm{cn}^2\, \zeta\, \mathrm{dn}\, \zeta d\zeta$$

Интеграл от этой формы по малой окружности, охватывающей точку iK', отличен от нуля. Следовательно, при $a \neq b$ рассматриваемая задача не допускает однозначного полиномиального интеграла, независимого от интеграла энергии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96–01–00747), Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS 93–339–ext) и программы "Университеты России" (3.3.25).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
2. *Козлов В.В.* Несуществование однозначных интегралов и ветвление решений в динамике твердого тела // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 400–406.
3. *Зиглин С.Л.* Самопересечение комплексных сепаратрис и несуществование интегралов в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 564–566.
4. *Зиглин С.Л.* Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике. I; II // Функц. анализ и его приложения. 1982. Т. 16. № 3. С. 30–41; 1983. Т. 17. № 1. С. 8–23.
5. *Yoshida H.* Necessary condition for the existence of algebraic first integrals. I; II // Celest. Mech. 1983. No. 4. V. 31. P. 363–399.
6. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1937. 500 с.
7. *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
8. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удм. гос. ун-та, 1995. 429 с.
9. *Bountis T., Segur H., Vivaldi F.* Integrable Hamiltonian systems and Painlevé property // Phys. Rev. A. 1982. V. 25. No. 3. P. 1257–1264.

10. *Ercolani N., Siggia E.D.* Painlevé property and integrability // Phys. Letters A. 1986. V. 119. No. 3. P. 112–116.
11. *Зиглин С.Л.* О полиномиальных первых интегралах гамильтониановых систем с экспоненциальным взаимодействием // Функц. анализ и его приложения. 1991. Т. 25. № 3. С. 88–89.
12. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.
13. *Зиглин С.Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела // Тр. Моск. мат. о-ва. 1980. Т. 41. С. 287–303.
14. *Козлов В.В.* Несуществование дополнительного аналитического интеграла в задаче о движении несимметричного тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Вестн. МГУ. Сер. Математика, Механика. 1975. № 1. С. 105–110.
15. *Козлов В.В.* Ветвление решений и полиномиальные интегралы в обратимой системе на торе // Мат. заметки. 1988. Т. 44. № 1. С. 100–104.
16. *Денисова Н.В.* О полиномиальных интегралах и ветвлении решений обратимых динамических систем на сфере // Вестн. МГУ. Сер. Математика, Механика. 1995. № 2. С. 79–82.
17. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.IV.1997