

УДК 531.384

© 1997 г. А.А. АФОНИН, В.В. КОЗЛОВ

## ЗАДАЧА О ПАДЕНИИ ДИСКА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассматривается скольжение тяжелого круглого диска по горизонтальной плоскости. Предполагается, что центр масс диска совпадает с его геометрическим центром; в общем случае его главные центральные моменты инерции различны. Показано, что для почти всех начальных данных диск никогда не упадет на плоскость. Доказательство основано на регуляризации уравнений движения, анализе инвариантных многообразий падения и применении некоторых модификаций теоремы Пуанкаре о возвращении. В задаче о качении диска по абсолютно шероховатой плоскости аналогичный метод применим только в случае динамической симметрии: уравнения качения несимметричного диска не имеют инвариантной меры.

**1. Постановка задачи. Уравнения движения.** Рассмотрим скольжение тяжелого круглого диска по гладкому горизонтальному льду. Предположим, что центр тяжести диска  $G$  совпадает с его геометрическим центром. Пусть  $m$  – масса диска,  $a$  – его радиус.

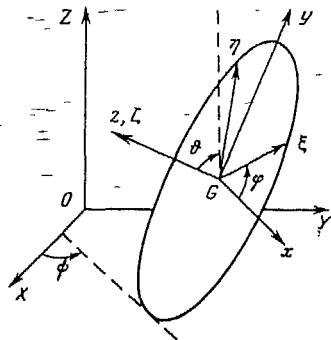
Для описания движения диска введем неподвижную систему отсчета  $OXYZ$ , причем ось  $OZ$  направлена вертикально вверх, и две подвижные системы  $Gxuz$  и  $G\xi\eta\zeta$  с началом в центре диска. Оси  $G\xi$ ,  $G\eta$  и  $G\zeta$  – главные центральные оси инерции, так что ось  $G\zeta$  ортогональна плоскости диска. Моменты инерции диска относительно этих осей обозначим соответственно  $A$ ,  $B$  и  $C = A + B$ . Наконец, подвижную систему отсчета  $Gxuz$  введем так, что оси  $Gz$  и  $G\zeta$  совпадают,  $Gx$  горизонтальна, а ось  $Gu$  является линией наибольшего восходящего уклона плоскости диска (фиг. 1). Ориентацию диска зададим углами Эйлера:  $\vartheta$  – угол между осями  $OZ$  и  $G\zeta$ ,  $\phi$  – угол между осями  $Gx$  и  $G\xi$ ,  $\psi$  – угол между  $OX$  и  $Gx$ . Такой способ описания движения применялся С.А. Чаплыгиным [1], Аппелем и Кортвегом (см. [2]) при решении задачи о качении симметричного диска по абсолютно шероховатой плоскости.

Пусть  $\mathbf{v}$  – скорость центра масс  $G$ ,  $\mathbf{k}$  – кинетический момент диска относительно точки  $G$ ,  $\Omega$  – угловая скорость подвижного триэдра  $Gxuz$ . Проекции этих векторов на оси  $Gxuz$  будем обозначать теми же буквами, но с индексами  $x, y, z$ . Проекции угловой скорости диска  $\omega$  на те же оси обозначим  $p, q, r$ . Справедливы следующие кинематические соотношения:

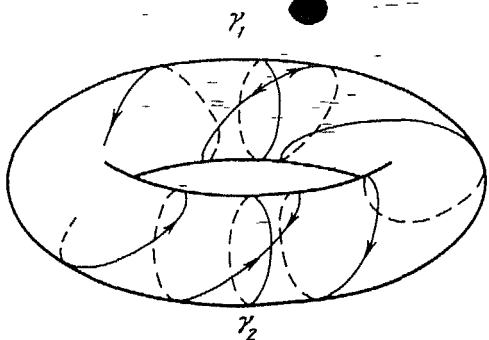
$$p = \Omega_x = \dot{\vartheta}, \quad q = \Omega_y = \dot{\psi} \sin \vartheta, \quad r = \Omega_z = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \vartheta \quad (1.1)$$

Запишем уравнения движения центра масс диска в виде

$$\begin{aligned} m(\dot{v}_x + \Omega_y v_z - \Omega_z v_y) &= R_x \\ m(\dot{v}_y + \Omega_z v_x - \Omega_x v_z) &= R_y - mg \sin \vartheta \\ m(\dot{v}_z + \Omega_x v_y - \Omega_y v_x) &= R_z - mg \cos \vartheta \end{aligned} \quad (1.2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь  $R_x, R_y, R_z$  – проекции реакции плоскости, приложенной в точке касания.

Проекции кинетического момента диска  $\mathbf{k}$  на оси триэдра  $G\xi\eta\zeta$  равны соответственно  $A\omega_\xi, B\omega_\eta, C\omega_\zeta$ . Так как

$$\omega_\xi = p \cos \phi + q \sin \phi, \quad \omega_\eta = -p \sin \phi + q \cos \phi, \quad \omega_\zeta = r$$

$$k_x = k_\xi \cos \phi - k_\eta \sin \phi, \quad k_y = k_\xi \sin \phi + k_\eta \cos \phi, \quad k_z = k_\zeta$$

то будем иметь

$$k_x = p(A \cos^2 \phi + B \sin^2 \phi) + q(A - B) \sin \phi \cos \phi \quad (1.3)$$

$$k_y = p(A - B) \sin \phi \cos \phi + q(A \sin^2 \phi + B \cos^2 \phi), \quad k_z = Cr$$

Теорема об изменении кинетического момента диска относительно точки  $G$  в подвижной системе отсчета  $Gxyz$  имеет следующий вид:

$$\dot{k}_x + \Omega_y k_z - \Omega_z k_y = -aR_z, \quad \dot{k}_y + \Omega_z k_x - \Omega_x k_z = 0 \quad (1.4)$$

$$\dot{k}_z + \Omega_x k_y - \Omega_y k_x = aR_x$$

Так как диск скользит по плоскости без трения, то

$$R_x = 0, \quad R_y \cos \vartheta - R_z \sin \vartheta = 0 \quad (1.5)$$

Кроме того

$$v_y \sin \vartheta + (v_z - ap) \cos \vartheta = 0 \quad (1.6)$$

Из уравнений (1.1)–(1.6) можно получить следующую замкнутую систему дифференциальных уравнений, описывающую вращение диска:

$$\begin{aligned} (I + J \cos 2\phi + ma^2 \cos^2 \vartheta) \dot{p} + J \dot{q} \sin 2\phi &= 2Jr(p \sin 2\phi - q \cos 2\phi) - \\ - Cqr + q \operatorname{ctg} \vartheta [(I + J \cos 2\phi)q - Jp \sin 2\phi] + ma^2 p^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - mag \cos \vartheta \\ J \dot{p} \sin 2\phi + (I - J \cos 2\phi) \dot{q} &= -2Jr(p \cos 2\phi + q \sin 2\phi) + \\ + Cpr + q \operatorname{ctg} \vartheta [Jq \sin 2\phi - (I - J \cos 2\phi)p] \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$Cr = J \sin 2\vartheta (\dot{\vartheta}^2 - p^2) + 2Jpq \cos 2\vartheta \quad \dot{\phi} = r - q \operatorname{ctg} \vartheta, \quad \dot{\vartheta} = p$$

$$I = (A + B)/2, \quad J = (A - B)/2$$

2. **Многообразия падений.** Значения угла  $\vartheta$  заключены в интервале  $(0, \pi)$ . Крайним значениям  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$  соответствуют моменты падения диска на плоскость. При  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$  правые части (1.7) имеют особенность (полюс первого порядка). Чтобы избавиться от этой особенности, введем новое время  $\tau$  с помощью замены

$$d\tau = dt / \sin \vartheta \quad (2.1)$$

Как будет показано ниже,  $\tau \rightarrow \infty$ , когда  $\vartheta \rightarrow 0$  или  $\vartheta \rightarrow \pi$ . После замены времени (2.1) уравнения движения будут иметь тот же вид, только правые части умножатся на  $\sin \vartheta$ . Таким образом, регуляризованная система уже не будет иметь особенности. Последнее уравнение (1.7) примет вид

$$\vartheta' = p \sin \vartheta$$

где штрихом обозначена производная по новому времени  $\tau$ . Оно имеет два частных решения  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$ . Следовательно, регуляризованные уравнения (1.7) обладают двумя четырехмерными инвариантными многообразиями

$$\Sigma_+ = \{\vartheta = 0\}, \quad \Sigma_- = \{\vartheta = \pi\}$$

Траекториям на  $\Sigma_{\pm}$  не соответствуют никакие реальные движения скользящего диска. Однако их изучение полезно для анализа движения, когда  $|\sin \vartheta|$  мало. Инвариантные многообразия  $\Sigma_{\pm}$  будем называть многообразиями падений.

Замечание. Замены времени для регуляризации моментов столкновений гравитирующих тел давно используются в небесной механике (см., например, [3]). Соответствующие особые инвариантные многообразия называются многообразиями столкновений. Фазовые потоки на этих многообразиях изучались в [4].

Положив в (1.7)  $\vartheta = 0$ , получим систему дифференциальных уравнений на инвариантном многообразии  $\Sigma_+$ :

$$\begin{aligned} (I + J \cos 2\phi + ma^2)p' + Jq' \sin 2\phi &= (I + J \cos 2\phi)q^2 - Jpq \sin 2\phi \\ Jp' \sin 2\phi + (I - J \cos 2\phi)q' &= Jq^2 \sin 2\phi - (I - J \cos 2\phi)pq \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\phi' = -q, \quad r' = 0$$

Эта система имеет два интеграла

$$r = c \quad (2.3)$$

$$(I + J \cos 2\phi + ma^2)p^2 + (I - J \cos 2\phi)q^2 + 2Jp\bar{q} \sin 2\phi = h$$

Второй из них является положительно определенной квадратичной формой при всех значениях угла  $\phi$ . Эти интегралы независимы, если  $h > 0$ .

Рассмотрим интегральные многообразия  $M_{ch}$ , задаваемые в  $\Sigma_+$  уравнениями (2.3). При  $h > 0$  они являются двумерными торами. Действительно, второе уравнение (2.3) задает в  $R^3 = \{p, q, \phi\}$  цилиндрическую поверхность, сечения которой плоскостями  $\phi = \text{const}$  — эллипсы. Чтобы получить поверхность  $M_{ch}$ , надо отождествить сечения этого цилиндра плоскостями  $\phi = 0$  и  $\phi = 2\pi$ .

Исследуем поведение траекторий системы (2.2) на инвариантных торах  $M_{ch}$ . Плоскость  $q = 0$  пересекает  $M_{ch}$  по двум гомологичным путям  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , сплошь состоящим из положений равновесия. Оказывается, на  $M_{ch}$  можно так ввести угловые

координаты  $\psi_1, \psi_2 \bmod 2\pi$ , чтобы уравнения (2.2) на  $M_{ch}$  приняли следующий вид:

$$\psi_1' = f, \quad \psi_2' = \gamma f \quad (2.4)$$

где  $\gamma = \text{const}$ ,  $f(\psi_1, \psi_2)$  – некоторая аналитическая функция,  $2\pi$ -периодическая по каждому аргументу, причем  $f \neq 0$  только на кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Эти две замкнутые кривые делят тор  $M$  на два кольца, внутри одного из них  $f$  положительна, а другого – отрицательна. Траектории системы (2.4) лежат на кривых

$$\gamma\psi_1 - \psi_2 = \text{const} \quad (2.5)$$

трансверсально пересекающих кривые равновесий  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . При иррациональных  $\gamma$  линии (2.5) всюду плотны на  $M$ . Качественный вид траекторий системы (2.4) показан на фиг. 2.

Для доказательства заметим сначала, что правые части (2.2) пропорциональны  $q$ . Отбросив этот множитель, получим систему, линейную по  $p$  и  $q$ . Полученные уравнения допускают инвариантную меру с плотностью

$$(ma^2I + I^2 - J^2 - ma^2J \cos 2\phi)^{1/2}$$

Можно показать, что выражение в скобках положительно при всех значениях  $\phi$ . Теперь можно воспользоваться теоремой А.Н. Колмогорова о приведении системы дифференциальных уравнений на двумерном торе с интегральным инвариантом к виду (2.4) (см. [5, 6]). Трансверсальность кривых (2.5) и кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (заданных уравнением  $q = 0$ ) вытекает из равенства  $q' = -p \neq 0$ , которое получается из уравнений (2.2), в которых отброшен множитель  $q$  и затем положено  $q = 0$ . Домножая функцию  $f$  на отброшенный множитель  $q$ , представленный как функция от  $\psi_1, \psi_2$ , получаем требуемый результат.

Таким образом, все решения системы (2.2), отличные от положений равновесия, являются двоякоасимптотическими: при  $\tau \rightarrow \pm\infty$  они неограниченно приближаются к равновесиям, лежащим на кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . В частности, уравнения (2.2) не допускают инвариантной меры с непрерывной плотностью.

Отметим в заключение, что система на  $\Sigma_-$  отличается от системы (2.2) лишь знаком правых частей. Поэтому качественная картина фазовых траекторий на  $\Sigma_-$  будет такой же.

**3. Задача о падении диска.** Покажем, что для почти всех начальных данных угол  $\vartheta$ , как функция времени  $t$ , заключен строго в интервале  $(0, \pi)$ . Тем самым, почти наверное диск никогда не упадет на горизонтальную плоскость. Доказательство этого факта в идейном отношении восходит к известной теореме из небесной механики об исключительности траекторий парных столкновений [7]: сначала проводится регуляризация уравнений движения, затем применяется один из вариантов теоремы Пуанкаре о возвращении.

Предположим, что падение диска на плоскость происходит в момент времени  $t_*$ . Это означает, что

$$\lim_{t \rightarrow t_*} \sin \vartheta(t) = 0 \quad (3.1)$$

Так как  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$  определяют инвариантные многообразия регуляризованной системы, то  $\tau \rightarrow \infty$ , когда  $t \rightarrow t_*$ . Следовательно, условие падения (3.1) эквивалентно условию

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \sin \vartheta(\tau) = 0$$

Можно проверить, что регуляризованная система (1.7) допускает инвариантную

меру с плотностью

$$I^2 - J^2 + ma^2 \cos^2 \vartheta (I - J \cos 2\phi)$$

Этот результат есть следствие теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема гамильтоновых систем, представленной в переменных п. 1.

Система (1.7) (как и ее регуляризация) имеет интеграл энергии

$$\begin{aligned} & (I + J \cos 2\phi + ma^2 \cos^2 \vartheta) p^2 + (I - J \cos 2\phi) q^2 + \\ & + 2Jpr \sin 2\phi + Cr^2 + 2mag \sin \vartheta = h \end{aligned} \quad (3.2)$$

Так как  $\vartheta \in (0, \pi)$ , то для действительных движений  $h > 0$ . Зафиксируем значение полной энергии  $h$ . Из (3.2) вытекает, что тогда переменные  $p, q, r$  ограничены. Для регуляризованной системы переменную  $\vartheta$  можно считать угловой (поскольку правые части и интеграл энергии  $2\pi$ -периодичны по  $\vartheta$ ). Поэтому уравнение (3.2) высекает в фазовом пространстве регуляризованной системы  $\{\phi \bmod 2\pi, \vartheta \bmod 2\pi, p, q, r\}$  компактное четырехмерное многообразие. Ограничение уравнений движения на это многообразие также имеет инвариантную меру. Многообразия падений  $\Sigma_+$  и  $\Sigma_-$  пересекаются с четырехмерным энергетическим многообразием по двум трехмерным компактными многообразиям  $\sigma_{\pm}(h)$ . Окружим  $\sigma_{\pm}$  открытыми областями  $U_{\varepsilon}^{\pm}$  малой меры  $\varepsilon > 0$  и рассмотрим траекторию, которая начинается вне  $U_{\varepsilon}^{\pm}$ , затем попадает в эти области и больше из них не выходит. По теореме Шварцшильда – Литтлвуда [7], мера множества таких траекторий равна нулю. Устремляя  $\varepsilon$  к нулю, получаем, что множество траекторий падения, действительно, имеет нулевую меру.

**4. Задача о качении диска.** Рассмотрим теперь качение динамически несимметричного диска по абсолютно шероховатой плоскости: скорость точки контакта равна нулю. Воспользуемся обозначениями п. 1. Вместо условий (1.5) и (1.6) будем иметь следующие соотношения:

$$v_x = -ar, \quad v_y = 0, \quad v_z = ar \quad (4.1)$$

Из уравнений (1.1)–(1.4) с учетом (4.1) можно получить следующую замкнутую систему уравнений качения диска:

$$\begin{aligned} & (I + J \cos 2\phi + ma^2) \dot{p} + J \dot{q} \sin 2\phi = 2Jr(p \sin 2\phi - q \cos 2\phi) - \\ & - (C + ma^2)qr + q \operatorname{ctg} \vartheta [(I + J \cos 2\phi)q - Jp \sin 2\phi] - mag \cos \vartheta \\ & J \dot{p} \sin 2\phi + (I - J \cos 2\phi) \dot{q} = -2Jr(q \sin 2\phi + p \cos 2\phi) + \\ & + Cpr + q \operatorname{ctg} \vartheta [Jq \sin 2\phi - (I - J \cos 2\phi)p] \\ & (C + ma^2) \dot{r} = J \sin 2\phi (q^2 - p^2) + (ma^2 + 2J \cos 2\phi) pq \\ & \dot{\phi} = r - q \operatorname{ctg} \vartheta, \quad \dot{\vartheta} = p \end{aligned} \quad (4.2)$$

Эта система также имеет особенности при  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$ . Поэтому к ней можно применить методы разд. 2. Снова получаем два инвариантных многообразия падений  $\Sigma_{\pm}$ , причем регуляризованные уравнения на  $\Sigma_{\pm}$  в точности совпадают с уравнениями (2.2).

К сожалению, инвариантную меру уравнений (4.2) найти не удастся. Не исключено, что ее просто не существует. Как известно, типичные неголомомные системы не

имеют инвариантной меры с непрерывной плотностью [8]. Однако если  $A = B$  ( $J = 0$ ), то дивергенция регуляризованных уравнений (4.2) равна нулю. Поэтому фазовый поток этой системы сохраняет обычную меру в пространстве переменных  $\{p, q, J, \vartheta, \phi\}$ . Таким образом, для симметричного диска можно применить метод п. 3. и получить, что для почти всех начальных данных катящийся симметричный диск никогда не упадет на плоскость. Этот результат другими методами был ранее получен в [9, 10].

Вопрос о вероятности падения катящегося диска при  $J \neq 0$  остается пока открытым. Для решения этой задачи необходим анализ семейства траекторий, асимптотических к многообразиям  $\Sigma_{\pm}$  при  $\tau \rightarrow +\infty$ .

**5. Диск с острым краем на льду.** Рассмотрим промежуточную модель движения диска, когда скорость точки контакта направлена по касательной к диску в этой точке. Такая связь также является неголомомной. При  $A = B$  эта задача решена в [11]. Условия (1.5)–(1.6) надо заменить условиями  $v_y = 0$ ,  $v_z = ap$ ,  $R_x = 0$ .

Учитывая эти соотношения, из (1.1)–(1.4) получаем следующую замкнутую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} (I + J \cos 2\phi + ma^2) \dot{p} + J \dot{q} \sin 2\phi &= 2Jr(p \sin 2\phi - q \cos 2\phi) - \\ - Cqr + q \operatorname{ctg} \vartheta [(I + J \cos 2\phi)q - Jp \sin 2\phi] + maq v_x - mag \cos \vartheta \\ J \dot{p} \sin 2\phi + (I - J \cos 2\phi) \dot{q} &= -2Jr(q \sin 2\phi + p \cos 2\phi) + \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$+ Cpr + q \operatorname{ctg} \vartheta [Jq \sin 2\phi - (I - J \cos 2\phi)p]$$

$$C \dot{r} = J \sin 2\phi (q^2 - p^2) + 2Jpq \cos 2\phi$$

$$\dot{\phi} = r - q \operatorname{ctg} \vartheta, \quad \dot{\vartheta} = p, \quad \dot{v}_x = -apq$$

В отличие от (1.7) и (4.2), фазовое пространство этой системы уже шестимерно.

Регуляризованные уравнения (5.1) при  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$  совпадают с уравнениями (2.2), только к ним надо добавить уравнение  $v'_x = 0$ . Пятимерные многообразия падений расслоены на двумерные торы из п. 2.

К сожалению, регуляризованные уравнения (5.1) в общем случае, по-видимому, не имеют инвариантной меры. Однако, при  $A = B$  их фазовый поток сохраняет стандартный объем. Поэтому симметричный диск с острым краем на льду почти никогда не упадет. Другим методом этот результат получен в [11].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00747).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чаплыгин С.А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Тр. отд. физ. наук Об-ва любителей естествозн., антропол. и этнографии. 1897. Т. 9. Вып. 1. С. 10–16.
2. Анпель П. Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз. 1960. 487 с.
3. Себекей В. Теория орбит. М.: Наука, 1982. 656 с.
4. Mather J.N., McGehee R. Solutions of the collinear four-body problem which become unbounded in finite time // Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer, 1975. V. 38. P. 573–597.
5. Колмогоров А.Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.

6. Козлов В.В. Метод качественного анализа в динамике твердого тела. М: Изд-во МГУ, 1980. 230 с.
7. Зигель К.Л. Лекции по небесной механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 300 с.
8. Козлов В.В. О существовании интегрального инварианта гладких динамических систем // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 538–545.
9. Колесников С.Н. О качении диска по горизонтальной плоскости // Вест. МГУ. Математика, механика. 1985. № 2. С. 55–60.
10. Арнольд В.И., Козлов В.В., Пейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики // Совр. пробл. математики. Фундамент. направления. Т. 3. М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.
11. Козлов В.В., Колесников Н.Н. О теоремах динамики // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 28–33.

Москва

Поступила в редакцию  
14.XI.1995