УДК 517.97+531.01

В. В. КОЗЛОВ
119899, Россия, Москва Воробьевы горы, Московский государственный университет
механико-математический факультет, кафедра теоретической механики
E-mail: vako@nw.math.msu.su

ЗАМКНУТЫЕ ОРБИТЫ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ЗАРЯДА В ПЕРИОДИЧЕСКОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Поступила в редакцию 10 декабря 1996 г.

В работе рассматривается задача о движении заряженной частицы по двумерному тору в магнитном поле постоянного направления. Физический аспект этой задачи — динамика электронов в металлах (кристаллических решетках Браве), допускающих двумерную дискретную группу трансляций. Указано пороговое значение магнитного поля, начиная с которого заведомо существуют три замкнутых ларморовских орбиты заданной энергии. Доказано, что если в примитивной ячейке решетки Браве имеется n атомов решетки, то в невырожденном случае найдется $4+n$ различных ларморовских орбит. Оказывается, в отсутствие магнитного поля динамика электронов носит хаотический характер: при положительных значениях полной энергии динамические системы на соответствующих энергетических поверхностях имеют положительную энтропию.

Дмитрию Викторовичу Аносову
к его шестидесятилетию

1. Введение

Движение механических систем с конфигурационным пространством $M^n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

с лагранжианом $L(\dot{x}, x) = L_2 + L_1 + L_0$. Здесь

$$L_2 = \frac{1}{2}\sum g_{ij}(x)\dot{x}_i\dot{x}_j$$

— риманова метрика на M^n — положительно определенная квадратичная форма относительно скорости $\dot{x}$ (кинетическая энергия K системы), L_1 — локальная 1-форма на M^n (ее внешний дифференциал $dL_1 = \Omega$ является замкнутой 2-формой; она называется формой гироскопических сил), L_0 — функция на M^n (силовая функция; функция $V = -L_0$ называется потенциальной энергией).

Гироскопические силы появляются при переходе во вращающуюся систему отсчета, при понижении числа степеней свободы систем с симметриями, а также при изучении движения зарядов в магнитном поле (сила Лоренца). Гироскопические силы не влияют на сохранность полной энергии системы

$$K + V = h = \text{const}\,.$$

Поскольку потенциальная энергия V определена с точностью до аддитивной постоянной, то полную энергию h будем считать равной нулю.

В механике обычно рассматривают две задачи о существовании периодических решений — либо заданного периода, либо заданной энергии. Мы обсудим задачу о наличии периодических решений с нулевой полной энергией.

Поскольку $K \geqslant 0$, то такие траектории лежат в области

$$B = \{x \in M^n : V(x) \leqslant 0\},$$

которая называется областью возможности движения. Согласно принципу Мопертюи внутри области B траектории совпадают с экстремалями функционала действия

$$\int \left(2\sqrt{L_0 L_2} + L_1\right) dt. \tag{1}$$

В обратимом случае, когда $L_1 = 0$, будем иметь движение по геодезическим линиям римановой метрики $L_0 L_2$. Если M^n компактно и $L_0 > 0$ (или, что то же самое, $\max V < h = 0$), то получим полное риманово многообразие и задача о наличии периодических траекторий заданной энергии сводится к обычной задаче вариационного исчисления в целом. Современное состояние дел в этой области изложено в книге Клингенберга [1] (дополненной комментариями Д. В. Аносова) и в обзоре И. А. Тайманова [2]. Важную роль здесь сыграли работы Д. В. Аносова [3–5], посвященные конструктивному критическому анализу идей, связанных с теоремой Пуанкаре о трех геодезических.

Если энергия невелика (т. е. $0 = h < \max V$), то метрика Якоби $L_0 L_2$ вырождается на границе области возможности движения B (длины кривых, лежащих на границе ∂B, равны нулю). В этом случае периодические траектории естественным образом разбиваются на два класса: вращения и либрации. Траектории вращений не пересекаются с границей ∂B, а траектории либраций имеют с ∂B ровно две общие точки (в которых скорость системы обращается в нуль). Первый нетривиальный результат о либрациях получен Г. Зейфертом в 1948 году: он доказал существование либрационной траектории в случае, когда область возможности движения B гомеоморфна n-мерному диску [6]. Затем в работе [7] был рассмотрен случай неодносвязной области B: число различных либраций не меньше числа образующих фундаментальной группы $\pi(B/\partial B)$, где $B/\partial B$ — топологическое пространство, получаемое из B стягиванием границы в точку. В частности, если граница ∂B имеет k связных компонент, то число либраций не меньше $k-1$. Существование либраций в произвольной односвязной области установлено С. В. Болотиным [8]. Отметим, что в отличие от обычной задачи о замкнутых геодезических, число либраций может быть конечно. Точнее, для любого n легко привести примеры областей возможности движения, у которых периодических вращений вообще нет, а число либраций равно n. Отметим еще, что гипотеза Зейферта о наличии n различных либраций в n-мерном диске в полном объеме не доказана (см. [9]).

Обсудим, наконец, необратимый случай, когда $L_1 \neq 0$. Здесь возможны два варианта: или 2-форма гироскопических сил точна, или она не является точной. В первом случае L_1 является корректно определенной 1-формой на M^n. Если дополнительно квадратичная форма $4L_0L_2 - L_1^2$ положительно определена, то интеграл (1) будет длиной дуги некоторой финслеровой метрики на M. Этот случай, как заметил еще Биркгоф [10], может быть исследован обычными вариационными методами.

Особый интерес представляют случаи, когда 2-форма Ω не точна или когда функционал Мопертюи (1) неположительный. Задача о периодических траекториях таких систем рассматривалась в работах [11, 12] (см. также обзор С. П. Новикова [13]), в которых предложено расширение теории Морса на необратимые системы. В качестве важных следствий упомянем существование периодических траекторий уравнений Кирхгофа при весьма общих и естественных (с точки зрения механики) условиях, а также утверждение о наличии периодических траекторий («ларморовских орбит») заряда на торе с произвольной метрикой в ненулевом в среднем магнитном поле (в невырожденном случае таких ларморовских орбит не менее четырех). В основе теории Новикова лежит градиентный спуск на пространствах несамопересекающихся кривых, который в итоге должен приводить к замкнутым траекториям без самопересечений. Однако, как заметил С. В. Болотин, при градиентном спуске в необратимом случае могут появиться самопересечения деформируемых кривых. В ряде работ (ссылки на них можно найти в обзоре [2]) была предпринята попытка обойти эту неприятность. Однако, обосновать теорию С. П. Новикова удалось лишь при некоторых дополнительных предположениях (см. [2] и [14]).

С другой стороны, в 1984 г. автор нашел другой путь к трем ларморовским орбитам на двумерном торе, использующий обобщение известной геометрической теоремы Пуанкаре о неподвижных точках симплектических отображений, предложенное В. И. Арнольдом [15]. В [9] рассмотрены уравнения

$$\ddot{x} = -H\dot{y} - V'_x, \qquad \ddot{y} = H\dot{x} - V'_y,$$

где $H > 0$, V — функции на двумерном торе $T^2 = \{x, y \bmod 2\pi\}$. Они описывают движение заряда по плоскому тору в магнитном поле H и дополнительном потенциальном поле с потенциальной энергией V. Оказывается, если $\max V < h$ и

$$H^2 > \frac{V_x'^2 + V_y'^2}{2(h - V)}, \tag{2}$$

то существуют три замкнутые орбиты (с учетом кратностей их четыре) с полной энергией h. В частности, если $V \equiv 0$, то три ларморовские орбиты существуют в предположении, что магнитное поле направлено в одну сторону.

Впоследствии В. А. Гинзбург [16] доказал, что число замкнутых траекторий в сильном магнитном поле на сфере не менее двух, а на компактной поверхности рода $g \geqslant 1$ их не менее трех. Если все периодические траектории невырождены, то их не меньше $2g+2$. Можно, наоборот, считать магнитное поле умеренным (и сохраняющим знак), а метрику мало отличающейся от метрики постоянной кривизны. Используя конформные координаты и замену времени, из неравенства (2) легко вывести теорему В. А. Гинзбурга для случая $g = 1$ (это рассуждение автора приведено в [16]).

Цель настоящей работы — распространить неравенство (2) на случай произвольной римановой метрики на торе. Этот результат показывает, насколько мы далеки от гипотезы В. И. Арнольда о трех ларморовских орбитах на торе в магнитном поле одного направления. Развиваемый подход основан на синтезе методов теории динамических систем и вариационного исчисления (доказательство Конли и Цендера [17] обобщенной геометрической теоремы Пуанкаре основано на использовании вариационного принципа Гамильтона в форме Гельмгольца—Пуанкаре в фазовом пространстве). Такой синтез присутствует уже в классической работе Пуанкаре о замкнутых геодезических на выпуклой сфере, с которой по существу и началось современное вариационное исчисление в целом.

Физический аспект рассматриваемой задачи — динамика электронов в кристаллических решетках металлов (решетках Браве), допускающих двумерную группу трансляций. Факторизация плоскости по этой группе приводит к плоскому двумерному тору. Правда, электрический потенциал имеет сингулярности кулоновского типа, совпадающие с атомами решетки.

Еще в 1905 г. Лоренц предложил упрощенную модель для описания динамики электронного облака в металлах (газ Лоренца): это упругий биллиард в области $T^2 \setminus \bigcup B_i$, где B_i — непересекающиеся неподвижные круги на торе T^2. Как показал Я. Г. Синай [18], газ Лоренца является дискретной системой Аносова и поэтому обладает свойством эргодичности при всех положительных значениях энергии.

В основе модели Лоренца лежат известные свойства рассеяния на кулоновском центре, похожие на упругое отражение. Однако, эта аналогия является лишь грубым приближением к действительности.

В настоящей работе установлены хаотические свойства динамики электрона в «точной» модели, основанной на кулоновском притяжении к узлам периодической решетки Браве. Доказана положительность топологической энтропии при всех положительных значениях полной энергии, а также наличие зон квазислучайных колебаний.

2. Теорема о трех ларморовских орбитах

Лемма 1. *В некоторых угловых переменных $x, y \bmod 2\pi$ риманова метрика K приводится к виду*

$$K = \Lambda\, \frac{a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2}{2}, \tag{3}$$

где Λ — положительная функция на T^2, a, b, c — некоторые постоянные.

Действительно, конформные координаты на римановом многообразии (T^2, K) позволяют ввести комплексную структуру на T^2. Остается воспользоваться теоремой об униформизации (см., например, [19]), согласно которой компактная риманова поверхность рода 1 конформно эквивалентна фактор-пространству комплексной плоскости $\mathbb{C}$ по некоторой решетке Γ.

Замечание. Вид метрики (3) сохраняется при линейных преобразованиях с целочисленной унимодулярной матрицей. Однако, в общем случае с помощью таких преобразований нельзя ввести глобальные конформные координаты (когда $a = c$ и $b = 0$), поскольку типичная решетка Γ не ортогональная.

Пусть $\Omega = H dx \wedge dy$ — 2-форма гироскопических (магнитных) сил. Предположим, что $H > 0$ (магнитное поле не обращается в нуль); тогда Ω — форма площади на T^2.

В угловых координатах x, y уравнения движения заряда на T^2 имеют следующий вид:

$$(K'_{\dot{x}})^{\cdot} - K'_x = -H\dot{y} - V'_x, \quad (K'_{\dot{y}})^{\cdot} - K'_y = H\dot{x} - V'_y. \tag{4}$$

Зафиксируем нулевое значение полной энергии

$$K + V = 0 \tag{5}$$

и будем считать, что $\max V < 0$ (или, что то же самое, $V < 0$).

Теорема 1. *Пусть $V < 0$ и выполнено неравенство*

$$H^2 > \frac{|W'|^2 \Delta}{-2W}, \tag{6}$$

где

$$W = \Lambda V < 0, \quad \Delta = ac - b^2 > 0, \quad |W'|^2 = (A^{-1}W', W'), \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Тогда на торе найдется не менее трех (или четырех, считая кратности) периодических траекторий с нулевой энергией.

Замечание. $|W'|^2$ — квадрат длины ковектора W'_x, W'_y в метрике, двойственной плоской метрике $a\,dx^2 + 2b\,dx\,dy + c\,dy^2$.

Для евклидовой метрики (когда $\Lambda a = \Lambda c = 1$, $b = 0$) неравенство (6) переходит в условие (2). Поскольку (6) заведомо справедливо при больших H, то теорема 1 содержит теорему

В. А. Гинзбурга для поверхности рода 1. Отметим одно любопытное следствие: если $\Lambda V \equiv \mathrm{const} < 0$, то неравенство (6) автоматически выполняется.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Сначала, следуя Биркгофу, введем новое время τ по формуле $dt = \Lambda\, d\tau$. Штрихом будем обозначать дифференцирование по τ.

Лемма 2. (ср. с [10], гл. II). *После замены времени уравнения* (4) *перейдут в уравнения*

$$ax'' + by'' = -Hy' - W_x', \quad bx'' + cy'' = Hx' - W_y', \tag{7}$$

а интеграл энергии (5) *примет вид*

$$\frac{ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2}{2} + W = 0, \tag{8}$$

где $W = \Lambda V$.

Полезно еще несколько упростить вид уравнений (7)–(8) с помощью линейного на накрывающей тор плоскости преобразования

$$x = \alpha u + \beta v, \quad y = \gamma u + \delta v.$$

Матрица $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ выбирается из условия $B^{\mathrm{T}}AB = E$ (E — единичная матрица). В новых переменных u, v уравнения (7) и (8) принимают вид

$$u'' = -\Delta^{-1/2}Hv' - W_u', \quad v'' = \Delta^{-1/2}Hu' - W_v', \tag{9}$$

$$u'^2 + v'^2 + 2W = 0. \tag{10}$$

Здесь $\Delta = \det A = (\det B)^{-2}$, H, W представлены как функции от u, v.

Положим

$$u' = \sqrt{-2W}\cos\phi, \quad v' = \sqrt{-2W}\sin\phi. \tag{11}$$

Тогда соотношение (10) превратится в тождество, а переменные $\phi \bmod 2\pi$, u, v будут координатами на трехмерной поверхности нулевого уровня энергии. Угловая переменная ϕ удовлетворяет уравнению

$$\phi' = H\Delta^{-1/2} + \frac{W_u'\sin\phi - W_v'\cos\phi}{\sqrt{-2W}}. \tag{12}$$

Уравнения (11) и (12) составляют замкнутую систему дифференциальных уравнений.

Правую часть (12) обозначим $\Phi(u, v, \phi)$. Так как $(W_u'\sin\phi - W_v'\cos\phi)^2 \leqslant W_u'2 + W_v'^2$, то (согласно (6)) $|\Phi| \geqslant \mathrm{const} > 0$. Следовательно, переменная ϕ меняется монотонно и ее можно принять в качестве нового времени:

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{\sqrt{-2W}\cos\phi}{\Phi}, \quad \frac{dv}{d\phi} = \frac{\sqrt{-2W}\sin\phi}{\Phi}. \tag{13}$$

Лемма 3. *Уравнения* (13) *имеют интегральный инвариант*

$$\operatorname{mes} D = \iint\limits_D \Phi\, du\, dv, \tag{14}$$

D — любая измеримая область.

Если матрица B целочисленная и унимодулярная, то u, v — угловые координаты и (13) — система дифференциальных уравнений на нашем торе с 2π-периодической по ϕ правой частью.

Согласно лемме 3, отображение за период 2π сохраняет меру (14) и, более того, «центр тяжести» тора: смещение точек u, v за время $\phi = 2\pi$, усредненное по мере (14), равно нулю. Неподвижность центра масс доказывается методом работы [20]. Наличие трех ларморовских орбит вытекает теперь из обобщенной теоремы Пуанкаре об отображении тора на себя, сохраняющих на месте центр тяжести.

Если B — произвольная матрица, то надо воспользоваться обратным преобразованием $u, v \to x, y$. Уравнения для x, y будут иметь схожий с (13) вид, причем порождаемое ими отображение за период сохраняет ту же меру и не сдвигает центр тяжести тора $T^2 = \{x, y \bmod 2\pi\}$.

3. Улучшенные оценки

Укажем один путь улучшения оценки (6), гарантирующий существование трех ларморовских орбит. Для простоты рассмотрим случай, когда конформные угловые координаты существуют в целом (матрица A единичная). Уравнения движения имеют вид (9) и (10), где надо положить $\Delta = 1$.

Вместо подстановки (11) сделаем замену

$$u' = \sqrt{-2W}\cos(\phi + \lambda), \quad v' = \sqrt{-2W}\sin(\phi + \lambda), \tag{15}$$

где λ — некоторая функция на торе $T^2 = \{u, v \bmod 2\pi\}$. Из (9) получаем следующее уравнение для угловой переменной ϕ:

$$\phi' = H + (\mu'_u - \lambda'_v)v' - (\mu'_v + \lambda'_u)u', \quad \mu = -\frac{1}{2}\ln(-W). \tag{16}$$

Из (15) и (16) вытекает монотонное изменение ϕ, если выполнено неравенство

$$H^2 > 2e^{2\mu}\left[(\mu'_u - \lambda'_v)^2 + (\mu'_v + \lambda'_u)^2\right]. \tag{17}$$

Если $\lambda = \mathrm{const}$, то получаем неравенство (6). Выражение в квадратных скобках справа в (17) равно нулю лишь в том случае, когда λ и μ — сопряженные гармонические функции (на торе они константы).

Возникает любопытная вариационная задача: для заданной функции $\mu : T^2 \to \mathbb{R}$ минимизировать максимум правой части (17) с помощью подходящего выбора функции λ.

4. Ларморовские орбиты в решетках Браве

Физический аспект задачи о движении заряженной частицы по тору — это динамика электронов в кристаллах, допускающих трансляционную симметрию. Будем считать, что кристалл состоит из неподвижных положительно заряженных атомов, составляющих кристаллическую решетку или решетку Браве. Ограничимся случаем плоской решетки, причем магнитное поле ортогонально плоскости решетки. Следовательно, при движении электрона в этой плоскости сила Лоренца не выводит частицу из плоскости решетки.

Пусть группа трансляций Γ плоскости, оставляющая инвариантной решетку Браве, порождается сдвигами вдоль линейно независимых векторов α и β. Определяемый этими векторами параллелограмм называется примитивной ячейкой решетки. Фактор-пространство плоскости по группе Γ будет двумерным тором T^2 с плоской метрикой; он получается в результате естественного отождествления противоположных сторон примитивной ячейки. Назовем такой тор фундаментальным. Метрика на T^2 имеет вид (3), где $\Lambda = \mathrm{const}$, причем $b = 0$ лишь в том случае, когда векторы α и β ортогональны.

Потенциальная энергия электрона V складывается из потенциалов, создаваемых положительными зарядами в узлах решетки Браве. Бесконечный ряд для V, правда, расходится и это создает некоторые проблемы. Для нахождения V в физике твердого тела разработан ряд приемов (сначала ищут силу кулоновского притяжения, а затем уже потенциал; отбрасывают «паразитные» бесконечности, как, например, в определении $\wp$-функции Вейерштрасса с помощью двойного ряда и т.д.). Наиболее эффективным считается метод Эвальда (см., например, [21]): в узлах решетки Браве расположены единичные положительные заряды, а отрицательный заряд (электронного облака) равномерно распределен, создавая нейтральную в целом конструкцию. С помощью этого предположения ряды для V можно сделать сходящимися и, более того, ускорить их сходимость. В основе предположения Эвальда фактически лежит эргодическая гипотеза о динамике электронов в решетках Браве (которую еще надо обосновать).

Как бы то ни было, потенциал V инвариантен относительно действия группы Γ и мы можем считать V функцией на фундаментальном торе. Что касается свойств функции V, то будем предполагать лишь следующее:

а) V аналитична на T^2 за исключением конечного числа точек $p_1, \dots, p_n$ кулоновского типа,

б) V отрицательна на $T^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$.

Точка $p \in T^2$ называется особой точкой функции V кулоновского типа, если в любых локальных конформных координатах q (по отношению к плоской метрике на T^2) с началом в точке p $V = -\frac{f(q)}{|q|}$, где f — аналитическая функция и $f(0) > 0$. Свойство б), очевидно, эквивалентно ограниченности сверху потенциальной энергии V.

Будем считать, что магнитное поле аналитично и также инвариантно относительно Γ. Простейший пример — однородное магнитное поле. Ввиду инвариантности, 2-форма гироскопических сил Ω корректно определена на фундаментальном торе.

Число n особых точек потенциала кулоновского типа — это количество атомов кристалла в каждой примитивной ячейке.

Мы будем интересоваться периодическими траекториями электрона с фиксированной неотрицательной энергией h. Область возможности движения будет совпадать со всем тором и не исключены возможности столкновения электрона с атомами решетки. Так как особенности потенциала имеют кулоновский тип, то (по теореме Зундмана) возможно аналитическое продолжение движения за момент столкновения (после двукратного обхода особенности в плоскости комплексного времени) [22]. В результате после столкновения электрон отскакивает от неподвижного атома как после упругого удара.

Теорема 2. *Если магнитное поле достаточно велико, то на фундаментальном торе имеется не менее $4 + n$ замкнутых траекторий (считая кратности) любой заданной энергии $h \geqslant 0$, причем среди них не менее трех геометрически различных.*

Если $n = 0$, то теорема 2 есть следствие теоремы 1. Таким образом, каждый атом внутри примитивной ячейки дает «лишнюю» ларморовскую орбиту.

Теорема 2 доказывается с помощью регуляризации Леви-Чивита, которая часто применяется в задачах небесной механики. Этот прием использовал С. В. Болотин для доказательства неинтегрируемости системы с кулоновским потенциалом на замкнутой двумерной поверхности M, имеющим $n > 2\chi(M)$ особенностей [23]. При этом предположении регуляризация Леви-Чивита позволяет свести фазовый поток на энергетических поверхностях с положительной энергией к геодезическому потоку на поверхности рода > 1. Неинтегрируемость последней установлена в работе [24]. Поверхности рода $g > 1$ допускают римановы метрики отрицательной гауссовой кривизны. Согласно знаменитому результату Д. В. Аносова [25], их геодезический поток — эргодическая и структурно устойчивая динамическая система. Несуществование непостоянного интеграла представляет, конечно, более скромный результат. Однако, кривизна, отрицательная в среднем, конечно, не всегда отрицательна всюду.

Пусть $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ и n четно. В случае нечетного n можно удвоить фундаментальный тор, заменяя один из векторов α, β на $2\alpha, 2\beta$.

Лемма 4 ([23]). *Существует замкнутая двумерная поверхность M и аналитическое отображение $\pi : M \to T^2$, такие, что отображение $\pi : M \setminus \pi^{-1}(P) \to T^2 \setminus P$ — двулистное накрытие, двукратно разветвленное над точками из P.*

По формуле Римана—Гурвица [26],

$$g(M) = 1 + \frac{n}{2}. \tag{18}$$

Лемма 5 ([23]). *На поверхности M существуют риманова метрика $\widetilde{K}$, потенциальная энергия $\widetilde{V}$ и невырожденная 2-форма гироскопических сил $\widetilde{\Omega}$, такие, что*

1) *проекция $\pi : M \setminus \pi^{-1}(P) \to T^2 \setminus P$ переводит траектории движения системы с лагранжианом $\widetilde{L} = \widetilde{K} - \widetilde{V}$ под действием гироскопических сил с формой $\widetilde{\Omega}$, траектории которых лежат на уровне энергии $\widetilde{K} + \widetilde{V} = 0$, в траектории электрона на фундаментальном торе с полной энергией $h \geqslant 0$,*

2) *значения потенциальной энергии $\widetilde{V}$ отрицательны.*

Динамическую систему с лагранжианом $\widetilde{L}$ и 2-формой гироскопических сил $\widetilde{\Omega}$ естественно назвать регуляризованной системой. К регуляризованной системе можно применить теперь теорему Гинзбурга [16]: при больших $\widetilde{\Omega}$ на нулевом уровне энергии имеются по крайней мере $2g + 2$ замкнутых орбит (с кратностями), среди которых не менее трех геометрически различных. С учетом формулы (18) получим $4 + n$ искомых ларморовских орбит.

5. Электронное облако

Рассмотрим задачу о движении электронов в плоской кристаллической решетке в отсутствие магнитного поля ($\Omega = 0$): электроны движутся по тору T^2 с плоской метрикой, потенциальная энергия V неположительна и имеет $n \geqslant 1$ сингулярных точек кулоновского типа. Ясно, что при всех значениях полной энергии $h \geqslant 0$ область возможности движения совпадает с тором T^2. На каждой трехмерной изоэнергетической поверхности возникает динамическая система. По теореме Зундмана, мера множества траекторий столкновения электрона с атомами кристаллической решетки равна нулю и с точки зрения эргодической теории этим множеством можно пренебречь.

Теорема 3. *При всех неотрицательных значениях полной энергии динамическая система на соответствующей энергетической поверхности имеет положительную энтропию.*

Действительно, согласно леммам 4 и 5 задача о движении электронов с фиксированной энергией $h \geqslant 0$ сводится к геодезическому потоку на некоторой замкнутой поверхности M рода $g > 1$. Следовательно, согласно [27], топологическая энтропия положительна.

Замечание. Как показал С. В. Болотин [18], в аналитическом случае геодезический поток на замкнутой поверхности рода > 1 имеет неустойчивую периодическую траекторию, асимптотические поверхности которой пересекаются не совпадая. Отсюда методами символической динамики выводится наличие квазислучайных движений. Зоны с квазислучайными движениями существуют и в исходной задаче о динамике электронов на торе, однако здесь приходится учитывать возможность продолжения траекторий за моменты столкновений.

Положительность энтропии указывает на хаотический характер динамики электронов, однако еще не влечет свойства эргодичности. По теореме Аносова эргодичность заведомо имеет место, если гауссова кривизна риманова многообразия M

$$2(h - \widetilde{V})\widetilde{K} \tag{19}$$

отрицательна. Последнее предположение не кажется неправдоподобным. Действительно, если на плоскости имеется всего один притягивающий кулоновский центр, то, согласно Ю. Мозеру (см., например, [29]) при $h > 0$ гауссова кривизна регуляризованной поверхности постоянна и отрицательна. В нашем случае вопрос усложняется из-за свойства периодичности потенциала.

Хорошо известна (см. [30]) формула для инвариантной меры на энергетической поверхности с энергией h в предположении эргодичности:

$$d\mu = \sqrt{\det \|g_{ij}(x)\|}(h - V(x))^{m/2-1}\, d^m x\, d^{m-1}\theta. \tag{20}$$

Здесь m — число степеней свободы, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$ — сферические координаты, задающие направление скорости системы в положении x. В нашем случае $m = 2$, а x_1, x_2 — угловые координаты на плоскости ($g_{ij} = \mathrm{const}$) торе T^2. Ввиду (20) мера $d\mu$ вообще не зависит от полной энергии. Если считать все направления движения электронов равноправными, то формулу (20) можно проинтегрировать по угловой переменной θ. В результате получим плотность электронного облака. Ввиду (20) она постоянна, что подтверждает гипотезу, лежащую в основе метода Эвальда (см. п. 4). Правда, в трехмерном случае (когда $m = 3$) плотность электронного облака уже не постоянна: электроны концентрируются вблизи узлов решетки Браве.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 96-01-00747) и INTAS (93-339-ext).

Литература

[1] *Клингенберг В.* Лекции о замкнутых геодезических. М.: Мир, 1982. 414 с.

[2] *Тайманов И. А.* Замкнутые экстремали на двумерных многообразиях // УМН, 1992. Т. 47, вып. 2. С. 143–185.

[3] *Аносов Д. В.* Некоторые гомотопии в пространстве замкнутых кривых // Изв. АН СССР, сер. матем., 1980. Т. 44, № 6. С. 1219–1254.

[4] *Аносов Д. В.* Некоторые гомологии в пространстве замкнутых кривых на n-мерной сфере // Изв. АН СССР, сер. матем., 1981. Т. 45, № 3. С. 467–490.

[5] *Аносов Д. В.* О типичных свойствах замкнутых геодезических // Изв. АН СССР, сер. матем., 1982. Т. 46, № 4. С. 675–709.

[6] *Seifert H.* Periodische Bewegungen mechanischer systeme // Math. Z., 1948. Vol. 51, № 2. S. 197–216.

[7] *Болотин С. В., Козлов В. В.* Либрация в системах со многими степенями свободы // ПММ, 1978. Т. 42, вып. 2. С. 245–250.

[8] *Болотин С. В.* Либрационные движения натуральных динамических систем // Вестник Моск. ун-та, сер. математика, механика, 1978. № 6. С. 72–77.

[9] *Козлов В. В.* Вариационное исчисление в целом и классическая механика // УМН, 1985. Т. 40, вып. 2. С. 33–60.

[10] *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.–Л.: ОГИЗ-ГИТТЛ. 1941. 320 с.

[11] *Новиков С. П., Шмельцер И.* Периодические решения уравнений Кирхгофа для свободного движения твердого тела в жидкости и расширенная теория теория Люстерника—Шнирельмана—Морса (ЛШМ). I // Функцион. анализ и его прилож., 1981. Т. 15, № 3. С. 54–66.

[12] *Новиков С. П.* Вариационные методы и периодические решения уравнений типа Кирхгофа. II // Функцион. анализ и его прилож., 1981. Т. 15, № 4. С. 37–52.

[13] *Новиков С. П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // УМН, 1982. Т. 37, вып. 5. С. 3–49.

[14] *Grinevich P. G., Novikov S. P.* Nonselfintersecting Magnetic Orbits on the Plane. Proof of the Owerthrowing of Cycles Principle // Advances in Math. Sciences-27. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 170. / Topics in Topology and Math. Phys. (S. P. Novikov, Ed.). AMS: Providence, RI, 1995. P. 59–82.

[15] *Arnold V.* Sur une propriéte topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique // C. R. Acad. Sc. Paris., 1965. V. 261. P. 3719–3722.

[16] *Гинзбург В. А.* Новые обобщения геометрической теоремы Пуанкаре // Функцион. анализ и его прилож., 1987. Т. 21, вып. 2. С. 16–22.

[17] *Conley C. C., Zender E.* The Birkhoff—Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold // Invent. Math., 1983. Vol. 73. P. 33–49.

[18] *Синай Я. Г.* Эргодические свойства газа Лоренца // Функцион. анализ и его прилож., 1979. Т. 13, № 3. С. 46–59.

[19] *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М.: Наука, 1968. 618 с.

[20] *Арнольд В. И.* Замечания о числах вращения // Сиб. матем. журнал., 1961. Т. 2, № 6. С. 807–813.

[21] *Слэтер Дж.* Диэлектрики, полупроводники, металлы М.: Мир, 1969. 647 с.

[22] *Уинтнер А.* Аналитические основы небесной механики. М.: Наука, 1967. 524 с.

[23] *Болотин С. В.* Влияние особенностей потенциальной энергии на неинтегрируемость механических систем // ПММ, 1984. Т. 48, вып. 3. С. 356–362.

[24] *Козлов В. В.* Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // Докл. АН СССР, 1979. Т. 249, № 6. С. 1299–1302.

[25] *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. МИАН СССР, 1967. Т. 90. С. 3–210.

[26] *Форстер О.* Римановы поверхности. М.: Мир, 1980. 248 с.

[27] *Katok A.* Entropy and closed geodesics // Ergod. Th. and Dynam. Syst., 1982. Vol. 2. P. 339–367.

[28] *Bolotin S. V.* Homoclinic orbits of geodesic flows on surfaces // Rus. Journ. of Math. Phys., 1994. Vol. 1, № 2. P. 275–288.

[29] *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1985. 304 с.

[30] *Аносов Д. В., Синай Я. Г.* Некоторые гладкие эргодические системы // УМН, 1967. Т. 22, вып. 5. С. 107–172.

V. V. KOZLOV

CLOSED ORBITS AND CHAOTIC DYNAMICS OF A CHARGED PARTICLE IN A PERIODIC ELECTROMAGNETIC FIELD

Received December 10, 1996

We study motion of a charged particle on the two dimensional torus in a constant direction magnetic field. This analysis can be applied to the description of electron dynamics in metals, which admit a 2-dimensional translation group (Bravais crystal lattice). We found the threshold magnetic value, starting from which there exist three closed Larmor orbits of a given energy. We demonstrate that if there are n lattice atoms in a primitive Bravais cell then there are $4 + n$ different Larmor orbits in the nondegenerate case. If the magnetic field is absent the electron dynamics turns out to be chaotic, dynamical systems on the corresponding energy shells possess positive entropy in the case that the total energy is positive.