

УДК 531.3

© 1996 г. В.В. КОЗЛОВ

## О ДВИЖЕНИИ ДИСКА ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

В [1–3] уравнения качения тяжелого симметричного диска по горизонтальной плоскости интегрировались с использованием гипергеометрических функций. Обзор работ по качественному анализу движения содержится в [4]. В частности, для почти всех начальных данных диск не падает и его след на плоскости заключен в ограниченной области. В публикуемой работе рассматривается более общая задача о качении тяжелого диска по наклонной плоскости. Установлено, что уравнения качения допускают инвариантную меру и поэтому почти наверное диск катится не падая. Найдено семейство равноускоренных движений и исследована их устойчивость. Для сравнения рассмотрена задача о движении круглого диска с острым краем по наклонному льду. Здесь скорость точки касания диска параллельна его горизонтальному диаметру. В случае, когда плоскость льда горизонтальная, эта задача проинтегрирована в [5]. Стационарные движения изучены в [6]. Найдены равноускоренные движения диска и исследована их устойчивость.

**1. Уравнения качения.** Рассмотрим круглый диск радиуса  $a$  и массы  $m$ . Предположим, что диск динамически симметричен и его центр масс совпадает с геометрическим центром. Пусть  $A, A, C$  – главные моменты инерции диска,  $g$  – ускорение силы тяжести.

Рассмотрим задачу о качении диска по абсолютно шероховатой плоскости  $\Pi$ , наклоненной под углом  $\alpha$  к горизонту (фигура). Для изучения движения введем две ортогональные системы отсчета с началом в центре диска (ср. [7], *n.* 411):  $Ox_1y_1z_1$  и  $Oxyz$ . Ось  $z_1$  ортогональна плоскости  $\Pi$ , ось  $y_1$  горизонтальна, ось  $z$  ортогональна плоскости диска, ось  $x$  параллельна  $\Pi$ . Пусть  $\vartheta$  – угол между осями  $z_1$  и  $z$ ,  $\psi$  – угол между  $x_1$  и  $x$ ,  $\phi$  – угол поворота диска вокруг оси  $z$ .

Пусть  $P, Q, R$  – проекции угловой скорости триэдра  $Oxyz$  на оси  $x, y, z$ ;  $p, q, r$  – проекции угловой скорости диска,  $u, v, w$  – проекции скорости  $O$  на те же оси. Известны следующие кинематические соотношения [7]:

$$p = P = \dot{\vartheta}, \quad q = Q = \dot{\psi} \sin \vartheta, \quad r = R + \dot{\phi}, \quad R = \dot{\psi} \cos \vartheta \quad (1.1)$$

$$u = -a\dot{r}, \quad v = 0, \quad w = a\dot{p} \quad (1.2)$$

Компоненты  $k_x, k_y, k_z$  вектора кинетического момента диска относительно точки  $O$  в осях  $x, y, z$  равны соответственно  $Ap, Aq, Cr$ . По теореме об изменении кинетического момента

$$\dot{k}_x + Qk_z - Rk_y = M_x, \dots \quad (1.3)$$

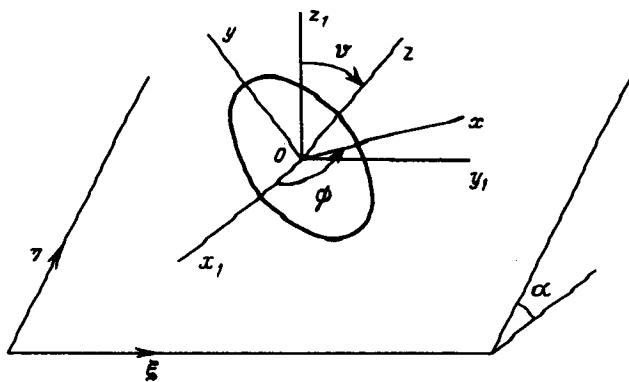
где  $M_x, \dots$  – проекции момента силы реакции с компонентами  $X, Y, Z$ :

$$M_x = -aZ, \quad M_y = 0, \quad M_z = aX \quad (1.4)$$

Для определения проекций силы реакции  $X$  и  $Z$  следует использовать теорему об изменении количества движения в проекциях на оси  $x$  и  $z$ :

$$m(u\dot{w} + Qw - Rv) = X + mg \sin \alpha \cos \psi \quad (1.5)$$

$$m(w\dot{v} + Pv - Qu) = Z - mg \cos \alpha \cos \vartheta + mg \sin \alpha \sin \vartheta \sin \psi$$



В итоге из (1.1)–(1.5) получим следующую замкнутую систему дифференциальных уравнений движения:

$$\begin{aligned} (A + ma^2)p' &= -[(C + ma^2)r - Aq \operatorname{ctg} \vartheta]q - mga \cos \alpha \cos \vartheta + mga \sin \alpha \sin \vartheta \sin \psi \\ Aq' &= (Cr - Aq \operatorname{ctg} \vartheta)p \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$(C + ma^2)r' = ma^2 pq - mga \sin \alpha \cos \psi$$

$$\vartheta' = p, \quad \psi' = q / \sin \vartheta$$

К этим уравнениям следует добавить соотношение для отыскания угла собственного вращения

$$\varphi' = r - q \operatorname{ctg} \vartheta \quad (1.7)$$

а также два соотношения для определения декартовых координат  $\xi$ ,  $\eta$  проекции центра масс диска на плоскость  $\Pi$  (см. фигуру):

$$\xi' = -ar \sin \psi - ap \sin \vartheta \cos \psi, \quad \eta' = ar \cos \psi - ap \sin \vartheta \sin \psi \quad (1.8)$$

Уравнения (1.6)–(1.8) полностью описывают качение диска по наклонной плоскости. При  $\alpha = 0$  получаем классическую задачу, решенную в [1–3].

Заметим, что уравнения (1.6) имеют интегральный инвариант

$$I(D) = \int_D \dots \int \sin \vartheta dp dq dr d\vartheta d\psi \quad (1.9)$$

Поскольку угол  $\vartheta$  заключен в интервале  $(0, \pi)$ , то инвариант (1.9) представляет инвариантную меру для системы (1.6).

**2. Задача о падении диска.** Будем говорить, что при  $t = t_*$  диск падает на плоскость  $\Pi$ , если

$$\lim_{t \rightarrow t_*} \vartheta(t) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{t \rightarrow t_*} \vartheta(t) = \pi \quad (2.1)$$

Перейдем к новому времени  $\tau$  по формуле

$$d\tau = dt / \sin \vartheta \quad (2.2)$$

При этом правые части уравнений (1.6) умножатся на  $\sin \vartheta$  и не будут иметь особенностей при  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$ . Таким образом, замена времени (2.2) регуляризует задачу о падении диска. В новом времени  $\tau$  траектории падения определяются предельны-

ми соотношениями (2.1), в которых  $\tau \rightarrow +\infty$ . Так как (1.9) является интегральным инвариантом, то после замены (2.2) фазовый поток системы (1.6) сохраняет стандартную меру в "расширенном" фазовом пространстве  $p, q, r, \vartheta \bmod 2\pi, \psi \bmod 2\pi$ .

Уравнение  $\vartheta' = p$  переходит в уравнение  $\vartheta' = p \sin \vartheta$ , где штрих обозначает дифференцирование по  $\tau$ .

Таким образом, многообразия  $S_+ = \{\vartheta = 0\}$ ,  $S_- = \{\vartheta = \pi\}$  будут инвариантными для регуляризованных уравнений. Координатами на  $S_{\pm}$  служат переменные  $p, q, r, \psi \bmod 2\pi$ . В этих переменных уравнения на  $S_{\pm}$  имеют следующий вид:

$$(A + ma^2)p' = \pm Aq^2, \quad q' = \mp pq, \quad r' = 0, \quad \psi' = q$$

Покажем, что множество траекторий, неограниченно приближающихся к  $S_+$  или  $S_-$  при  $\tau \rightarrow +\infty$ , имеет меру нуль. Для этого окружим некомпактные поверхности  $S_+$  и  $S_-$  окрестностью  $U_{\delta}$  объема  $\delta > 0$ . По теореме Шварцшильда – Литтлвуда [8], мера множества траекторий, начинающихся вне области конечного объема  $U_{\delta}$  и остающихся в  $U_{\delta}$  после некоторого момента времени  $\tau$ , равна нулю. Устремляя теперь  $\delta$  к нулю, получаем требуемое.

При  $\alpha = 0$  этот результат получен в [9]. Отметим, что множество траекторий падения диска, очевидно, не пусто.

**3. Равноускоренные движения.** Найдем частные решения уравнений (1.6), для которых  $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$ . Тогда  $p = 0$  и можно показать, что  $q = 0$ , если  $\sin \alpha \neq 0$ . Следовательно  $\psi = \psi_0$ :

$$r' = \varepsilon = -\frac{mga \sin \alpha \cos \psi_0}{C + ma^2} \quad (3.1)$$

$$\sin \psi_0 = \text{ctg} \alpha \text{ctg} \vartheta_0 \quad (3.2)$$

Соотношение (3.2) имеет простой геометрический смысл: плоскость катящегося диска вертикальна. Так как  $|\sin \psi_0| \leq 1$ , то  $|\pi/2 - \vartheta_0| \leq \alpha$ . Согласно (1.8)

$$\xi'' = -\alpha \varepsilon \sin \psi_0, \quad \eta'' = \alpha \varepsilon \cos \psi_0$$

Таким образом, диск скатывается с постоянным линейным ускорением  $a\varepsilon$  по прямой, образующей угол  $\psi_0$  с прямой наискорейшего спуска.

Если  $\psi_0 = \pi/2$ , то  $\varepsilon = 0$ . В этом случае диск катится с постоянной угловой скоростью по горизонтальной прямой.

Ниже исследуется устойчивость в линейном приближении указанных частных движений по отношению к углу наклона  $\vartheta$ .

**4. Условие устойчивости равномерного качения.** Рассмотрим сначала частное решение

$$p = q = 0, \quad r = \omega, \quad \vartheta = \pi/2 - \alpha, \quad \psi = \pi/2 \quad (4.1)$$

При этом диск катится по горизонтальной прямой в плоскости  $\Pi$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Положим  $\psi = \pi/2 + \lambda$ ,  $\vartheta = \pi/2 - \alpha + \mu$  и будем считать  $\lambda$  и  $\mu$  малыми.

Линеаризованные уравнения (1.6) будут иметь следующий вид:

$$p' = -\frac{(C + ma^2)\omega}{A + ma^2} q + \frac{mga}{A + ma^2} \mu, \quad q' = \frac{C\omega}{A} p$$

$$\mu' = p, \quad \lambda' = q / \cos \alpha$$

Отсюда

$$p'' + \left[ \frac{C(C + ma^2)\omega^2}{A(A + ma^2)} - \frac{mga}{A + ma^2} \right] p = 0$$

Следовательно, если

$$\omega^2 > \Omega^2 = \frac{mgaA}{C(C+ma^2)} \quad (4.2)$$

то угол наклона  $\vartheta$  в первом приближении совершает гармонические колебания с малой амплитудой относительно среднего значения, мало отличающегося от  $\vartheta_0$ . Если же  $\omega^2 < \Omega^2$ , то среди характеристических чисел есть положительное число и поэтому решение (4.1) будет неустойчивым.

Интересно отметить, что условие устойчивости (4.2) не зависит от угла наклона плоскости П. При  $\alpha = 0$  неравенство (4.2) является достаточным условием устойчивости (см. [4]).

**5. Устойчивость равноускоренных движений.** Положим  $\vartheta = \vartheta_0 + \mu$ ,  $\psi = \psi_0 + \lambda$ , где  $\mu$  и  $\lambda$  – малые величины. Углы  $\vartheta_0$  и  $\psi_0$  связаны соотношением (3.2). Для упрощения записи будем считать, что  $r(0) = 0$ . Тогда, согласно (3.1),  $r(t) = \varepsilon t$ . Так как  $\sin \alpha \neq 0$  и  $\cos \psi_0 \neq 0$ , то  $\varepsilon \neq 0$ .

Запишем уравнения (1.6), линеаризованные по  $p, q, \mu, \lambda$ :

$$(A + ma^2)p' = -(C + ma^2)\varepsilon tq + mga(\cos \alpha \sin \vartheta_0 + \sin \alpha \cos \vartheta_0 \sin \psi_0)\mu + mga \sin \alpha \sin \vartheta_0 \cos \psi_0 \lambda, \quad Aq' = C\varepsilon tp$$

$$\mu' = p, \quad \lambda' = q / \sin \vartheta_0$$

Оказывается, тривиальное решение системы (5.1) неустойчиво по Ляпунову, однако, оно устойчиво по отношению к переменной  $\mu$ . Более того, в линейном приближении после возмущения угол  $\vartheta$  стремится к некоторому предельному значению при  $t \rightarrow \infty$ .

Система (5.1) имеет следующий вид:

$$p' = -htq + b\mu + c\lambda, \quad q' = dtp, \quad \mu' = p, \quad \lambda' = eq \quad (5.2)$$

Коэффициенты  $h, b, c, d, e$  очевидным образом выражаются через исходные параметры рассматриваемой задачи. Полагая  $v = b\mu + c\lambda$ , перепишем (5.2) в виде линейной системы третьего порядка

$$x' = (At + B)x, \quad x = (p, q, v)^T \quad (5.3)$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -h & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ b & ce & 0 \end{vmatrix}$$

Собственные значения матрицы  $A$  равны  $\pm i\sqrt{dh}, 0$ . Так как они различны, то, как показано в [10], решения системы вида (5.3) можно искать в форме рядов

$$x(t) = t^\kappa (v + v_1/t + v_2/t^2 + \dots) \exp(\beta t^2 + \gamma t) \quad (5.4)$$

Здесь  $\beta, \gamma, \kappa$  – пока неизвестные постоянные,  $v, v_1, \dots$  – векторы из  $R^3$ . Нетрудно показать, что  $2\beta$  – собственное число матрицы  $A$ .

Рассмотрим два случая:  $2\beta = \pm i\sqrt{dh}$ ,  $\beta = 0$ . В первом из них

$$\gamma = 0, \quad \kappa = -\frac{ce}{2h} \mp \frac{ib}{2\sqrt{dh}}, \quad v = (\sqrt{h}, \mp \sqrt{d}, 0)^T \quad (5.5)$$

Согласно (5.1) и (3.1),  $celh = -1$ . Для значений (5.5) ряд (5.4) дает два линейно независимых решения системы (5.3). При этом компоненты  $p, q, v$  как функции  $t$  пред-

ставляются в виде

$$c_1 \sqrt{t} \cos\left(\frac{\sqrt{dh}}{2} t^2 - \frac{b}{2\sqrt{dh}} \ln t\right) + c_2 \sqrt{t} \sin\left(\frac{\sqrt{dh}}{2} t^2 - \frac{b}{2\sqrt{dh}} \ln t\right)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – ряды по обратным степеням  $t$ . Так как для переменных  $p$  и  $q$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_k(t) \neq 0$$

то нулевое решение линейной системы (5.1) неустойчиво: частота колебаний возрастает пропорционально  $t$ , а амплитуда растет как  $\sqrt{t}$ . Однако, для переменной  $v$ :

$$c_k(t) = O(1/t)$$

Следовательно, для полученных двух частных решений  $v(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Нулевому собственному значению матрицы  $A$  (случай  $\beta = 0$ ) отвечает частное решение системы (5.3) в виде степенного ряда

$$\frac{1}{t} \left( v' + \frac{v'_1}{t} + \frac{v'_2}{t^2} + \dots \right), \quad v'_k \in R^3, \quad v' = (0, 0, 1)^T \quad (5.6)$$

Таким образом, нулевое решение системы (5.3) асимптотически устойчиво по отношению к переменной  $v$ . Так как система (5.2) допускает семейство равновесий

$$p = q = 0, \quad \mu = cz, \quad \lambda = -bz, \quad z \in R \quad (5.7)$$

то при возмущении решений (5.2) переменные  $\mu$  и  $\lambda$  стремятся к некоторым постоянным  $\mu_0$  и  $\lambda_0$  вида (5.7). Следовательно, в линейном приближении возмущенная траектория скатывающегося диска неограниченно приближается к одному из равноускоренных движений (3.1)–(3.2).

*Замечания. 1.* Предположим, что линейная система  $x' = C(t)x$ ,  $x \in R^n$  с нулевой дивергенцией ( $\text{tr } C = 0$ ) допускает частное решение, стремящееся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ . Тогда равновесие  $x = 0$  неустойчиво. Для системы (5.3)  $\text{tr } A = \text{tr } B = 0$ ; роль частного решения, стремящегося к нулю, играет ряд (5.6).

2. Колебания твердого тела с убывающей амплитудой и неограниченно возрастающей частотой обнаружены ранее в [11].

3. Устойчивость равноускоренного скатывания диска относительно угла  $\vartheta$  можно объяснить следующим образом: угловая скорость качения  $\omega$  увеличивается и начиная с некоторого момента времени будет выполнено условие устойчивости (4.2).

**6. Задача о движении диска по наклонной плоскости льда.** Рассмотрим движение тяжелого круглого диска по наклонной плоскости  $\Pi$  с неголономной связью: скорость точки касания диска параллельна диаметру окружности диска, который в свою очередь параллелен неподвижной плоскости  $\Pi$ . В случае, когда  $\Pi$  горизонтальна, эта задача проинтегрирована в [5].

Сохраним обозначения  $n$ . 1. Соотношения (1.2) надо заменить следующими:  $\vartheta = 0$ ,  $w = ap$ . Кроме интеграла энергии, уравнения движения допускают два интеграла (см. [5]):

$$r = r_0, \quad Aq \sin \vartheta + Cr \cos \vartheta = c \quad (6.1)$$

Второй из них выражает постоянство проекции на ось  $z_1$  кинетического момента диска относительно точки  $O$ .

Следуя  $n$ . 1, выпишем замкнутую систему дифференциальных уравнений для отыскания переменных  $p$ ,  $u$ ,  $\vartheta$ ,  $\psi$ :

$$(A + ma^2)p = maqu - (Cr - Aq \operatorname{ctg} \vartheta)q - mga \cos \alpha \cos \vartheta + mga \sin \alpha \sin \vartheta \sin \psi,$$

$$\dot{u} = -apq + g \sin \alpha \cos \psi \quad (6.2)$$

$$\dot{\vartheta} = p, \quad \dot{\psi} = q / \sin \vartheta$$

В этих уравнениях  $r = r_0$ , а переменную  $q$  можно представить как явную функцию угла  $\vartheta$  с помощью (6.1). При  $\sin \alpha \neq 0$  уравнения (6.2) не удастся решить в явном виде.

Используя метод *n. 2*, можно показать, что и в этом случае скользящий диск почти наверное не упадет на плоскость П.

Уравнения (6.2) допускают семейство частных решений, аналогичных решениям (3.1) и (3.2) в задаче о качении диска

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \psi = \psi_0, \quad p = q = 0, \quad r = r_0 \quad (6.3)$$

$$\dot{u} = k = g \sin \alpha \cos \psi_0, \quad \sin \psi_0 = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \vartheta_0$$

Они имеют простой геометрический смысл: вертикально стоящий диск соскальзывает по наклонной прямой с постоянным ускорением  $k$ , равномерно вращаясь с угловой скоростью  $r = r_0$ . При этом постоянные  $r_0$  и  $c$  в (6.1) связаны соотношением

$$Cr_0 \cos \vartheta_0 = c$$

Если  $\psi_0 = \pm \pi/2$ , то диск скользит с постоянной скоростью  $u = u_0$  по горизонтальной прямой. Исследуем устойчивость таких движений, полагая  $\psi = \pi/2 + \lambda$ ,  $\vartheta = \pi/2 - \alpha + \mu$ .

Запишем линеаризованные уравнения

$$(A + ma^2)p' = (mau_0 - Cr_0)q + mga\mu \quad (6.4)$$

$$Aq' = Cr_0p, \quad \mu' = p, \quad \lambda' = q / \sin \vartheta_0$$

При их выводе использовалось уравнение  $Aq' = (Cr - Aq \operatorname{ctg} \vartheta)p$ , выражающее свойство постоянности второго интеграла момента (6.1).

Необходимое условие устойчивости тривиального решения линейной системы (6.4) имеет вид

$$(Cr_0 - mau_0)Cr_0 > mgaA \quad (6.5)$$

Это условие не зависит от угла наклона  $\alpha$  и совпадает с условием устойчивости прямолинейного стационарного движения, полученного в [6].

**7. Об устойчивости ускоренного соскальзывания.** Исследуем устойчивость частных решений (6.3) при  $\cos \psi_0 \neq 0$ , полагая  $\vartheta = \vartheta_0 + \mu$ ,  $\psi = \psi_0 + \lambda$ . Будем считать, что  $u = kt$ . Запишем линеаризованные уравнения движения

$$(A + ma^2)p' = (makt - Cr_0)q + mga(\cos \alpha \sin \vartheta_0 + \sin \alpha \cos \vartheta_0 \sin \psi_0)\mu +$$

$$+ mga \sin \alpha \sin \vartheta_0 \cos \psi_0 \lambda \quad (7.1)$$

$$Aq' = Cr_0p, \quad \mu' = p, \quad \lambda' = q / \sin \vartheta_0$$

Вид этих уравнений отличается от (5.1): время входит только в первое из них. Заменой времени  $t \rightarrow t + Cr_0 / (mak)$  можно добиться того, что коэффициент при  $q$  в первом уравнении (7.1) станет равным  $makt$ .

Тривиальное решение уравнения (7.1) неустойчиво: имеется решение в виде ряда (5.6), стремящееся к нулю при  $t \rightarrow \infty$  (см. замечание 1 из п. 5). Более того, если  $r_0 \geq 0$ , то нулевое решение системы (7.1) неустойчиво по отношению к координате  $\mu$ .

Однако, если  $r_0 < 0$ , то можно доказать устойчивость соскальзывания диска относительно переменной  $\mu$ .

Этим результатам можно дать следующее качественное объяснение: условие устойчивости (6.5) равномерного движения выполняется (нарушается) при неограниченном возрастании скорости соскальзывания  $u_0$ , если  $r_0 < 0$  ( $r_0 \geq 0$ ).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (93-913-16244) и МНФ (МСУ-000). Автор признателен С.М. Рамоданову за полезные обсуждения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чаплыгин С.А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Тр. отд. физ. наук о-ва любителей естествозн., антропол. и этнографии. 1897. Т. 9. Вып. 1. С. 10–16.
2. Appell P. Integration des equations du mouvement d'un corps pesant de revolution roulant par une arete circulaire sur un plan horizontal; cas particulier du cerceau // Rend. del circolo math. di Palermo. 1900. V. 14. P. 1–6.
3. Korteweg D. Über eine ziemlich verbreitete unrichtige Behandlungsweise eines Problems der rollenden Bewegung, über die Theorie dieser Bewegung und insbesondere über kleine rollende Schwingungen um eine Gleichgewichtslage // Nieuw Archief. Wiskunde. 1899. Bd. 4. No. 2. S. 130–155.
4. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 336 с.
5. Козлов В.В., Колесников Н.Н. О теоремах динамики // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 28–33.
6. Маркеев А.П. О стационарных движениях диска на гладком горизонтальном льду // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 16–20.
7. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
8. Зигель К.Л. Лекции по небесной механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 300 с.
9. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики // Совр. пробл. математики. Фундамент. направления. Т. 3. М.: ВИНТИ. 1985. 304 с.
10. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с.
11. Козлов В.В. О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 5. С. 10–17.

Москва

Поступила в редакцию  
20.VI.1995