УДК 517.9+531.01

В. В. Козлов, В. В. Тен

Топология областей возможности движения интегрируемых систем

Рассматриваются аналитические обратимые системы с двумя степенями свободы на фиксированном трехмерном многообразии уровня интеграла энергии. Предполагается, что это многообразие компактно и не имеет особых точек (равновесий исходной системы). Естественная проекция энергетического многообразия на двумерное конфигурационное пространство называется областью возможности движения. В ориентируемом случае это сфера с k дырами и p приклеенными ручками. Известно, что если $k = 0$ и $p \geqslant 2$, то система не имеет непостоянного аналитического интеграла на соответствующем уровне интеграла энергии. Оказывается, для областей возможности движения с краем ситуация совсем иная. Основной результат состоит в следующем: имеются примеры аналитически интегрируемых систем, для которых числа p и $k \geqslant 1$ произвольны.

Библиография: 10 названий.

§ 1. Введение. Основной результат

Рассмотрим обратимую динамическую систему с двумя степенями свободы. Пусть M – ее конфигурационное пространство; это двумерное многообразие. Фазовое пространство четырехмерно; оно совпадает с пространством кокасательного расслоения T^*M.

Функция Гамильтона $H\colon T^*M \to \mathbb{R}$ обратимой системы имеет вид

$$H = T + V, \tag{1.1}$$

где

$$T = \frac{1}{2}\sum g_{ij}(x)y_iy_j$$

– кинетическая энергия (риманова метрика на M) – положительно определенная квадратичная форма по импульсам y_1, y_2, а $V\colon M \to \mathbb{R}$ – потенциальная энергия (функция от координат x_1, x_2 на M). В дальнейшем предполагается, что M имеет структуру ориентированного аналитического многообразия, а H – аналитическая функция на T^*M. В случае неориентируемого M имеется естественное двулистное накрытие $N \to M$, где N уже ориентируемо, причем динамическая система на T^*M "поднимается" до обратимой системы на T^*N.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-013-16244) и Международного научного фонда (грант № MCУ 000).

Уравнения Гамильтона

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2) \tag{1.2}$$

имеют интеграл энергии (1.1). Зафиксируем его постоянную, которую обозначим h. Трехмерный уровень интеграла энергии

$$\Sigma_h = \{x, y : H = h\}$$

будет регулярным аналитическим многообразием, если на Σ_h нет критических точек функции H, т.е. состояний равновесия рассматриваемой системы. Это предположение, очевидно, эквивалентно условию, что h не является критическим значением потенциальной энергии V. В дальнейшем рассматривается случай, когда Σ компактно.

Естественная проекция $T^*M \to M$ (точка (x, y) переходит в точку x) переводит Σ_h в некоторую компактную область (возможно с краем) B_h на M. Эта область называется *областью возможности движения*. Так как $T \geqslant 0$, то

$$B_h = \bigl\{x \in M : V(x) \leqslant h\bigr\}.$$

Геометрия и динамика областей возможности движения обсуждается в [1].

Предположим теперь, что система (1.2) на Σ допускает непостоянный аналитический интеграл

$$F \colon \Sigma \to \mathbb{R}.$$

По теореме Лиувилля некритические поверхности уровня функции F будут объединением двумерных торов с условно-периодическими траекториями. Так как аналитическая функция на компактном многообразии имеет конечное число критических значений, то Σ разбивается на конечное число кусков, "регулярно" расслоенных на двумерные торы.

Оказывается, свойство полной интегрируемости системы (1.2) на Σ существенно зависит от топологии области возможности движения B. Первый результат в этом направлении получен в работе [2]: если $\partial B = \varnothing$ (M компактно и $h > \max V$) и род p поверхности $B = M$ (число ручек) $\geqslant 2$, то динамическая система на Σ не имеет непостоянного аналитического интеграла. С другой стороны, известны многочисленные примеры интегрируемых задач, когда $p = 0$ (сфера) и $p = 1$ (тор). Впоследствии были получены новые доказательства этого результата, основанные на других идеях (см. [3]–[6]).

Рассмотрим теперь случай, когда граница ∂B не пуста. Топологическая классификация таких областей хорошо известна. Это сфера с $k \geqslant 1$ дырами и $p \geqslant 0$ ручками. Число p называется *родом* области B. Наш основной результат составляет

Теорема 1. *Для любых $k \geqslant 1$ и $p \geqslant 2$ существуют аналитическая система (1.2) и значение энергии h такие, что*

1) *ограничение системы (1.2) на Σ_h допускает непостоянный аналитический интеграл,*
2) *компактная область B_h гомеоморфна сфере с k дырами и p ручками.*

Таким образом, область возможности движения с краем аналитически интегрируемой системы с двумя степенями свободы может быть устроена топологически сколь угодно сложно.

В связи с этим замечанием полезно сравнить теорему 1 с результатом работы [7]. Пусть $V \equiv 0$, и найдется двумерное многообразие с краем $M_0 \subset M$ такое, что $\chi(M_0) < 0$, и граница M_0 геодезически выпукла. Тогда уравнения (1.2) не имеют дополнительного аналитического интеграла. Например, если M_0 – диск с $k \geqslant 2$ дырами, то $\chi(M_0) = 1 - k < 0$.

§ 2. Случай $p \leqslant 1$

Наиболее просто теорема 1 доказывается в случаях, когда $p = 0$ и $p = 1$. Предъявим системы, аналитически интегрируемые на Σ, причем проекции Σ на M (область возможности движения) имеет любое заданное число дыр.

Положим сначала $p = 0$. Пусть $M = \mathbb{R}^2 = \{x_1, x_2\}$, кинетическая энергия задает плоскую метрику

$$T = (y_1^2 + y_2^2)/2, \tag{2.1}$$

потенциал V равен сумме

$$f(x_1) + g(x_2), \tag{2.2}$$
$$f(z) = T_4(z) = 8z^4 - 8z^2 + 1, \qquad g(z) = T_{2k+2}(z).$$

Здесь $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$ – многочлены Чебышёва.

Ясно, что $V(x_1, x_2) \to +\infty$, когда $x_1^2 + x_2^2 \to \infty$. Потенциальная энергия имеет ровно k локальных максимумов, где эта функция принимает одно и то же значение, равное 2. Положим $h = 2 - \varepsilon$, где ε – малое положительное число. Легко понять, что тогда B_h гомеоморфно диску с k дырами.

Остается заметить, что обратимая система с кинетической энергией (2.1) и потенциалом (2.2) вполне интегрируема. Она допускает дополнительный аналитический интеграл

$$F = \frac{y_1^2}{2} + f(x_1),$$

независимый от интеграла энергии $H = T + V$.

Для $p = 1$ и произвольного $k \geqslant 0$ также можно указать обратимую систему, интегрируемую разделением переменных. Пусть

$$M = \mathbf{T}^2 = \{x_1, x_2 \bmod 2\pi\},$$
$$T = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2}, \qquad V = \cos x_1 + \cos(k+1)x_2.$$

Легко проверить, что при $h = 2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ – мало, область B_h гомеоморфна диску с одной ручкой и k дырами. Дополнительным аналитическим интегралом служит, например, функция

$$F = \frac{y_1^2}{2} + \cos x_1.$$

§ 3. Случай $p > 1$

Построение аналитически интегрируемой системы с областью возможности движения рода $p > 1$ основано на идее, изложенной в § 2.

Рассмотрим на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2 = \{x_1, x_2\}$ квадрат

$$\Pi = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$$

и зададим кинетическую и потенциальную энергии формулами

$$T = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2}, \quad V = -\cos x_1 - \cos x_2; \qquad y_i = \dot{x}_i. \tag{3.1}$$

При $h = 1$ область возможности движения $B_h \subset \Pi$ – это криволинейный крест, пересекающийся с границей $\partial\Pi$ по отрезкам

$$a_1 = \{-\pi\} \times \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big], \qquad a_2 = \{\pi\} \times \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big],$$
$$b_1 = \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \times \{-\pi\}, \qquad b_2 = \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \times \{\pi\}.$$

Пусть

$$K = \Big\{(x_1, x_2) \in \Pi : V(x_1, x_2) \leqslant \frac{3}{2}\Big\} \tag{3.2}$$

– бо́льший крест с граничными отрезками $\alpha_1 \supset a_1$, $\alpha_2 \supset a_2$, $\beta_1 \supset b_1$ и $\beta_2 \supset b_2$.

Рассмотрим теперь $2p + k - 2$ экземпляров криволинейного креста (3.2). Декартовы координаты в i-м кресте K_i обозначим x_1^i и x_2^i. Кинетическую и потенциальную энергии в K_i зададим формулами (3.1), в которых переменные x_k, y_k заменены на x_k^i, y_k^i. Граничные отрезки креста K_i обозначим α_1^i, α_2^i, β_1^i, β_2^i. Два креста K_i и K_j можно склеить, например, по отрезкам α_1^i и α_2^j, отождествив точки с координатами $(-\pi, x_2^i)$ и (π, x_2^j). Такую склейку будем обозначать символом (α_1^i, α_2^j). Это склеивание можно осуществить таким образом, чтобы в результате получилось аналитическое двумерное многообразие (с краем). Аналогично определяется операция склеивания (β^i, β^j). Склеим теперь $K_1, \dots, K_{2p+k-2}$ по формуле

$$(\beta_1^1, \beta_2^1) + (\alpha_1^1, \alpha_1^2) + (\alpha_2^1, \alpha_2^2) + \dots + (\beta_1^{2p-2}, \beta_1^{2p-1}) + (\beta_2^{2p-2}, \beta_2^{2p-1})$$
$$+ \sum_{i=2}^{k}\big((\alpha_1^{2p+i-3}, \alpha_2^{2p+i-2}) + (\beta_1^{2p+i-2}, \beta_2^{2p+i-2})\big) + (\alpha_1^{2p+k-2}, \alpha_2^{2p-1}). \tag{3.3}$$

Символ “+” означает последовательное повторение склеивания. В результате получим аналитическое компактное многообразие M с краем.

Лемма. *Многообразие M гомеоморфно сфере с k дырами и p приклеенными ручками.*

Это утверждение будет доказано ниже.

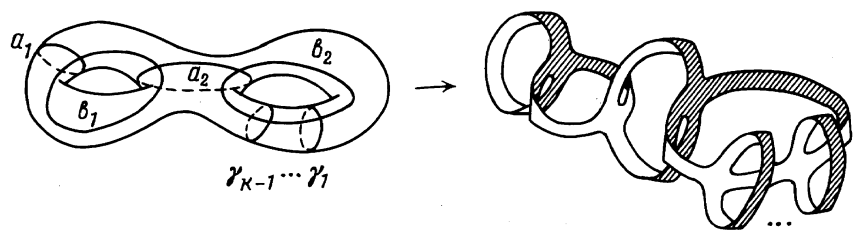
Ввиду периодичности потенциальная энергия $V \colon M \to \mathbb{R}$ будет аналитической функцией. Область возможности движения

$$B_1 = \{V \leqslant 1\} \subset M,$$

очевидно, гомеоморфна M. Построенная обратимая механическая система аналитически интегрируема. Действительно, зададим в T^*K_i $(i = 1,\dots,2p+k-2)$ функцию F формулой

$$\frac{(y_1^i)^2}{2} - \cos x_1^i.$$

Ясно, что это – интеграл построенной обратимой гамильтоновой системы. Функция F определена почти всюду на T^*M и по построению многообразия M она продолжается по непрерывности до аналитической функции на всем фазовом пространстве T^*M. Теорема доказана.



Доказательство леммы. Рассмотрим замкнутую поверхность рода p (на рис. $p = 2$) и $2p$ "канонических" замкнутых циклов $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p$; пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$ – гомологичные циклы, пересекающие b_p (как показано на рис.). Если разрезать поверхность по этим $2p+k-1$ циклам, то поверхность распадается на k кусков, каждый из которых гомеоморфен диску. Окружим теперь указанные циклы тонкими полосками. Область на поверхности вне этих полосок будет несвязным объединением k дисков. Следовательно, объединение всех полосок (см. рис.) – поверхность с краем рода p, граница которого имеет ровно $k \geqslant 1$ связных компонент. Нетрудно проверить, что она получается путем склеивания $2p+k-2$ крестов по формуле (3.3). Лемма доказана.

§ 4. Заключительные замечания

1. Функция $F\colon T^*M \to \mathbb{R}$ называется *условным* (по Биркгофу) *интегралом* гамильтоновой системы (1.2), если $\dot F = 0$ на некоторой поверхности $\Sigma_h = \{H = h\}$. Теорема 1 допускает следующее уточнение.

Теорема 2. *Для любой компактной поверхности N с краем найдутся аналитическая обратимая гамильтонова система и значение полной энергии h такие, что*

1) *B_h гомеоморфно N,*
2) *существует нетривиальный условный интеграл в виде полинома второй степени по импульсам.*

Таким образом, для областей возможности движения с краем нет никаких топологических препятствий к существованию условных квадратичных интегралов. Интересно отметить, что для условных интегралов, линейных по импульсам, такие препятствия существуют. Как доказано в [9], если при $H = h$ имеется условный линейный интеграл, то эйлерова характеристика области B_h неотрицательна.

2. Было бы интересным исследовать задачу о препятствиях к существованию условных полиномиальных интегралов для необратимых систем с гироскопическими силами, когда $\partial B \neq \varnothing$. Для случая, когда B совпадает со всем M, эта задача исследована в [10]. Если род M больше 1, то условных полиномиальных интегралов нет. Если же M гомеоморфно тору, то необходимое условие интегрируемости по Биркгофу состоит в следующем: интеграл 2-формы гироскопических сил по тору равен нулю.

3. Когда $\partial B \neq \varnothing$, то вопрос о топологических препятствиях к полной интегрируемости для систем со многими степенями свободы остается пока открытым. Здесь речь должна идти об условиях существования n инволютивных интегралов, где n – число степеней свободы системы.

Список литературы

1. *Козлов В. В.* Вариационное исчисление в целом и классическая механика // УМН. 1985. Т. 40. №2. С. 33–60.
2. *Козлов В. В.* Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // ДАН СССР. 1979. Т. 249. №6. С. 1299–1302.
3. *Колокольцов В. Н.* Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным по скорости первым интегралом // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. №5. С. 994–1010.
4. *Тайманов И. А.* Топологические препятствия к интегрируемости геодезических потоков на неодносвязных многообразиях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. №2. С. 429–435.
5. *Болотин С. В.* Двоякоасимптотические траектории минимальных геодезических // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1992. №1. С. 92–96.
6. *Paternain G. P.* On the topology of manifolds with completely integrable geodesic flows // Ergod. Th. and Dynam. Sys. 1992. V. 12. P. 109–121.
7. *Болотин С. В.* Неинтегрируемость задачи n центров при $n > 2$ // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1984. №3. С. 65–68.
8. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. 1983. Т. 38. №1. С. 3–67.
9. *Абраров Д. Л.* Топологические препятствия к существованию условно-линейных интегралов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1984. №6. С. 72–75.
10. *Болотин С. В.* О первых интегралах систем с гироскопическими силами // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1984. №6. С. 75–82.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
03.10.1995