УДК 531.01

О. В. Измайлова, В. В. Козлов

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА—ПУАНКАРЕ НА РАЗРЕШИМЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

1. Уравнения Эйлера—Пуанкаре. Пусть g — алгебра Ли, $n=\dim g$. Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис g, то

$$[e_i, e_j]=c_{ij}^k e_k.$$

Коэффициенты c_{ij}^k — структурные постоянные алгебры g в базисе $\{e_s\}_1^n$. По повторяющимся верхним и нижним индексам ведется суммирование.

Обычно g — алгебра Ли некоторой n-мерной группы G, $e_1, \ldots, e_n$ — набор независимых левоинвариантных полей на G. Если G — конфигурационное пространство механической системы, то

$$\omega=\omega^k e_k \in g$$

— вектор скорости. Пусть

$$T=I_{sp}\omega^s\omega^p/2$$

— левоинвариантная кинетическая энергия системы (риманова метрика на G). Тензор инерции $I=\|I_{sp}\|$ позволяет вектору скорости сопоставить момент системы $m\in g^*$ по правилу

$$m_s=I_{sp}\omega^p, \quad 1\leqslant s\leqslant n. \tag{1.1}$$

Теорема об изменении момента приводит к *уравнениям Эйлера—Пуанкаре*

$$\dot m_k=c_{ik}^j m_j\omega^i, \quad 1\leqslant k\leqslant n. \tag{1.2}$$

Эти уравнения получены впервые Пуанкаре в работе [1]. Если момент m представить через скорость ω с помощью формул (1.1), то (1.2) будут уравнениями на g. Можно наоборот выразить ω через m по формулам

$$\omega^p=I^{ps}m_s,$$

где $\|I^{ps}\|$ — матрица, обратная к I. Тогда (1.2) — замкнутая система дифференциальных уравнений на двойственном пространстве g^*. В любом случае правые части этих уравнений квадратичны относительно независимых переменных.

Как отметил Пуанкаре [1], для алгебры $SO(3)$ (алгебры вращений трехмерного пространства) уравнения (1.2) совпадают со знаменитыми динамическими уравнениями Эйлера, описывающими вращение твердого тела вокруг неподвижной точки. Вывод уравнений (1.2) и обсуждение их основных свойств можно найти, например, в [2]. Уравнения Эйлера—Пуанкаре как гамильтонову систему на g^* изучал Четаев [3].

Нас будут интересовать в основном уравнения (1.2) на *разрешимых алгебрах*. Напомним, что алгебра g называется разрешимой, если найдется последовательность вложенных идеалов

$$\{0\} \subset g_1 \subset g_2 \subset \ldots \subset g_{n-1} \subset g_n = g, \ \dim g_k = k,$$

причем

$$[g_k, g_k] \subset g_{k-1}. \tag{1.3}$$

Эквивалентное определение: найдется базис $\{e_s\}_1^n$, такой, что

$$\begin{aligned}
&[e_1, e_i] = c_{1i}^1 e_1,\\
&[e_2, e_i] = c_{2i}^2 e_2 + c_{2i}^1 e_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[e_{n-1}, e_i] = c_{n-1,i}^{n-1} e_{n-1} + \ldots + c_{n-1,i}^1 e_1,\\
&[e_n, e_i] = c_{ni}^n e_n + \ldots + c_{ni}^1 e_1.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Уравнения Эйлера—Пуанкаре (1.2) в базисе (1.4) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\dot m_1 = (c_{i1}^1 \omega^i) m_1,\\
&\dot m_2 = (c_{i2}^1 \omega^i) m_1 + (c_{i2}^2 \omega^i) m_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Эти уравнения изучались в [4] (понижение порядка, линейные интегралы).

Важным частным случаем разрешимых алгебр являются *нильпотентные алгебры*: условия (1.3) заменяются включениями

$$[g, g_k] \subset g_{k-1}.$$

В соотношениях (1.4) надо положить

$$c_{ki}^k = 0, \ k = 1, \ldots, n.$$

Абелевы алгебры, очевидно, нильпотентны. В этом случае $\dot m = 0$. Чтобы исключить подобные тривиальные случаи, далее рассматриваем разрешимые алгебры, не являющиеся нильпотентными.

2. Метод Ковалевской—Ляпунова. Хорошо известно, что решения уравнения (1.2) для алгебры $g = SO(3)$ являются эллиптическими функциями времени: они однозначны на плоскости комплексного времени и их особые точки — полюсы (Руэб, 1834; Якоби, 1849). Подчеркнем, что этот результат не зависит от выбора тензора инерции.

С другой стороны, классическая работа Ковалевской [5] показала, что системы с мероморфным (или, более общо, однозначным) общим решением — кандидаты в число алгебраически интегрируемых систем. Обсуждение этих вопросов можно найти в работах [6, 7].

В связи со сказанным возникает следующая общая задача.

I. Перечислить все алгебры Ли g и тензоры инерции I, для которых все решения уравнений (1.2) однозначны на плоскости комплексного времени.

Эта задача частично рассмотрена для полупростых алгебр Ли ($e(3)$, $SO(4)$, ...): в ряде случаев удалось найти соотношения на компоненты тензора инерции, при которых решения уравнений (1.2) выражаются через ϑ-функции (информацию можно почерпнуть в [7]).

Для решения задачи I можно воспользоваться асимптотическим методом Ковалевской, усовершенствованным Ляпуновым [8]. Изложим этот метод применительно к системам уравнений с квадратичными правыми частями:

$$\dot{m} = v(m), \quad m \in \mathbf{R}^n, \quad v(\lambda m) = \lambda^2 v(m). \tag{2.1}$$

Сначала ищем частное решение вида

$$m = c/t, \quad c \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}. \tag{2.2}$$

Вектор c удовлетворяет системе полиномиальных уравнений

$$v(c) = -c. \tag{2.3}$$

Запишем уравнения в вариациях для частного решения (2.2):

$$\dot{x} = \frac{1}{t} Ax, \quad A = \frac{\partial v}{\partial m}(c).$$

Это уравнения фуксова типа. Ищем их решение в виде

$$x = \xi t^{\rho - 1}.$$

Тогда

$$K\xi = \rho\xi, \quad K = A + E.$$

Матрица K называется *матрицей Ковалевской*, а ее собственные значения $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — *показателями Ковалевской*. Согласно теореме Ляпунова, если общее решение системы (2.1) представляется однозначными функциями комплексного времени, то все показатели Ковалевской — целые числа. Доказательство этой теоремы и ее уточнения можно найти в [8, 9].

Один из показателей Ковалевской всегда равен -1 [10]. Если уравнения (2.1) допускают однородный интеграл $f(m)$ степени k, причем $df(c) \neq 0$, то $\rho = k$ — показатель Ковалевской [9]. Поскольку уравнения Эйлера—Пуанкаре имеют интеграл энергии $f = T$, то в этом случае $\rho = 2$.

Задача кажется неразрешимой ввиду значительных трудностей технического характера. Укажем вариант ее упрощения.

II. Перечислить все алгебры Ли, для которых решения уравнений (1.2) многозначны для всех тензоров инерции.

Сюда не относятся полупростые алгебры. Действительно, положим $I_{sp} = \lambda \delta_{sp}$. Так как структурные постоянные полупростой алгебры удовлетворяют соотношениям

$$c_{ij}^{k} = -c_{kj}^{i},$$

то в этом случае уравнения (1.2) принимают вид $\dot{m}_k=0$.

Наша цель — показать, что существуют алгебры Ли, для которых решения уравнений Эйлера—Пуанкаре ветвятся при любом выборе тензора инерции.

3. Уравнения Эйлера—Пуанкаре на разрешимых алгебрах Ли.

Теорема. *Предположим, что алгебра g разрешима и для некоторого целого $k\geqslant 0$*

$$[g,\ g_{n-1}]\subset g_{n-2},\ [g_{n-1},\ g_{n-2}]\subset g_{n-3},\ \ldots,[g_{n-k+1},\ g_{n-k}]\subset g_{n-k-1}, \tag{3.1}$$

однако

$$[g_{n-k},\ g_{n-k-1}]\not\subset g_{n-k-2}. \tag{3.2}$$

Если все решения уравнений (1.2) *однозначны как функции комплексного времени, то найдется вектор $\xi\in g_{n-1}\diagdown g_{n-k-2}$, такой, что*

$$[\xi,\ g_1]\subset g_0,\ [\xi,\ g_2]\subset g_1,\ \ldots,[\xi,\ g_{n-k-2}]\subset g_{n-k-3}. \tag{3.3}$$

Для $k=0$ включения (3.1) вырождаются и поэтому их следует опустить. В этом случае (3.1) и (3.2) сводятся к одному условию

$$[g,\ g_{n-1}]\not\subset g_{n-2}, \tag{3.4}$$

которое справедливо для типичных разрешимых алгебр Ли. Линейное преобразование ad_ξ алгебры g (определяемое равенством $\mathrm{ad}_\xi\eta=[\xi,\eta]$) будет нильпотентным: его n-я степень переводит в нуль все элементы из g. Напомним, что если преобразования ad_ξ нильпотентны для всех $\xi\in g$, то алгебра g нильпотентна. Подчеркнем, что теорема справедлива для любого положительно определенного тензора инерции.

Следствие. *Предположим, что выполнены условия* (3.1), (3.2) *и, кроме того,*

$$[g_{n-1},\ g_{n-k-2}]\not\subset g_{n-k-3}. \tag{3.5}$$

Тогда уравнения (1.2) *обязательно имеют многозначные решения.*

При $k=0$ достаточные условия ветвления имеют следующий вид:

$$[g,\ g_{n-1}]\not\subset g_{n-2},\ [g_{n-1},\ g_{n-2}]\not\subset g_{n-3}.$$

Докажем следствие. Действительно, из (3.5) вытекает, что не существует вектора $\xi\in g_{n-1}\diagdown g_{n-k-2}$, удовлетворяющего соотношениям (3.3) (это противоречит последнему включению (3.3)). Остается применить основную теорему.

Стоит подчеркнуть, что следствие из основной теоремы справедливо для любого тензора инерции. Для нильпотентных алгебр имеют место включения

$$[g,\ g_{n-1}]\subset g_{n-2},\ [g_{n-1},\ g_{n-2}]\subset g_{n-3}.$$

Таким образом, следствие имеет место для типичных ненильпотентных разрешимых алгебр. Пока неясно, является ли достаточным для ветвления решений уравнений Эйлера—Пуанкаре условие, что разрешимая алгебра g не нильпотентна.

Доказательство теоремы. Для упрощения записи доказательство теоремы приведем в простом, но наиболее важном случае, когда $k=0$. Уравнения (1.5), очевидно, допускают частные решения, в которых $m_1=\ldots=m_{n-2}=0$ (в случае $k\geqslant 1$ надо искать мероморфные решения вида $m_1 = \ldots = m_{n-k-2} = 0$). При этом оставшиеся переменные m_{n-1}, m_n удовлетворяют уравнениям

$$\dot{m}_{n-1} = (c_{in-1}^{n-1}\omega^i)\, m_{n-1}, \quad \dot{m}_n = (c_{in}^{n}\omega^i)\, m_n + (c_{in}^{n-1}\omega^i)\, m_{n-1}. \tag{3.6}$$

Ясно, что скорости и моменты связаны линейными соотношениями

$$\omega^i = I^{in-1} m_{n-1} + I^{in} m_n. \tag{3.7}$$

Из коммутационных равенств (1.4) вытекают равенства

$$c_{n-1i}^{n-1} = 0,\ i \leqslant n-1;\ c_{ni}^{n} = 0,\ i \leqslant n;\ c_{ni}^{n-1} = 0,\ i \leqslant n-2. \tag{3.8}$$

С учетом (3.7) и (3.8) уравнения (3.6) принимают следующий явный вид:

$$\dot{m}_{n-1} = c_{n\,n-1}^{n-1}(I^{n\,n-1} m_{n-1} + I^{nn} m_n)\, m_{n-1},$$

$$\dot{m}_n = c_{n-1\,n}^{n-1}(I^{n-1\,n-1} m_{n-1} + I^{n-1\,n} m_n)\, m_{n-1}.$$

Применяя метод Ковалевской—Ляпунова, запишем алгебраические уравнения (2.3):

$$\begin{gathered} c_1 = \ldots = c_{n-2} = 0, \quad -c_{n-1} = c_{n\,n-1}^{n-1}(I^{n\,n-1} c_{n-1} + I^{nn} c_n)\, c_{n-1}, \\ c_n = c_{n\,n-1}^{n-1}(I^{n-1\,n-1} c_{n-1} + I^{n-1\,n} c_n)\, c_{n-1}. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Легко заметить, что условие (3.4) эквивалентно неравенству $c_{n\,n-1}^{n-1} \neq 0$. Если $c_{n-1}=0$, то из последнего уравнения (3.9) получаем $c_n=0$. Поэтому полагаем $c_{n-1} \neq 0$.

Уравнения (3.9) легко решаются:

$$\begin{gathered} c_{n-1}^{-2} = -(c_{n\,n-1}^{n-1})^2 [I^{n-1\,n-1} I^{nn} - (I^{n\,n-1})^2], \\ c_n = -\frac{1}{c_{n\,n-1}^{n-1} I^{nn}} - \frac{I^{n\,n-1} c_{n-1}}{I^{nn}}. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Так как матрица $\|I^{ij}\|$ положительно определена, то по критерию Сильвестра $c_{n-1}^2 < 0$. Следовательно, $c_{n-1} \neq 0$ — чисто мнимое комплексное число.

Осталось вычислить показатели Ковалевской $\rho_1, \ldots, \rho_n$. Как было уже сказано в п. 2, $\rho_{n-1} = -1$, $\rho_n = 2$. Можно показать, что

$$\rho_s = 1 + k_s, \quad s \leqslant n-2,$$

$$k_1 = c_{12}^1 (I^{2n-1} c_{n-1} + I^{2n} c_n) + \ldots + c_{1n}^1 (I^{n\,n-1} c_{n-1} + I^{nn} c_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k_{n-2} = c_{n-2,\,n-1}^{n-2}(I^{n-1\,n-1} c_{n-1} + I^{n-1\,n} c_n) + \ldots + c_{n-2,n}^{n-2}(I^{n\,n-1} c_{n-1} + I^{nn} c_n).$$

Если все решения уравнений (1.5) однозначны, то согласно теореме Ляпунова числа k_s должны быть целыми, в частности вещественными. Запишем в явном виде условие вещественности чисел k_s, учитывая соотношения (3.10):

$$\begin{aligned} c_{12}^1 A_2 + c_{13}^1 A_3 + \ldots + c_{1\,n-1}^1 A_{n-1} &= 0, \\ c_{23}^2 A_3 + \ldots + c_{2\,n-1}^2 A_{n-1} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$c^{n-2}_{n-2,\,n-1} A_{n-1} = 0,$$

где

$$A_2 = I^{2\,n-1} I^{nn} - I^{2n} I^{n-1\,n}, \ldots, A_{n-1} = I^{n-1\,n-1} I^{nn} - (I^{n-1\,n})^2.$$

Положим

$$\xi = A_2 e_2 + \ldots + A_{n-1} e_{n-1}.$$

Так как $A_{n-1} > 0$, то $\xi \in g_{n-1} \setminus g_{n-2}$. Из (3.11) и коммутационных соотношений (1.4) вытекают включения (3.3). Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 93-013-16244 и Международного научного фонда, грант MCY000.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Poincaré H. Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique//C. r. Acad. sci. Paris. 1901. **132**. 369—371.
2. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики//Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. ВИНИТИ. Т. 3. М., 1985.
3. Cetajev N. Sur les équations de Poincaré//C. r. Acad. sci. 1938. **185**. 1577—1578.
4. Колесников Н. Н. Натуральные системы с разрешимой группой симметрии// //Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1978. № 5. 99—103.
5. Ковалевская С. В. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки//Научные работы. М., 1948. 153—220.
6. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике//Успехи матем. наук. 1983. **38**, вып. 1. 3—67.
7. Adler M., van Moerbeke P. A systematic approach towards solving integrable systems. Perspectives in Mathematics. N. Y., 1987.
8. Ляпунов А. М. Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку//Собрание сочинений. Т. 1. М., 1954. 402—417.
9. Yoshida H. Necessary condition for the existence of algebraic first integrals// //Celest. Mech. 1983. **31**. 363—399.
10. Козлов В. В. Тензорные инварианты квазиоднородных систем дифференциальных уравнений и асимптотический метод Ковалевской—Ляпунова//Матем. заметки. 1992. **51**, вып. 2. 46—52.

Поступила в редакцию
09.09.94