Математические заметки

том 58 выпуск 6 декабрь 1995

О РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННОСТЕПЕННОЙ АСИМПТОТИКОЙ

В. В. Козлов, С. Д. Фурта

1. Введение. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$
правые части которой представимы в виде формальных степенных рядов
$$f^j = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_n} f^j_{i_0, i_1, \dots, i_n} t^{i_0} (x^1)^{i_1} \dots (x^n)^{i_n}, \tag{2}$$
где показатели $i_1, \dots, i_n$ – положительные целые, а i_0 – целые числа. Для таких систем мы найдем достаточные условия, гарантирующие существование частных решений, имеющих обобщенностепенную асимптотику вида $\sim t^{-\mathbf{G}}$, где $\mathbf{G}$ – вещественная матрица, либо при $t \to \pm 0$, либо при $t \to \pm\infty$.

Для простоты мы будем предполагать, что правые части (1) являются бесконечно дифференцируемыми функциями $\mathbf{x}, t$ на множестве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. В конкретных приложениях мы чаще всего имеем дело с полиномиальными системами, где это требование заведомо выполнено.

Для того, чтобы построить такого рода решения, необходимо сперва выделить из системы (1) некоторую укороченную модельную систему, имеющую решения с указанной асимптотикой, которые можно было бы построить в явном виде. Обычно такими модельными системами служат так называемые квазиоднородные системы, выделение которых осуществляется при помощи многогранников Ньютона показателей разложений (2) [1]. Однако такой подход позволяет находить лишь решения системы (1) с классической степенной асимптотикой, т.е. когда матрица $\mathbf{G}$ диагональна. В конкретных приложениях, тем не менее, часто приходится иметь дело с решениями, главные члены асимптотики которых содержат члены вида $t^\alpha \sin(\delta \ln t)$ или $t^\alpha \cos(\delta \ln t)$. Подобное имеет место, например, для автономных многомерных гамильтоновых систем при резонансе частот четного порядка [2]. Это обстоятельство заставляет нас немного изменить общепринятый метод выделения укороченных систем.

© В. В. Козлов, С. Д. Фурта 1995

2. Квазиоднородные и полуквазиоднородные системы. Рассмотрим некоторую $(n+1)$-мерную фуксову систему дифференциальных уравнений вида

$$\mu\frac{d\mathbf{x}}{d\mu} = \mathbf{G}\mathbf{x}, \quad \mu\frac{dt}{d\mu} = -t, \tag{3}$$

поток которой будем обозначать как

$$t \mapsto \mu^{-1}t, \quad \mathbf{x} \mapsto \mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}. \tag{4}$$

Определение 1. Систему (1) назовем *квазиоднородной* относительно структуры, порождаемой матрицей $\mathbf{G}$, если (1) инвариантна относительно действия фазового потока (4) системы (3).

Индекс q (*квазиоднородности*) будет в дальнейшем приписываться правым частям квазиоднородных систем. В отдельных случаях под этим индексом будет пониматься также некоторая обобщенная "степень" квазиоднородности.

Итак, в качестве укороченных систем будем рассматривать квазиоднородные системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_q(\mathbf{x}, t). \tag{5}$$

Решения систем типа (5) естественно искать в виде "квазиоднородных лучей"

$$\mathbf{x}^\gamma(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}}\mathbf{x}_0^\gamma, \tag{6}$$

где $\gamma = \pm 1$, а $\mathbf{x}_0^\gamma$ – постоянный действительный вектор. Если мы будем интересоваться асимптотикой решений при положительных t, то $\gamma = +1$, в противном же случае следует положить $\gamma = -1$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что укороченная система (5) имеет некоторое действительное решение (6), которое мы будем "достраивать" до решения полной системы (1).

Для какого же сорта систем квазиоднородные системы типа (5) могут служить укорочениями?

Определение 2. Систему дифференциальных уравнений (1) назовем *полуквазиоднородной*, если под действием потока (4) ее правая часть преобразуется к виду

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_q(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}^*(\mathbf{x}, t, \mu), \tag{7}$$

где $\mathbf{f}_q(\mathbf{x}, t)$ – некоторое квазиоднородное векторное поле, а $\mathbf{f}^*(\mathbf{x}, t, \mu)$ представляет собой формальный степенной ряд относительно μ^β, где β – некоторое действительное ненулевое число. Если $\beta > 0$, систему (1) будем называть положительно полуквазиоднородной, и отрицательно полуквазиоднородной в случае отрицательности β.

Если в (7) положить $\mu = 0$ в случае положительной полуквазиоднородности или $\mu = \infty$ в случае отрицательной полуквазиоднородности, то получим укороченную систему (5).

Примеров полуквазиоднородных систем дифференциальных уравнений достаточно много. Классический пример неавтономных полуквазиоднородных систем – первое и второе уравнения Пенлеве [3], приведенные к виду систем второго порядка.

Забегая вперед, заметим, что если система положительно полуквазиоднородна, то следует искать ее частные решения с обобщенностепенной асимптотикой при $t \to \pm\infty$, в противном же случае должна исследоваться асимптотика решений при $t \to \pm 0$.

3. Основная теорема.

Теорема 1. *Пусть система* (1) *полуквазиоднородна, и соответствующая укороченная система* (5) *имеет частное решение типа* (6), *тогда* (1) *имеет частное решение, для которого при* $t^{\chi} \to \gamma \times \infty$, *где* $\chi = \operatorname{sign}\beta$ – *“знак полуквазиоднородности”*, (6) *будет главным членом асимптотического разложения.*

Доказательство. Рассмотрим сначала проблему формального построения асимптотического решения системы (1). Будем искать это формальное решение в виде ряда

$$\mathbf{x}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k\big(\ln(\gamma t)\big)(\gamma t)^{-k\beta}, \tag{8}$$

где коэффициенты $\mathbf{x}_k$ являются некоторыми полиномиальными векторфункциями $\ln(\gamma t)$.

Интересно заметить, что (8) по форме совпадают с рядами, используемыми при интегрировании систем линейных дифференциальных уравнений с фуксовой особой точкой при помощи метода Фробениуса [4].

Очевидно, что правые части (1) допускают формальные разложения в ряды по “квазиоднородным формам”:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=0} \mathbf{f}_{q+\chi m}(\mathbf{x}, t).$$

Имеют место следующие тождества

$$\mathbf{f}_{q+\chi m}(\mu^{\mathbf{G}}\mathbf{x}, \mu^{-1}t) = \mu^{\mathbf{G}+(1+\beta m)\mathbf{E}}\mathbf{f}_{q+\chi m}(\mathbf{x}, t). \tag{9}$$

Используя тождества (9), получим, что после замены зависимой и независимой переменных

$$\mathbf{x}(t) = (\gamma t)^{-\mathbf{G}}\mathbf{y}(\gamma t), \quad s = (\gamma t)^{-\beta},$$

система (1) преобразуется к виду

$$-\gamma\beta s\mathbf{y}' = \gamma\mathbf{G}\mathbf{y} + \sum_{m=0} s^m \mathbf{f}_{q+\chi m}(\mathbf{y}, \gamma), \tag{10}$$

где штрих означает производную по новой независимой переменной s.

В новых переменных ряды (8) запишутся как

$$\mathbf{y}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}_k\Big(-\frac{1}{\beta}\ln s\Big)s^k. \tag{11}$$

Подставим (11) в (10) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях s. Предположим, что нулевой коэффициент в (8) постоянен, тогда для нулевой степени s будем иметь систему алгебраических уравнений

$$-\gamma\mathbf{G}\mathbf{x}_0 = \mathbf{f}_q(\mathbf{x}_0, \gamma). \tag{12}$$

Разрешимость (12) относительно $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^\gamma$ равносильна, очевидно, существованию частного решения (6) укороченной системы (5).

Для высших степеней s имеют место следующие системы уравнений.

$$\gamma\frac{d\mathbf{x}_k}{d\tau} - \mathbf{K}_k\mathbf{x}_k = \mathbf{\Phi}_k(\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{k-1}), \tag{13}$$

где $\mathbf{\Phi}_k$ – некоторые полиномиальные вектор-функции своих аргументов, $\tau = -\beta^{-1}\ln s = \ln(\gamma t)$, матрица $\mathbf{K}_k = k\gamma\beta\mathbf{E} + \mathbf{K}$, а

$$\mathbf{K} = \gamma\mathbf{G} + d\mathbf{f}_q(\mathbf{x}_0^\gamma, \gamma) \tag{14}$$

– так называемая матрица Ковалевской [5].

Если предположить, что все коэффициенты вплоть до k-го найдены, то $\mathbf{\Phi}_k$ представляют собой некоторые известные полиномы от τ. Полученную систему (13) можно рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и полиномиальной правой частью, которая, как известно, всегда имеет некоторое полиномиальное частное решение $\mathbf{x}_k(\tau)$. Таким образом, нахождение всех коэффициентов ряда (11) может быть осуществлено по индукции. Формальное построение частного асимптотического решения (1) в виде (8) тем самым завершено.

Наличие логарифмов в разложении (8) является, вообще говоря, ситуацией общего положения. Рассмотрим, например, простой случай, когда укороченная система (5) автономна. Лишь немного видоизменив рассуждения, изложенные в [5], можно показать, что $-\gamma$ всегда является собственным числом матрицы Ковалевской (14) с собственным вектором $\mathbf{f}_q(\mathbf{x}_0^\gamma)$. Поэтому, поскольку в конкретных приложениях, как правило,

$|\beta| = 1/(q-1)$, $q \geqslant 2$ – целое число, то в положительно полуквазиоднородном случае по крайней мере одна из матриц $\mathbf{K}_k$ вырождена, и в общем случае логарифмы в разложениях (8) неубываемы.

На следующем шаге доказательства теоремы 1 мы должны доказать, что либо (8) сходятся равномерно вместе со своими производными на заданном интервале изменения t, либо (8) являются асимптотическими разложениями некоторого действительного решения (1).

В классической ситуации, когда правые части (1) автономны, система (1) положительно полуквазиоднородна, матрица $\mathbf{G}$ диагональна, и ее элементы являются целыми неотрицательными числами, для доказательства последнего факта можно было бы воспользоваться известной теоремой (6). Но поскольку рассматриваемая здесь ситуация формально не укладывается в рамки теоремы из [6], мы докажем это утверждение независимо.

Без ограничения общности всюду далее будем считать, что $\gamma = +1$ и опускать для краткости индекс γ. Противоположный случай сводится к рассматриваемому при помощи обращения времени.

4. Бесконечно дифференцируемый случай. Пусть правые части системы (10) являются бесконечно дифференцируемыми функциями на декартовом произведении некоторой малой окрестности $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0$ на малую окрестность $s = 0$. В системе (10) изменим "временной масштаб"

$$s = \varepsilon\xi, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

в результате чего эта система перепишется в виде

$$-\beta\xi\frac{d\mathbf{y}}{d\xi} = \mathbf{G}\mathbf{y} + \sum_{m=0} \varepsilon^m \xi^m \mathbf{f}_{q+\chi m}(\mathbf{y}, \gamma). \tag{15}$$

При $\varepsilon = 0$ эта система перейдет в систему

$$-\beta\xi\frac{d\mathbf{y}}{d\xi} = \mathbf{G}\mathbf{y} + \mathbf{f}_q(\mathbf{y}, \gamma),$$

которая имеет частное равновесное решение $\mathbf{y}_0(\xi) = \mathbf{x}_0$.

После описанного преобразования K-я частичная сумма ряда (8) примет вид

$$\mathbf{y}_K^\varepsilon(\xi) = \sum_{k=0}^{K} \varepsilon^k \mathbf{x}_k\Big(-\frac{1}{\beta}\ln(\varepsilon\xi)\Big)\xi^k,$$

откуда видно, что при $\varepsilon \to +0$ эта сумма сходится к $\mathbf{y}_0(\xi) = \mathbf{x}_0$ равномерно на $[0, 1]$.

Пусть $K \in \mathbb{N}$ настолько велико, что $-\beta K < \operatorname{Re}\rho_i$, $i = 1, \ldots, n$, где ρ_i – собственные значения матрицы Ковалевской $\mathbf{K}$.

Будем искать частное решение (15) в виде

$$\mathbf{y}(\xi) = \mathbf{y}_K^\varepsilon(\xi) + \mathbf{z}(\xi)$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$ на отрезке $[0,1]$ с начальным условием $\mathbf{y}(+0) = \mathbf{0}$, где $\mathbf{z}(\xi)$ имеет асимптотику $\mathbf{z}(\xi) = O(\xi^{K+\delta})$ при $\xi \to +0$, $\delta > 0$ будем считать фиксированным, но достаточно малым.

Запишем (15) в виде уравнения в банаховом пространстве

$$\mathscr{G}(\varepsilon, \mathbf{z}) = \mathbf{0},$$

$$\mathscr{G}(\varepsilon, \mathbf{z}) = \beta\xi\frac{d}{d\xi}(\mathbf{y}_K^\varepsilon + \mathbf{z}) + \mathbf{G}(\mathbf{y}_K^\varepsilon + \mathbf{z}) + \sum_{m=0} \varepsilon^m \xi^m \mathbf{f}_{q+\chi m}(\mathbf{y}_K^\varepsilon + \mathbf{z}, \gamma). \tag{16}$$

Будем рассматривать $\mathscr{G}(\varepsilon, \mathbf{z})$ как отображение

$$\mathscr{G}\colon (0, \varepsilon_0) \times \mathfrak{B}_{1,\Delta} \to \mathfrak{B}_{0,\Delta},$$

где $\mathfrak{B}_{1,\Delta}$ – банахово пространство вектор-функций $\mathbf{z}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$, непрерывных на $[0,1]$ вместе со своими первыми производными, для которых конечна норма

$$\|\mathbf{z}\|_{1,\Delta} = \sup_{[0,1]} \xi^{-\Delta}\bigl(\|\mathbf{z}(\xi)\| + \xi\|\mathbf{z}'(\xi)\|\bigr)$$

(здесь штрих означает производную по переменной ξ); $\mathfrak{B}_{0,\Delta}$ – банахово пространство вектор-функций $\mathbf{u}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$, непрерывных на $[0,1]$, для которых конечна норма

$$\|\mathbf{u}\|_{0,\Delta} = \sup_{[0,1]} \xi^{-\Delta}\|\mathbf{u}(\xi)\|, \qquad \text{где} \quad \Delta = K + \delta.$$

Отметим некоторые свойства отображения $\mathscr{G}$:

а) $\mathscr{G}(0, \mathbf{0}) = \beta\xi\frac{d}{d\xi}\mathbf{y}_0(\xi) + \mathbf{G}\mathbf{y}_0(\xi) + \mathbf{f}_q\bigl(\mathbf{y}_0(\xi), \gamma\bigr) = \mathbf{0}$,

б) $\mathscr{G}$ непрерывно по $\varepsilon, \mathbf{z}$ на $(0, \varepsilon_0) \times \mathfrak{U}_{1,\Delta}$, где $\mathfrak{U}_{1,\Delta}$ – некоторая окрестность нуля в $\mathfrak{B}_{1,\Delta}$,

в) $\mathscr{G}$ сильно дифференцируемо по $\mathbf{z}$ на $(0, \varepsilon_0) \times \mathfrak{U}_{1,\Delta}$, и его дифференциал Фреше $\nabla_{\mathbf{z}}\mathscr{G}(\varepsilon, \mathbf{z})$

$$\nabla_{\mathbf{z}}\mathscr{G}(\varepsilon, \mathbf{z})\mathbf{h} = \beta\xi\frac{d}{d\xi}\mathbf{h} + \mathbf{G}\mathbf{h} + \sum_{m=0} \varepsilon^m \xi^m d\mathbf{f}_{q+\chi m}(\mathbf{y}_K^\varepsilon + \mathbf{z}, \gamma)\mathbf{h},$$
$$\mathbf{h} \in \mathfrak{B}_{1,\Delta},$$

является ограниченным оператором, непрерывно зависящим от $\varepsilon, \mathbf{z}$,

г) оператор $\nabla_{\mathbf{z}}\mathscr{G}(0, \mathbf{0})\colon \mathfrak{B}_{1,\Delta} \to \mathfrak{B}_{0,\Delta}$,

$$\nabla_{\mathbf{z}}\mathscr{G}(0, \mathbf{0}) = \beta\xi\frac{d}{d\xi} + \mathbf{K},$$

имеет ограниченный обратный.

Утверждения а), б), в) достаточно очевидны. Доказательство утверждения, аналогичного г), можно найти в [7].

Итак, выполнены все условия теоремы о неявной функции [8], в силу чего для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, если только $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало, функциональное уравнение (16) будет иметь решение в $\mathfrak{B}_{1,\Delta}$, непрерывно зависящее от ε. Перейдя к переменным $\mathbf{y}, s$, получим, что дифференциальное уравнение (10) имеет частное решение $\mathbf{y}(s)$ класса $C^1[0, \varepsilon]$ с асимптотикой

$$\mathbf{y}(s) = \sum_{k=0}^{K} \mathbf{x}_k \Big(-\frac{1}{\beta} \ln s\Big) s^k + o(s^K).$$

На самом же деле, поскольку правая часть (10) является гладкой вектор-функцией, $\mathbf{y} \in C^\infty[0, \varepsilon]$. Возвращаясь к исходным переменным $\mathbf{x}, t$, получим требуемое утверждение о существовании гладкого на $[T, +\infty)$ или на $(0, T^{-1}]$, $T = \varepsilon_0^{-1/\beta}$, в зависимости от знака полуквазиоднородности, частного решения исходной системы с заданным главным членом асимптотики. Теорема 1 доказана.

5. Аналитический случай. Рассмотренная выше процедура не позволяет сделать заключения о сходимости рядов (8). Более того, если правые части (10) не являются аналитическими функциями, то ряды (8) могут расходиться. Рассмотрим вопрос о сходимости (8) в том случае, когда правые части (10) являются комплексно-аналитическими функциями в некоторой малой окрестности $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0$, $s = 0$.

Мы поставим вопрос даже несколько шире и попытаемся выяснить “комплексную природу” решений (1), представимых в виде рядов (8). Очевидно, что наличие логарифмов в разложениях (8) является основным препятствием на пути решения этой задачи при помощи аппарата абстрактной теоремы о неявной функции. Дело в том, что бесконечнолистная риманова поверхность логарифма некомпактна, в силу чего невозможно построить разумно устроенного полного нормированного пространства аналитических функций, которому принадлежала бы вектор-функция $t^{\mathbf{G}}\mathbf{x}(t)$. Если бы логарифмы в разложении (8) по каким-либо причинам отсутствовали, то было бы нетрудно показать, что $t^{\mathbf{G}}\mathbf{x}(t)$ голоморфна на некотором “куске” римановой поверхности функции $s = t^{-\beta}$. Идея доказательства станет ясна позже. Однако, как было отмечено, для положительно полуквазиоднородных систем наличие логарифмов в разложении (8) является случаем общего положения. Ниже мы, тем не менее, покажем как эта сложность может быть устранена в достаточно типичной ситуации.

Теорема 2. *Пусть система* (1) *положительно полуквазиоднородна, укороченная система* (5) *автономна,* $\beta^{-1} = q - 1$ *– положительное целое, и выполнены все условия теоремы* 1 *при* $\gamma = 1$. *Если число* -1 *– единственное решение характеристического уравнения* $\det(\mathbf{K} - \rho\mathbf{E}) = 0$ *вида* $\rho = -k\beta$, $k \in \mathbb{N}$, *то существует частное решение* $\mathbf{x}(t)$ *системы* (1) *с асимптотическим разложением* (8) *такое, что* $t^{\mathbf{G}}\mathbf{x}(t)$ *является функцией, голоморфной на накрытии области* $|t| \geqslant T$, *где* $T > 0$ *достаточно велико, римановой поверхностью решения дифференциального уравнения*

$$\dot{s} = -\beta \frac{s^q}{(1 + as^{q-1})} \tag{17}$$

с "начальным" условием $s(+\infty) = 0$, *где* a *– некоторый действительный параметр.*

Доказательство. Мы используем технический прием, предложенный в работе (9). Сделаем замену зависимой переменной $\mathbf{x} = t^{-\mathbf{G}}\mathbf{y}$ и "униформизующую" замену времени, определяемую уравнением (17), после чего (1) примет вид

$$-\beta s\mathbf{y}' = \mathbf{G}\mathbf{y} + (1 + as^{q-1}) \sum_{m=0} s^m \mathbf{f}_{q+\chi m}(\mathbf{y}, \gamma). \tag{18}$$

При $a = 0$ эта система превращается в (10). Похожесть систем (10) и (18) обуславливается еще и тем, что решение уравнения (17) с начальным условием $s(+\infty) = 0$ имеет асимптотику $s(t) \sim t^{-\beta}$.

Покажем, что при сделанных предположениях параметр a можно подобрать так, что формальное решение системы (18) не будет содержать степеней логарифмов. Частное решение (18) будем искать в виде обыкновенных рядов Тейлора

$$\mathbf{y}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{y}_k s^k. \tag{19}$$

Подставим (19) в (18) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной s. Для нулевой степени s получим

$$-\mathbf{G}\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}_q(\mathbf{y}_0),$$

в силу чего $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0$.

Для k-х степеней s, $k < q - 1$, имеем уравнения

$$\mathbf{K}_k\mathbf{y}_k = \mathbf{\Phi}_k(\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}), \quad \mathbf{K}_k = k\beta\mathbf{E} + \mathbf{K}, \tag{20}$$

где величины $\mathbf{\Phi}_k$ полиномиально зависят от своих аргументов и не зависят пока от параметра a, который еще подлежит определению.

Поскольку при $k \neq q - 1$ матрицы $\mathbf{K}_k$ невырождены, коэффициенты $\mathbf{y}_k$ находятся из (20) однозначно по формулам

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{K}_k^{-1}\mathbf{\Phi}_k(\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{k-1}).$$

Для $k = q - 1$ имеем

$$\mathbf{K}_{q-1}\mathbf{y}_{q-1} = a\mathbf{f}_q(\mathbf{y}_0) + \mathbf{\Phi}_{q-1}(\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_{q-2}), \quad \mathbf{K}_{q-1} = \mathbf{K} + \mathbf{E}. \tag{21}$$

Заметим, что $\mathbf{f}_q(\mathbf{y}_0) = \mathbf{p}$, где $\mathbf{p}$ – собственный вектор матрицы Ковалевской $\mathbf{K}$ с собственным значением $\rho = -1$.

Разложим $\mathbf{y}_{q-1}$, $\mathbf{\Phi}_{q-1}$ в суммы компонент, соответственно принадлежащих собственному подпространству матрицы $\mathbf{K}$, порожденному вектором $\mathbf{p}$, и его ортогональному дополнению

$$\mathbf{y}_{q-1} = y_{q-1}\mathbf{p} + \mathbf{y}_{q-1}^{\perp}, \quad \mathbf{\Phi}_{q-1} = \varphi_{q-1}\mathbf{p} + \mathbf{\Phi}_{q-1}^{\perp}.$$

Поскольку на инвариантном подпространстве, перпендикулярном вектору $\mathbf{p}$, оператор $\mathbf{K}_{q-1}$ невырожден, то

$$\mathbf{y}_{q-1}^{\perp} = \mathbf{K}_{q-1}^{-1}\mathbf{\Phi}_{q-1}^{\perp}.$$

Положив $a = -\varphi_{q-1}$, окончательно удовлетворим (21). Число y_{q-1} можно выбрать теперь произвольным.

При $k > q - 1$ уравнения для нахождения $\mathbf{y}_k$ также имеют вид (20), где величины $\mathbf{\Phi}_k$ зависят к тому же от найденного выше параметра a. Эти уравнения, аналогично предыдущему, легко разрешаются относительно $\mathbf{y}_k$ в силу невырожденности матриц $\mathbf{K}_k$.

Итак, мы показали, что уравнение (18) имеет частное формальное решение, представимое в виде формального ряда Тейлора (19). Докажем теперь, что (19) является рядом Тейлора некоторой функции, голоморфной в круге $|s| < \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало.

Доказательство практически дословно повторяет изложенное в предыдущем параграфе. После замены $s = \varepsilon\xi$, $0 < \varepsilon \ll 1$ система (18) примет вид

$$-\beta\xi\frac{d\mathbf{y}}{d\xi} = \mathbf{G}\mathbf{y} + (1 + a\varepsilon^{q-1}\xi^{q-1})\sum_{m=0}\varepsilon^m\xi^m\mathbf{f}_{q+\chi m}(\mathbf{y}, \gamma). \tag{22}$$

Обозначим через $\mathbf{y}_K^{\varepsilon}$ конечную сумму

$$\mathbf{y}_K^{\varepsilon}(\xi) = \sum_{k=0}^{K}\varepsilon^k\mathbf{y}_k\xi^k,$$

где $-\beta K < \operatorname{Re}\rho_i$, $i = 1, \ldots, n$, и будем искать частное решение (22) в виде

$$\mathbf{y}(\xi) = \mathbf{y}_K^{\varepsilon}(\xi) + \mathbf{z}(\xi),$$

где $\mathbf{z}(\xi)$ – некоторая голоморфная в круге $|\xi| < 1$ функция, имеющая в точке $\xi = 0$ нуль порядка $K + 1$.

Для доказательства существования такого решения достаточно применить абстрактную теорему о неявной функции [8] к уравнению в банаховом пространстве

$$\mathscr{G}(\varepsilon, \mathbf{z}) = \mathbf{0},$$
$$\mathscr{G}\colon (0, \varepsilon_0) \times \mathfrak{E}_{1,K} \to \mathfrak{E}_{0,K},$$

где

$$\mathscr{G}(\varepsilon, \mathbf{z}) = \beta\xi \frac{d}{d\xi}(\mathbf{y}_K^\varepsilon + \mathbf{z}) + \mathbf{G}(\mathbf{y}_K^\varepsilon + \mathbf{z}) + (1 + a\varepsilon^{q-1}\xi^{q-1}) \sum_{m=0} \varepsilon^m \xi^m \mathbf{f}_{q+\chi m}(\mathbf{y}_K^\varepsilon + \mathbf{z}, \gamma).$$

Здесь $\mathfrak{E}_{1,K}$ – банахово пространство вектор-функций $\mathbf{z}\colon \mathscr{K}_1 \to \mathbb{C}^n$, голоморфных внутри единичного круга $\mathscr{K}_1 = \{\xi \in \mathbb{C},\ |\xi| < 1\}$, непрерывных на его границе вместе со своими первыми производными, вещественных на вещественной оси ($\mathbf{z}(\overline{\xi}) = \overline{\mathbf{z}}(\xi)$) и имеющих в центре круга $\xi = 0$ нуль порядка $K + 1$. В качестве нормы $\mathfrak{E}_{1,K}$ рассмотрим выражение

$$\|\mathbf{z}\|_{1,K} = \sup_{|\xi| \leqslant 1} \xi^{-(K+1)} \bigl(\|\mathbf{z}(\xi)\| + |\xi| \|\mathbf{z}'(\xi)\|\bigr)$$

(штрих снова означает производную по переменной ξ); $\mathfrak{E}_{0,K}$ – банахово пространство вектор-функций $\mathbf{u}\colon \mathscr{K}_1 \to \mathbb{C}^n$, голоморфных внутри единичного круга $\mathscr{K}_1$, непрерывных на его границе, вещественных на вещественной оси ($\mathbf{u}(\overline{\xi}) = \overline{\mathbf{u}}(\xi)$) и имеющих в центре круга $\xi = 0$ нуль порядка $K + 1$. В качестве нормы $\mathfrak{E}_{0,K}$ рассмотрим выражение

$$\|\mathbf{u}\|_{1,K} = \sup_{|\xi| \leqslant 1} \xi^{-(K+1)} \|\mathbf{u}(\xi)\|.$$

Условия выполнения теоремы о неявной функции проверяются непосредственно.

Уравнение (17) имеет частное решение $s(t)$, $s(+\infty) = 0$, являющееся функцией, обратной к
$$t(s) = s^{1-q} - a\beta^{-1} \ln s.$$

Пусть $\mathscr{R}$ – риманова поверхность функций s, t. Возвращаясь к исходным переменным, получим, что (1) имеет частное решение $\mathbf{x}(t)$, для которого (8) является асимптотическим разложением, такое что вектор-функция $t^{\mathbf{G}}\mathbf{x}(t)$ голоморфна на накрытии области $|t| > \varepsilon_0^{-1/\beta}$ римановой поверхностью $\mathscr{R}$.

В заключение заметим, что если по тем или иным причинам исходное разложение (8) не содержит логарифмов, параметр a в уравнении (17) следует положить равным нулю. Теорема доказана.

6. Заключение. Задача нахождения частных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с неэкспоненциальной асимптотикой изучается достаточно давно. При этом основное внимание уделялось прежде всего эффективному построению укороченных систем и нахождению их частных решений [1]. Вопрос, как же продолжить найденный “квазиоднородный луч” до решения полной системы, оставался до сих пор недостаточно хорошо изученным. В частности, практически не существовало общих теорем о комплексной структуре продолжаемых решений в аналитическом случае. Исследования такого рода проводились лишь для конкретных модельных систем математической физики [10], [11]. Доказанная в предыдущем параграфе теорема, разумеется, не закрывает полностью поставленную проблему. Однако, условия этой теоремы выполнены в ряде важных задач. Например, теорема 2 применима для доказательства сходимости асимптотических рядов, построенных в работе (12), где они использовались для получения нового случая обращения теоремы Лагранжа–Дирихле об устойчивости равновесия.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
20.03.95

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
[2] Маркеев А.П. Резонансы и асимптотические траектории в системах Гамильтона // ПММ. 1990. Т. 54. №2. С. 207–212.
[3] Громак В.И. О решениях второго уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. №5. С. 753–763.
[4] Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
[5] Yoshida H. Necessary condition for the existence of algebraic first integrals. I, II // Celestial Mech. 1983. V. 31. P. 363–379, 381–399.
[6] Кузнецов А.Н. О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением // Функцион. анализ и его прилож. 1989. Т. 23. №4. С. 63–74.
[7] Фурта С.Д. Об асимптотических решениях систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в некоторых критических случаях // Матем. сб. 1993. Т. 184. №2. С. 43–56.
[8] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
[9] Taliaferro S.D. Instability of an equilibrium in a potential field // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1990. V. 109. №2. P. 183–194.
[10] Tabor M., Weiss J. Analytic structure of the Lorenz system // Phys. Rev. Ser. A. 1981. V. 24. №4. P. 2157–2167.
[11] Fournier J.D., Levine G., Tabor M. Singularity clustering in the Duffing oscillator // J. Phys. Ser. A. Math., Gen. 1988. V. 21. P. 33–54.
[12] Козлов В.В., Паламодов В.П. Об асимтотических решениях уравнений классической механики // ДАН СССР. 1982. Т. 163. №2. С. 285–289.