УДК 531.01

В. А. Вуйичич, В. В. Козлов

К ТЕОРИИ РЕОНОМНЫХ СИСТЕМ

1. Введение. Системы материальных точек принято разделять на *склерономные* («твердые») и *реономные* («текущие») в зависимости от того, являются наложенные на них связи стационарными или нестационарными. Кинетическая энергия $T(\dot{x}, x)$ склерономной системы — положительно определенная квадратичная форма от обобщенных скоростей $\dot{x}=(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$. Для таких систем справедлива теорема об изменении кинетической энергии:

$$\dot{T}=F\cdot\dot{x}, \tag{1}$$

где $F=(F_1, ..., F_n)$ — обобщенные силы, действующие на механическую систему. Стоит подчеркнуть, что соотношение (1) справедливо и в том случае, когда силы F зависят явно от времени.

Кинетическая энергия реономной системы имеет вид $T_2+T_1+T_0$, где T_s — однородная форма по $\dot{x}$ степени s, причем квадратичная форма T_2 положительно определена. В общем случае функции T_s зависят явно от времени. Аналогом теоремы об изменении кинетической энергии для реономных систем принято считать следующее соотношение:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+(T_2-T_0)^{\cdot}=F\cdot\dot{x}. \tag{2}$$

Видно, что даже в предположении о стационарности кинетической энергии ($\partial T_s/\partial t=0$) соотношения (1) и (2) существенно отличаются друг от друга.

Желание унифицировать основные формулы аналитической механики приводит к идее рассматривать реономные системы как склерономные с числом степеней свободы $n+1$: в качестве дополнительной координаты x_0 принимается время t (или какая-нибудь функция от t). Эту идею можно реализовать разными способами.

В первом из них, восходящем к Якоби (см. [1]), вводится новая кинетическая энергия

$$T^*(x', t', x, t) = t'T\left(\frac{x'}{t'}, x, t\right), \tag{3}$$

где штрих обозначает дифференцирование по некоторой вспомогательной переменной τ. Естественность формулы (3) видна из следующего соотношения для укороченного действия:

$$\int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} T\left(\frac{x'}{t'}, x, t\right) t' d\tau.$$

Другой подход разработан первым из авторов и изложен в монографиях [2, 3]. Чтобы изложить его идею, рассмотрим простейший вариант, когда дополнительная координата x_0 совпадает с временем t. Ввиду этого соглашения

$$T = T_2 + T_1\dot{x}_0 + T_0\dot{x}_0^2. \tag{4}$$

Это квадратичная форма по $\dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n$, и можно показать, что для задач механики она положительно определена. К обычному уравнению Лагранжа

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial x} = F \tag{5}$$

надо добавить еще одно уравнение

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_0}\right)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial x_0} = F_0. \tag{6}$$

В силу (4) уравнение (6) имеет следующий явный вид:

$$(T_1 + 2T_0)^{\cdot} - \frac{\partial T}{\partial t} = F_0 \quad \text{или} \quad -\frac{\partial T}{\partial t} + \dot{T} - (T_2 - T_0)^{\cdot} = F_0.$$

С учетом формулы (2) и соглашения $x_0 = t$ можно записать:

$$\dot{T} = F \cdot \dot{x} + F_0\dot{x}_0. \tag{7}$$

Это соотношение по форме совпадает с теоремой (1) об изменении кинетической энергии для склерономных систем. Кроме того, формула (7) проясняет механический смысл дополнительной силы F_0, отвечающей новой обобщенной координате $x_0 = t$. По нашему мнению, указанный подход с физической точки зрения представляется более естественным.

Аналитическая динамика реономных систем, основанная на соотношениях (4)—(6), детально изложена в [2]. Цель настоящей работы — проанализировать основные принципы динамики для систем с кинетической энергией (3).

2. Принцип Гамильтона—Остроградского. Согласно этому принципу движение $t \to x(t)$ реономной системы с n степенями свободы описывается соотношением

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt + \int_{t_1}^{t_2} F \cdot \delta x dt = 0 \tag{8}$$

для всех вариаций δx с закрепленными концами. При этом время t не варьируется.

Чтобы избежать асимметрии координат и времени, введем вместо t новый параметр τ:

$$t=f(\tau),\ \tau_1\leqslant\tau\leqslant\tau_2;\ f(\tau_1)=t_1,\ f(\tau_2)=t_2.$$

Обозначая штрихом дифференцирование по τ, получим формулу

$$\int_{t_1}^{t_2} T dt=\int_{\tau_1}^{\tau_2} T^* d\tau,$$

где новая кинетическая энергия T^* определяется соотношением (3).

Поскольку координаты x и время t теперь считаются равноправными переменными, то естественно расширить операцию варьирования. Пусть $x=x(\tau, \alpha)$, $t=t(\tau, \alpha)$ — семейство путей вспомогательной склерономной системы с $n+1$ степенями свободы. Положим

$$\Delta x=\frac{\partial x}{\partial\alpha}\delta\alpha,\ \Delta t=\frac{\partial t}{\partial\alpha}\delta\alpha.$$

Как связаны между собой операции Δ и δ? Пусть $x=x(t, \alpha)$ — семейство путей исходной реономной системы. Тогда $x=x(t(\tau, \alpha), \alpha)$ и, следовательно,

$$\Delta x=\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\alpha}\delta\alpha+\frac{\partial x}{\partial\alpha}\delta\alpha=\dot{x}\Delta t+\delta x. \tag{9}$$

Это соотношение позволяет по-другому записать второе слагаемое в (8):

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} F\cdot\delta x t' d\tau=\int_{\tau_1}^{\tau_2}(t' F\cdot\Delta x-F\cdot x'\Delta t)\, d\tau.$$

Суммируя сказанное, приходим к следующему расширенному *принципу Гамильтона—Остроградского*:

$$\Delta\int_{\tau_1}^{\tau_2} T^* d\tau+\int_{\tau_1}^{\tau_2}(t' F\cdot\Delta x-F\cdot x'\Delta t)\, d\tau=0.$$

Отсюда по обычным правилам вариационного исчисления получаем дифференциальные уравнения движения в форме Лагранжа

$$\left(\frac{\partial T^*}{\partial x'}\right)'-\frac{\partial T^*}{\partial x}=t' F,\ \left(\frac{\partial T^*}{\partial t'}\right)'-\frac{\partial T^*}{\partial t}=-F\cdot x'. \tag{10}$$

Так как

$$\frac{\partial T^*}{\partial x'}=\frac{\partial T}{\partial\dot{x}},\ (\cdot)'=(\cdot)^{\cdot}\, t',$$

то первое уравнение (10) совпадает с классическим уравнением Лагранжа (5). Преобразуем второе уравнение (10), замечая, что

$$\frac{\partial T^*}{\partial t'}=T-\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\cdot\dot{x},\ \frac{\partial T^*}{\partial t}=t'\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{11}$$

С учетом (11) это уравнение принимает вид обобщенной теоремы об изменении кинетической энергии (ср. с (2)):

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\cdot\dot{x}-T\right)^{\cdot}=F\cdot\dot{x}. \tag{12}$$

Конечно, оно является следствием классических уравнений (5).

3. Принцип Д'Аламбера—Лагранжа. Усложним задачу, добавляя уравнение связи

$$\Phi(\dot{x},\ x,\ t)=0. \tag{13}$$

Связь предполагается регулярной, т. е. $\partial\Phi/\partial\dot{x}\neq 0$. Конечно, уравнений (13) может быть несколько.

Тогда, как известно, (5) заменяется уравнениями Рауса

$$\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\right)^{\cdot}-\frac{\partial T}{\partial x}=F+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}},\ \Phi=0. \tag{14}$$

Следуя схеме, изложенной в п. 2, заменим (13) соотношением

$$\Phi^*(x',\ t',\ x,\ t)=\Phi\left(\frac{x'}{t'},\ x,\ t\right)=0. \tag{15}$$

Запишем уравнения Рауса расширенной склерономной системы с $n+1$ степенями свободы, на которую наложена регулярная стационарная связь (15):

$$\left(\frac{\partial T^*}{\partial x'}\right)'-\frac{\partial T^*}{\partial x}=t'F+\mu\frac{\partial\Phi^*}{\partial x'},\ \left(\frac{\partial T^*}{\partial t'}\right)'-\frac{\partial T^*}{\partial t}=$$
$$=-F\cdot x'+\mu\frac{\partial\Phi^*}{\partial t'}.$$

Учитывая равенства

$$\frac{\partial\Phi^*}{\partial x'}=\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}\frac{1}{t'},\ \frac{\partial\Phi^*}{\partial t'}=-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}\cdot\dot{x}\right)\frac{1}{t'} \tag{16}$$

и полагая $\mu=\lambda t'^2$, приходим к уравнениям, первое из которых эквивалентно (14), а второе преобразуется в теорему об изменении кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\cdot\dot{x}-T\right)^{\cdot}=F\cdot\dot{x}+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}\cdot\dot{x}.$$

Для однородных по $\dot{x}$ связей (13) последнее слагаемое обращается в нуль согласно теореме Эйлера.

Уравнения (14) эквивалентны принципу Д'Аламбера—Лагранжа:

$$\left[\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\right)^{\cdot}-\frac{\partial T}{\partial x}-F\right]\cdot\delta x=0,\ \Phi=0, \tag{17}$$

где вариации (возможные перемещения) удовлетворяют соотношению Четаева

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}\cdot\delta x=0. \tag{18}$$

В нашем случае уравнения (17) заменяются на уравнения

$$\left[\left(\frac{\partial T^*}{\partial x'}\right)'-\frac{\partial T^*}{\partial x}-t'F\right]\cdot\Delta x+\left[\left(\frac{\partial T^*}{\partial t'}\right)'-\frac{\partial T^*}{\partial t}+F\cdot x'\right]\Delta t=0,$$

а (18) — на соотношение

$$\frac{\partial\Phi^*}{\partial x'}\cdot\Delta x+\frac{\partial\Phi^*}{\partial t'}\Delta t=0. \tag{19}$$

Интересно отметить, что ввиду формул (9) и (16) *уравнения для возможных перемещений* (18) *и* (19) *в точности совпадают.*

4. Общие теоремы динамики. Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований пространства-времени

$$g^{\varepsilon}:(x_0,\ t_0)\to(x_\varepsilon,\ t_\varepsilon).$$

Эта группа — фазовый поток автономной динамической системы, порождаемой векторным полем

$$w=(v,\ u),\ v=\left.\frac{dx_\varepsilon}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},\quad u=\left.\frac{dt_\varepsilon}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Компоненты v, u поля w — функции от x и t.

Согласно общему определению [4, гл. III] моментом склерономной системы относительно группы g называется величина

$$I=\frac{\partial T^*}{\partial x'}\cdot v+\frac{\partial T^*}{\partial t'}u=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\cdot v+\left(T-\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\cdot\dot{x}\right)u.$$

Запишем условие инвариантности кинетической энергии T^* относительно продолженного действия группы g:

$$\frac{\partial T^*}{\partial x'}\cdot v'+\frac{\partial T^*}{\partial t'}u+\frac{\partial T^*}{\partial x}\cdot v+\frac{\partial T^*}{\partial t}u=0.$$

Его можно переписать как условие на кинетическую энергию исходной реономной системы:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\cdot\dot{v}+\left(T-\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\cdot\dot{x}\right)\dot{u}+\frac{\partial T}{\partial x}\cdot v+\frac{\partial T}{\partial t}u=0. \tag{20}$$

В частности, если g совпадает с группой сдвигов от времени, то $v=0$, $u=1$. В этом случае условие (20) означает, что кинетическая энергия T не зависит явно от времени.

Если выполнено (20), то по теореме Нётер

$$I'=t'F\cdot v-(F\cdot x')u.$$

Переходя к дифференцированию по времени, получаем искомое соотношение:

$$\dot{I}=F\cdot v-(F\cdot\dot{x})u. \tag{21}$$

Это соотношение можно назвать также *теоремой об изменении энергии—импульса* реономной системы.

Рассмотрим случай, когда система не свободна: на нее наложена связь (13). Согласно [5] теорема (21) останется справедливой, если потребовать дополнительно, чтобы поле w было полем возможных перемещений. В соответствии с (19) это означает, что

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial x'}\cdot v+\frac{\partial \Phi^*}{\partial t'}u=0. \tag{22}$$

С учетом (16) соотношение (22) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\cdot v-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\cdot\dot{x}\right)u=0. \tag{23}$$

В частности, если g — группа сдвигов оси времени и функция Φ однородна по скоростям $\dot{x}$, то (23) заведомо выполнено.

5. Принцип Гаусса. Этот принцип, как известно, утверждает, что среди мыслимых движений действительным является такое, которое наименее всего отклоняется от освобожденного движения (см., например, [4, гл. 1]). Мерой отклонения служит принуждение по Гауссу:

$$Z = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} \Delta\ddot{x} \cdot \Delta\ddot{x}, \tag{24}$$

где $\Delta\ddot{x}$ обозначает разность ускорений мыслимого и освобожденного движений с одним и тем же состоянием в фиксированный момент времени t.

Для вспомогательной склерономной системы с кинетической энергией T^* и связью $\Phi^*=0$ также, очевидно, справедлив принцип Гаусса. Принуждение Z^* будет иметь тот же вид (24), однако матрицу $\partial^2 T/\partial\dot{x}^2$ надо заменить матрицей

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial x_i' \partial x_j'} & \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial x_i' \partial t'} \\ \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial t' \partial x_j'} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial t'^2} \end{matrix} \right\|,$$

а разности ускорений $\Delta\ddot{x}$ — вектором с компонентами $\Delta x''$, $\Delta t''$.

Наше наблюдение состоит в том, что *значения функций Z и Z^* отличаются множителем t'^3*, который считается постоянным по условиям принципа Гаусса. Действительно,

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x'^2} = \frac{1}{t'} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2}, \quad \frac{\partial^2 T^*}{\partial t' \partial x'} = -\frac{1}{t'} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} \dot{x},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t'^2} = \frac{1}{t'} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} \dot{x} \cdot \dot{x}.$$

Следовательно,

$$2tZ^* = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} \Delta x'' \cdot \Delta x'' - 2 \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} \Delta x'' \cdot \dot{x} \Delta t + \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} \dot{x} \cdot \dot{x} (\Delta t'')^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} (\Delta x'' - \dot{x}\Delta t'') \cdot (\Delta x'' - \dot{x}\Delta t''). \tag{25}$$

Так как $x' = \dot{x}t'$, то

$$x'' = \dot{x}t'' + \ddot{x}t'^2.$$

Таким образом,

$$\Delta\ddot{x}(t')^2 = \Delta x'' - \dot{x}\Delta t''.$$

Учитывая (24) и (25), получаем

$$Z^* = t'^3 Z.$$

Что и требовалось.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ланцош К. Вариационные принципы механики. М., 1965.
2. Vujičić V. A. Dynamics of rheonomic systems. Beograd, 1990.
3. Вуйичич В. А., Мартынюк А. А. Некоторые задачи механики неавтономных систем. Београд; Киев, 1991.

4. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. М., 1985.
5. Козлов В. В., Колесников Н. Н. О теоремах динамики//Прикл. матем. и механ. 1978. **42**, вып. 1. 28—33.

Поступила в редакцию
15.02.94