Математические заметки

том 58 выпуск 3 сентябрь 1995

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТАХ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА

В. В. Козлов

1. Введение. Общая теория интегральных инвариантов создана А. Пуанкаре и изложена в III-м томе "Новых методов небесной механики" [1]. Ряд важных дополнений сделаны Э. Картаном [2]. Напомним сначала основные определения.

Пусть

$$\dot{x} = v(x), \qquad x \in M^n, \tag{1.1}$$

– гладкая динамическая система на многообразии M. Производную Ли вдоль векторного поля v будем обозначать $\mathscr{L}_v$. По формуле гомотопии

$$\mathscr{L}_v = di_v + i_v d.$$

Пусть φ – k-форма, γ – k-цепь, g_v^t – фазовый поток системы (1.1). Справедлива простая формула (см., например, [3, гл. VII]):

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int_{g^t(\gamma)} \varphi = \int_\gamma \mathscr{L}_v \varphi.$$

Таким образом, если

$$\mathscr{L}_v \varphi = 0, \tag{1.2}$$

то интеграл

$$I[\gamma] = \int_\gamma \varphi \tag{1.3}$$

будет *абсолютным интегральным инвариантом* для системы (1.1):

$$I\big[g^t(\gamma)\big] = I[\gamma] \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Если

$$\mathscr{L}_v \varphi = d\psi, \tag{1.5}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-013-16244), ISF (MCY 000) и INTAS (93-339).

где ψ – некоторая $(k-1)$-форма, то равенство (1.4) справедливо для любого k-цикла γ: $\partial\gamma = 0$. В этом случае интеграл (1.3) называется *относительным интегральным инвариантом.*

Разделение интегральных инвариантов на абсолютные и относительные, предложенное Пуанкаре, не охватывает все интересные случаи. Например, может оказаться, что

$$\mathscr{L}_v \varphi = \psi, \qquad d\psi = 0, \tag{1.6}$$

причем k-форма ψ не является точной. В этом случае равенство (1.4) имеет место для любого k-мерного цикла, гомологичного нулю. Такой интегральный инвариант назовем *условным.*

Приведем простой пример линейного интегрального инварианта $(k-1)$, который является условным, но не относительным. Пусть

$$\begin{gathered} M^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{R} = \{q \bmod 2\pi, p\}, \\ \dot q = 0, \quad \dot p = 1; \qquad \varphi = p dq. \end{gathered}$$

Тогда

$$\mathscr{L}_v \varphi = i_v d\varphi = dq.$$

Форма $\psi = dq$ замкнута, но не точна. Поэтому,

$$\dot I\big[g^t(\gamma)\big] = 2\pi$$

для любого замкнутого контура γ, “охватывающего” цилиндр M (например, $\gamma = \{0 \leqslant q < 2\pi,\ p = 0\}$).

Пусть k-форма φ порождает условный или относительный интегральный инвариант. Тогда $(k+1)$-форме $d\varphi$, очевидно, отвечает абсолютный инвариант.

Действительно,

$$\mathscr{L}_v d\varphi = d\mathscr{L}_v \varphi = d\psi = 0.$$

Это замечание фактически принадлежит Пуанкаре [1, п. 238].

Пусть теперь $M^{2n} = T^*N^n$ – фазовое пространство гамильтоновой системы с конфигурационным пространством $N^n = \{x\}$. Введем канонические импульсы $y \in T^*_x N$ и 1-форму

$$\varphi = y dx = \sum_1^n y_k dx_k.$$

Как заметил Пуанкаре [1, п. 255], уравнения Гамильтона

$$\dot x_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot y_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}; \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{1.7}$$

допускают лишь линейный относительный инвариант

$$\int_\gamma \sum y_k\, dx_k, \qquad \partial\gamma = 0. \tag{1.8}$$

Интересно отметить, что инвариант (1.8) не зависит от гамильтониана H в уравнениях (1.7). Поэтому (1.8) иногда называют универсальным интегральным инвариантом. Как доказал Ли-Хуа-Чжун [4], каждый линейный универсальный инвариант уравнений Гамильтона может отличаться от инварианта Пуанкаре (1.8) лишь постоянным множителем. Этот результат, впрочем, носит формальный характер. Его доказательство основано на анализе инвариантности интеграла от одной и той же 1-формы φ относительно фазовых потоков гамильтоновых систем с разными конкретными гамильтонианами.

Стоит подчеркнуть, что теорема Ли-Хуа-Чжуна доказана для случая, когда $M = \mathbb{R}^{2n}$. Если первое число Бетти фазового пространства M отлично от нуля, то эта теорема уже не справедлива. К форме φ можно прибавить замкнутую, но не точную 1-форму. Тогда значение интеграла (1.8) на негомологичных нулю циклах изменится на некоторые ненулевые аддитивные постоянные. В общем случае теорема Ли-Хуа-Чжуна имеет место лишь для условных интегральных инвариантов.

Пуанкаре поставил задачу о наличии других интегральных инвариантов уравнений динамики, в частности, в задаче трех тел. В [1, п. 257] он пишет: "Можно задаться вопросом, существуют ли другие алгебраические интегральные инварианты, кроме тех, которые мы только что образовали.

Можно было бы применить либо метод Брунса, либо метод, который я использовал в главах IV и V ... "

Пуанкаре понимал, что эта задача тесно связана с условиями интегрируемости уравнений Гамильтона. Не случайно он упоминает главу V, в которой им доказана теорема о несуществовании однозначных аналитических интегралов при типичном возмущении функции Гамильтона. Покажем, что действительно в окрестности инвариантных торов вполне интегрируемые системы допускают несколько различных относительных интегральных инвариантов. В переменных действие-угол $J, \varphi \bmod 2\pi$ уравнений имеют следующий вид:

$$\dot J_1 = \dots = \dot J_n = 0, \qquad \dot\varphi_1 = \omega_1, \dots, \dot\varphi_n = \omega_n. \tag{1.9}$$

Здесь ω_k – функция от J. Рассмотрим невырожденный случай, когда

$$\frac{\partial(\omega_1,\dots,\omega_n)}{\partial(J_1,\dots,J_n)} \neq 0.$$

Оказывается, уравнения (1.9) можно представить в различных неэквивалентных гамильтоновых формах [5]: симплектическая структура

$$\omega = d\varphi, \qquad \varphi = \sum_1^n \frac{\partial K}{\partial \omega_k}\, d\varphi_k,$$

и функция Гамильтона H равна

$$\sum_1^n \omega_k \frac{\partial K}{\partial \omega_k} - K.$$

Здесь K – невырожденная функция от частот $\omega_1, \ldots, \omega_n$:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 K}{\partial \omega_i \partial \omega_j} \right\| \neq 0.$$

Различные гамильтоновы представления уравнений (1.9) "нумеруются" функциями $K(\omega)$. Поэтому, по теореме Пуанкаре, система (1.9) допускает интегральные инварианты

$$\oint \varphi = \oint \sum_1^n \frac{\partial K}{\partial \omega_k}\, d\varphi_k.$$

Сам Пуанкаре пытался связать существование новых интегральных инвариантов со свойствами мультипликаторов периодических решений уравнений Гамильтона. Он показал [1, п. 259], что если имеется p различных интегральных инвариантов (когда 1-формы φ независимы), причем коэффициенты форм φ линейны по каноническим переменным (как, например, в (1.8)), то p мультипликаторов будут равны единице. К сожалению, для общего случая анализ задачи, проведенный Пуанкаре, не привел к законченным результатам. В связи с этим Пуанкаре говорит: "Вероятно, задача трех тел не допускает инвариантных алгебраических соотношений, отличных от тех, которые уже известны. Однако, я еще не в состоянии доказать это" [1, п. 258].

Наша цель – доказать *гипотезу Пуанкаре* для некоторых упрощенных вариантов задачи трех тел.

2. Теория возмущений и интегральные инварианты. Идея Пуанкаре о связи задачи об интегральных инвариантах с проблемой малых знаменателей [1, п. 257] реализована в работе [6]. В ней рассмотрена система уравнений с малым параметром ε:

$$\dot{x} = u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots, \quad \dot{y} = v_0 + \varepsilon v_1 + \cdots, \quad \dot{z} = \varepsilon w_1 + \cdots. \qquad (2.1)$$

Правые части этих уравнений – ряды по ε, коэффициенты которых – аналитические функции x, y, z, 2π-периодические по x, y. Можно считать, что коэффициенты определены и аналитичны в прямом произведении

$$\Delta \times \mathbb{T}^2,$$

где Δ – интервал в $\mathbb{R} = \{z\}$, а $\mathbb{T}^2 = \{x, y \bmod 2\pi\}$. Предполагается, что функции u_0, v_0 зависят только от z. Тогда при $\varepsilon = 0$ будем иметь вполне интегрируемую систему: поверхности уровня интеграла $z = \mathrm{const}$ суть двумерные торы с условно-периодическими траекториями. Системы вида (2.1) часто встречаются в теории нелинейных колебаний (см., например, [7]).

В [6] рассмотрена задача об условиях существования у системы (2.1) относительного интегрального инварианта

$$\oint \varphi_\varepsilon, \tag{2.2}$$

причем коэффициенты 1-формы φ_ε – однозначные аналитические функции на $\Delta \times \mathbb{T}^2$, аналитически зависящие от ε. Конечно, следует исключить тривиальный случай, когда

$$d\varphi_\varepsilon = 0. \tag{2.3}$$

При этом условии интеграл (2.2) тождественно равен нулю в силу теоремы Стокса.

Разложим функцию w_1 в двойной ряд Фурье:

$$w_1 = \sum W_{mn}(z) \exp\bigl[i(mx + ny)\bigr].$$

Введем множество $P \subset \Delta$, состоящее из точек z, таких, что

(1) $mu_0(z) + nv_0(z) = 0$ для некоторых целых m, n, не равных одновременно нулю,

(2) $W_{mn}(z) \neq 0$.

Такие множества впервые рассматривались Пуанкаре в связи с проблемой интегрируемости уравнений Гамильтона [1, гл. V].

Теорема 1 [6]. *Предположим, что*

(A) *множество P имеет предельную точку z_* внутри Δ,*

(B) $u_0' v_0 - u_0 v_0' |_{z_*} \neq 0$,

(C) $W_{00}(z) \not\equiv 0$.

Тогда система (2.1) *не имеет нетривиальных интегральных инвариантов вида* (2.2).

Условие (B) означает невырожденность невозмущенной системы (когда $\varepsilon = 0$): отношение частот u_0/v_0 непостоянно. Кроме того, из (B) вытекает, что при $z = z_*$ и $\varepsilon = 0$ правые части (2.1) не обращаются в нуль. Условия (A) + (B) гарантируют отсутствие непостоянных аналитических интегралов и нетривиальных полей симметрий, аналитических по ε [6].

Можно попытаться применить теорему 1 к гамильтоновым системам, мало отличающимся от вполне интегрируемых. Здесь речь может идти о системах с двумя степенями свободы, порядок которых понижен на единицу с помощью интеграла энергии. Применяя метод Уиттекера, приведенной системе можно придать вид неавтономной гамильтоновой системы с периодическим по времени гамильтонианом (см. [8, гл. 1]).

Итак, рассмотрим уравнения Гамильтона

$$\begin{gathered}\dot{x}=1, \quad \dot{y}=\frac{\partial H}{\partial z}, \quad \dot{z}=-\frac{\partial H}{\partial y}, \\ H_{\varepsilon}=H_0(z)+\varepsilon H_1(x, y, z)+\cdots .\end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь $y \bmod 2\pi$, z – канонические переменные действие-угол невозмущенной системы, функция H считается 2π-периодической по "времени" $x=t$.

Для системы (2.4) имеем:

$$u_0=1, \quad v_0=\frac{\partial H_0}{\partial z}, \quad w_1=-\frac{\partial H_1}{\partial y}. \tag{2.5}$$

Следовательно, условие (B) эквивалентно невырожденности невозмущенного гамильтониана:

$$\frac{d^2 H_0}{dz^2} \neq 0. \tag{2.6}$$

Множество P, очевидно, совпадает с множеством

$$\left\{z \in \Delta : \frac{dH_0}{dz}=-\frac{n}{m},\ H_{mn} \neq 0\right\}, \tag{2.7}$$

где H_{mn} – коэффициенты Фурье возмущающей функции H_1. Из (2.5) вытекает, что условие (C) для гамильтоновых систем никогда не выполняется ($W_{00} \equiv 0$). Впрочем, это не удивительно: уравнения (2.4) имеют интегральный инвариант Пуанкаре–Картана

$$\oint z\, dy - H_{\varepsilon}\, dx. \tag{2.8}$$

Очевидно, этот инвариант нетривиальный (условие вырождения (2.5) не выполняется).

Укажем достаточные условия несуществования второго интегрального инварианта. Для этого нам потребуется

Лемма 1 [6]. *Пусть выполнены условия* (A) *и* (B) *теоремы* 1. *Тогда найдется функция*

$$\lambda_{\varepsilon}=\lambda_0(z)+\varepsilon \lambda_1(z)+\cdots ,$$

такая, что

$$d\varphi_{\varepsilon}=i_v(\lambda_{\varepsilon} \Omega), \tag{2.9}$$

где v_ε – *векторное поле* (2.1), $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$.

Покажем, как отсюда выводится заключение теоремы 1. Проинтегрируем 2-формы в обеих частях (2.9) по двумерному тору $z = \text{const}$. По теореме Стокса интеграл от формы $d\varphi$ равен нулю, а интеграл справа равен

$$\lambda_\varepsilon W_{00} + o(\varepsilon).$$

Применяя условие (C), получаем, что $\lambda_\varepsilon = 0$. Поэтому равенство (2.9) будет совпадать с условием вырождения (2.3).

Лемма 2. *Если выполнено* (2.9), *то* 3-*форма* $\lambda\Omega$ *порождает абсолютный интегральный инвариант системы* (2.1).

Действительно,

$$0 = dd\varphi = di_v(\lambda\Omega) = di_v(\lambda\Omega) + i_v d(\lambda\Omega) = \mathscr{L}_v(\lambda\Omega).$$

Лемма 3. *Предположим, что система* (2.1) *имеет еще один абсолютный инвариант, порождаемый* 3-*формой* $\lambda'\Omega$, *причем* $\lambda' \neq 0$. *Тогда отношение* λ/λ' – *интеграл уравнений* (2.1).

Положим $\mathscr{L}_v\Omega = \mu\Omega$. Тогда, по правилу Лейбница,

$$\mathscr{L}_v(\lambda\Omega) = (\mathscr{L}_v\lambda)\Omega + \lambda\mathscr{L}_v\Omega = (\dot\lambda + \lambda\mu)\Omega = 0.$$

Так как $\Omega \neq 0$, то

$$\dot\lambda + \mu\lambda = 0. \tag{2.10}$$

Аналогично,

$$\dot\lambda' + \mu\lambda' = 0. \tag{2.11}$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^{\cdot} = 0$$

в силу (2.10) и (2.11). Что и требовалось.

Хорошо известно, что фазовый поток уравнений Гамильтона (2.4) сохраняет "стандартную" 3-форму объема Ω. Более того, для 1-формы "энергии-импульса" из (2.8) справедливо равенство (2.9), причем $\lambda_\varepsilon = 1$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (2.5), *а множество* (2.7) *имеет предельную точку внутри интервала* Δ. *Тогда любой условный интегральный инвариант* (2.2) *гамильтоновой системы* (2.4) *отличается от инварианта Пуанкаре–Картана* (2.8) *постоянным множителем* c_ε.

Доказательство. Предположим, что имеется интегральный инвариант вида (2.2) системы (2.4). Так как выполнены условия (A) и (B) теоремы 1, то справедливо равенство (2.9). Учтем теперь, что $\mathscr{L}_v\Omega = 0$. Тогда, по леммам 2 и 3, множитель λ_ε в (2.9) – интеграл системы (2.4). Однако, при условиях теоремы 2, $\lambda_\varepsilon = c_\varepsilon = \mathrm{const}$ [8, гл. 1]. Итак,

$$d\varphi_\varepsilon = c_\varepsilon d(z dy - H_\varepsilon dx).$$

Отсюда вытекает, что значения интегралов (2.2) и (2.8) на гомологичных нулю циклах отличаются множителем c_ε. Что и требовалось.

Замечание. Предположим, что

1) $u_0' v_0 - u_0 v_0' \neq 0$,
2) P всюду плотно в Δ,
3) система (2.1) допускает нетривиальный инвариант (2.2).

Можно показать, что тогда любой другой условный интегральный инвариант системы (2.1) отличается от (2.2) постоянным множителем, аналитически зависящим от ε.

Теорему 2 можно применить к плоской круговой ограниченной задаче трех тел. Малым параметром ε здесь служит отношение массы Юпитера к массе Солнца. Динамика третьего тела ничтожно малой массы (астероида) во вращающейся системе отсчета (где Солнце и Юпитер неподвижны) описывается уравнениями Гамильтона [9]

$$\begin{gathered}\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \qquad k = 1, 2, \\ H = H_0 + \varepsilon H_1 + \cdots, \qquad H_0 = -\frac{1}{2p_1^2} - p_2.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Разложение возмущающей функции в двойной ряд Фурье было найдено Леверье. Оно имеет следующий вид:

$$H_1 = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} h_{uv} \cos\bigl[u q_1 - v(q_1 + q_2)\bigr].$$

Коэффициенты h_{uv}, зависящие от p_1, p_2, вообще говоря, отличны от нуля.

Принимая угловую переменную q_2 за новое “время” и применяя процедуру понижения порядка Уиттекера, приходим к уравнениям Гамильтона вида (2.4). При этом

$$H_0(z) = -\frac{1}{z^2}.$$

Так что условие (2.6) выполнено автоматически. Можно показать, что множество P заведомо всюду плотно на полуоси $z > 0$. Таким образом, приведенные уравнения Гамильтона ограниченной задачи трех тел не имеют новых относительных интегральных инвариантов, аналитических по параметру ε и независимых от инварианта Пуанкаре–Картана.

3. Интегральные инварианты и симметрии. Вернемся вновь к системе (1.1) и будем считать, что M – трехмерное многообразие, v – гладкое касательное векторное поле без особых точек. Более того, предположим, что система (1.1) допускает инвариантную форму объема Ω:

$$\mathscr{L}_v \Omega = 0.$$

Форма объема задает каноническую ориентацию M. Если M компактно, то можно считать, что

$$\int_M \Omega > 0.$$

В частности, форма Ω определяет гладкую инвариантную меру системы (1.1).

Наиболее важный пример систем указанного вида дают гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. Здесь M^3 – связная компонента неособой поверхности уровня функции Гамильтона, v – ограничение гамильтонова поля на M, форма объема определяется инвариантной 4-формой Лиувилля (подробности см., например, в [10]).

Лемма 4 (Картан [2, п. 91]). *При сделанных предположениях 2-форма*

$$\Phi = i_v \Omega \tag{3.1}$$

замкнута и порождает абсолютный интегральный инвариант системы (1.1).

Действительно,

$$d\Phi = di_v\Omega = \mathscr{L}_v\Omega - i_v d\Omega = 0,$$
$$\mathscr{L}_v\Phi = \mathscr{L}_v i_v\Omega = i_v\mathscr{L}_v\Omega = 0.$$

Так как форма (3.1) замкнута, то локально

$$\Phi = d\varphi.$$

Поскольку $i_v\Phi = 0$, то

$$\mathscr{L}_v\varphi = i_v d\varphi + di_v\varphi = d(i_v\varphi).$$

Следовательно, 1-форме φ отвечает "локальный" относительный интегральный инвариант.

Если класс когомологий 2-формы Φ равен нулю, то 1-форма φ корректно определена в целом. В частности, это заведомо так, если

$$H^2(M, \mathbb{R}) = 0. \tag{3.2}$$

Эти рассуждения фактически содержатся в [2, п. 91]. Правда, там обсуждается случай, когда $M = \mathbb{R}^3$.

В дальнейшем всюду предполагается, что для многообразия M^3 справедлива теорема о разбиении единицы. В частности, сюда относятся компактные многообразия.

Лемма 5. *Пусть* Ψ *– гладкая* 2*-форма на* M. *Найдется векторное поле* $x \to u(x)$ *такое, что*

$$\Psi = i_u \Omega. \tag{3.3}$$

Действительно, пусть $\{\lambda_\alpha(x)\}$ – разбиение единицы, подчиненное некоторому открытому покрытию M. Считается, что в областях $\operatorname{supp} \lambda_\alpha$ можно ввести координаты "в целом". Легко проверить, что в области $\operatorname{supp} \lambda_\alpha$ для 2-формы $\lambda_\alpha \Psi$ алгебраическое уравнение (3.3) имеет единственное гладкое решение u_α такое, что

$$\operatorname{supp} u_\alpha \subset \operatorname{supp} \lambda_\alpha.$$

Остается положить

$$u(x) = \sum_\alpha u_\alpha(x).$$

Замечание. В аналитическом случае поле u, конечно, будет аналитическим.

Лемма 6. *Предположим, что система* (1.1) *имеет условный интегральный инвариант*

$$\oint \varphi.$$

Положим

$$d\varphi = i_u \Omega. \tag{3.4}$$

Тогда векторное поле u *является полем симметрий*: $[u, v] = 0$.

Доказательство. По определению условного инварианта

$$\mathscr{L}_v \varphi = \psi, \qquad d\psi = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 = d\mathscr{L}_v \varphi &= \mathscr{L}_v d\varphi = \mathscr{L}_v i_u \Omega \\ &= (\mathscr{L}_v i_u - i_u \mathscr{L}_v)\Omega = i_{[v,u]}\Omega. \end{aligned}$$

Так как форма объема невырождена, то поля u, v коммутируют. Что и требовалось.

Замечание. Лемма 6 останется справедливой, если в (3.4) заменить форму $d\varphi$ любой замкнутой 2-формой. Условия существования нетривиальных полей симметрий (когда векторы $u(x)$ и $v(x)$ независимы почти всюду) уравнений Гамильтона получены в [11].

Лемма 6 имеет важные приложения к гамильтоновой механике. В качестве примера рассмотрим геодезический поток на замкнутой двумерной поверхности Σ. Он определяется заданием римановой метрики. Уравнения геодезических на Σ описываются уравнениями Гамильтона, причем гамильтонианом H служит риманова метрика, представленная в канонических координатах на $T^*\Sigma$. Хорошо известно, что при положительных значениях полной энергии h гамильтоновы системы на трехмерных энергетических поверхностях

$$\{x \in T^*\Sigma : H(x) = h\} \tag{3.5}$$

изоморфны. Обычно полагают $h = 1$; соответствующая динамическая система называется геодезическим потоком на Σ. Ясно, что геодезический поток имеет относительный интегральный инвариант Пуанкаре–Картана.

Теорема 3. *Пусть Σ – аналитическая поверхность рода > 1 с аналитической римановой метрикой. Любой условный инвариант геодезического потока на Σ, определяемый аналитической 1-формой на (3.5), пропорционален инварианту Пуанкаре–Картана.*

Доказательство. Пусть Ω – инвариантная аналитическая 3-форма объема на (3.5). Если геодезический поток имеет условный интегральный инвариант, определяемый аналитической 1-формой φ, то (по лемме 6) найдется аналитическое поле симметрий u. Однако, геодезический поток на аналитической поверхности не имеет нетривиальных симметрий [12]:

$$u = cv, \qquad c = \text{const}\,.$$

Но тогда, согласно (3.4)

$$d\varphi = c i_v \Omega.$$

Следовательно, рассматриваемый условный интегральный инвариант отличается от инварианта Пуанкаре–Картана постоянным множителем c.

Теорема доказана.

В заключение этого пункта укажем еще на одно приложение полученных результатов к одному из ограниченных вариантов задачи трех тел. Пусть два массивных тела одинаковой массы обращаются вокруг их общего центра масс по эллиптическим орбитам с ненулевым эксцентриситетом, а третье тело ничтожно малой массы все время движется по прямой, ортогональной плоскости массивных тел (подробности см. в [13]). Эта задача предложена А. Н. Колмогоровым для проверки возможности комбинаций финальных движений трех тел по классификации Шази.

Динамика пылинки описывается неавтономной гамильтоновой системой вида (2.4) с периодическим гамильтонианом. Расширенное фазовое пространство совпадает с прямым произведением

$$\mathbb{T} \times \mathbb{R}^2 = \{x \bmod 2\pi, y, z\}.$$

Разумеется, эта система имеет инвариант Пуанкаре–Картана (2.8).

Задача А. Н. Колмогорова неинтегрируема: она не допускает непостоянных аналитических интегралов [13]. Причина заключается в квазислучайном характере поведения ее траекторий. В частности, имеется бесконечное число невырожденных долгопериодических траекторий. Как показано в [11], отсюда вытекает отсутствие нетривиальных аналитических полей симметрий: $u = cv$, $c = \mathrm{const}$. Применяя лемму 6, получаем, что уравнения рассматриваемой задачи не допускают новых условных интегральных инвариантов. Аналогично доказывается отсутствие новых аналитических инвариантов на фиксированных энергетических многообразиях с большой отрицательной энергией плоской круговой ограниченной задачи трех тел. Необходимые подготовительные результаты о структуре множества долгопериодических невырожденных траекторий установлены в [14] методами символической динамики.

4. Инварианты высших порядков. В п.п. 2 и 3 рассмотрена задача об условиях существования линейных интегральных инвариантов. Теперь изучим вопрос об условных инвариантах второго порядка:

$$\int_D \Phi. \tag{4.1}$$

Здесь D – двумерный цикл в M^3, Φ – 2-форма. Условие инвариантности интеграла (4.1) имеет вид

$$\mathscr{L}_v \Phi = \Psi, \qquad d\Psi = 0. \tag{4.2}$$

Для относительных инвариантов 2-форма Ψ точна, а для абсолютных инвариантов $\Psi = 0$.

Так как инвариантная 3-форма объема Ω невырождена, то

$$d\Phi = f\Omega, \qquad f \colon M^3 \to \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Лемма 7. *Функция f – интеграл системы* (1.1) *на* M^3.

Действительно, применяя (4.2) и (4.3), получим:

$$0 = d\Psi = d\mathscr{L}_v\Phi = \mathscr{L}_v d\Phi = \mathscr{L}_v(f\Omega)$$
$$= (\mathscr{L}_v f)\Omega + f\mathscr{L}_v\Omega = \dot{f}\Omega.$$

Следовательно, $\dot{f} = 0$. Что и требовалось.

По лемме 4 система (1.1) имеет абсолютный инвариант $i_v\Omega$. Так что речь может идти о существовании еще одного интегрального инварианта.

Для дальнейшего полезно ввести понятие многозначного интеграла системы (1.1). Это замкнутая 1-форма ϑ, такая, что

$$i_v\vartheta = 0. \tag{4.4}$$

Локально $\vartheta = dg$, причем

$$\dot{g} = i_v dg = 0$$

согласно (4.4). Таким образом, локально функция g является обычным интегралом системы (1.1). Если

$$H^1(M, \mathbb{R}) = 0, \tag{4.5}$$

то функция g определена в целом, и многозначный интеграл превращается в обычный интеграл системы (1.1). Так как $\dim M = 3$, то по теореме двойственности Пуанкаре условия (3.2) и (4.5) эквивалентны.

Всюду ниже рассматриваемые объекты (M, v, Ω, Φ) считаются аналитическими.

Теорема 4. *Пусть M^3 компактно и система* (1.1) *допускает условный интегральный инвариант* (4.1), *причем*

$$\Phi \neq c i_v\Omega, \qquad c = \text{const}. \tag{4.6}$$

Тогда система (1.1) *имеет нетривиальный многозначный интеграл* $\vartheta \neq 0$.

Доказательство. По лемме 7, функция f из равенства (4.3) – интеграл системы (1.1). Если $f \neq \text{const}$, то теорема 4 доказана. Пусть $f = \alpha = \text{const}$. Интегрируя обе части равенства

$$d\Phi = \alpha\Omega \tag{4.7}$$

по компактному многообразию M и применяя теорему Стокса, получаем

$$\alpha \int_M \Omega = 0.$$

Так как 3-форма Ω есть форма объема, то $\alpha = 0$. Следовательно, согласно (4.6), форма Φ замкнута.

Положим (лемма 5)

$$\Phi = i_u \Omega.$$

Так как 2-форма Φ замкнута, то по лемме 6, поле u коммутирует с полем v. Возможны два случая: 1) векторы $u(x)$ и $v(x)$ линейно зависимы во всех точках $x \in M$, 2) эти векторы почти всюду независимы. Так как $v \neq 0$, то в первом случае

$$u(x) = \lambda(x) v(x), \qquad \lambda\colon M \to \mathbb{R}.$$

Поскольку u – поле симметрий, то λ – интеграл системы (1.1) [11]. Если $\lambda \neq \mathrm{const}$, то теорема доказана. Случай $\lambda = \mathrm{const}$ невозможен ввиду условия (4.6). Во втором случае, как доказано в [15], наличие нетривиального аналитического поля симметрий влечет существование аналитического многозначного интеграла $\vartheta \neq 0$. При этом используется трехмерность фазового пространства M и наличие инвариантной 3-формы объема.

Теорема доказана.

Следствие. *В предположениях теоремы* 4 *уравнение* (1.1) *явно интегрируется с помощью конечного числа алгебраических операций, дифференцирований и квадратур.*

Дополнительные дифференцирования требуются для отыскания многозначного интеграла (см. также [15]).

Замечание. Теорема 4 справедлива и в случае, когда имеется линейный интегральный инвариант

$$\oint \varphi.$$

Требуется только, чтобы 2-форма $\Phi = d\varphi$ удовлетворяла условию (4.6).

Поскольку дифференциальные уравнения указанных выше различных вариантов задачи трех тел не допускают нетривиальных полей симметрий и многозначных интегралов, то любой условный интегральный инвариант этих уравнений вида (4.1) может отличаться только постоянным множителем от инварианта

$$\int_D dz \wedge dy - dH \wedge dx.$$

Так как $\dim M = 3$, то имеет смысл рассматривать лишь абсолютные интегральные инварианты третьего порядка. Соответствующая 3-форма имеет вид $f\Omega$ и по лемме 3 функция f – интеграл уравнений (1.1). Для рассмотренных выше уравнений динамики $f = \mathrm{const}$.

Задача об условиях существования интегральных инвариантов гамильтоновых систем со многими степенями свободы требует дополнительного рассмотрения.

Московский государственный
университет им. М.В, Ломоносова

Поступило
02.12.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. т. III // Избр. труды. Т. II. М.: Наука, 1972.
[2] Картан Э. Интегральные инварианты. М.-Л.: Гостехиздат, 1940.
[3] Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973.
[4] Hwa-Chung-Lee. The universal integral invariants of Hamoltonian systems and application to the theory of canonical transformations // Proc. R. Soc. of Edinburgh. Sect. A. 1946–48. V. LXII. Part 3. P. 237–246.
[5] Козлов В. В. Лиувиллевость инвариантных мер вполне интегрируемых систем и уравнение Монжа–Ампера // Матем. заметки. 1993. Т. 53. №4. С. 45–52.
[6] Kozlov V. V. Dynamical systems determined by the Navier–Stokes equations // Rus. J. Math. Phys. 1993. V. 1. №1. P. 57–69.
[7] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. Л. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
[8] Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980.
[9] Шарлье К. Л. Небесная механика. М.: Наука, 1966.
[10] Аносов Д. В., Синай Я. Г. Некоторые гладкие эргодические системы // УМН. 1967. Т. 22. №5. С. 107–172.
[11] Козлов В. В. О группах симметрий динамических систем // ПММ. 1988. Т. 52. №4. С. 531–541.
[12] Козлов В. В. О группах симметрий геодезических потоков на замкнутых поверхностях // Матем. заметки. 1990. Т. 48. №5. С. 62–67.
[13] Алексеев В. М. Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика // УМН. 1981. Т. 36. №4. С. 161–176.
[14] Llibre J., Simo C. Oscillatory solutions in the planar restricted three-body problem // Math. Ann. 1980. V. 248. №2. P. 153–184.
[15] Bolotin S. V., Kozlov V. V. Symmetry fields of geodesic flows // Rus. J. Math. Phys. 1995. V. 3. №3. P. 279–296.