

УДК 514.8

ПРИНЦИП МОПЕРТЮИ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ
НА СФЕРЕ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ИЗ ИНТЕГРИРУЕМЫХ
СЛУЧАЕВ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

А. В. Болсинов, В. В. Козлов, А. Т. Фоменко

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
§ 1 . Общий принцип Мопертюи	4
§ 2 . Принцип Мопертюи в динамике тяжелого твердого тела	6
§ 3 . Принцип Мопертюи и явный вид метрик на сфере, порожденных квадратичным гамильтонианом на алгебре Ли группы движений R^3	7
§ 4 . Классические случаи интегрируемости в динамике твердого тела и отвечающие им интегрируемые геодезические потоки на сфере	11
4.1. Случай Эйлера и метрика на сфере Пуассона	11
4.2. Случай Лагранжа и соответствующая “метрика вращения” на сфере ..	12
4.3. Случай Клебша и геодезический поток эллипсоида	12
4.4. Случай Горячева–Чаплыгина и соответствующий интегрируемый геодезический поток на сфере. Кубический интеграл не сводится к квадратичному или линейному	14
4.5. Случай Ковалевской и соответствующий интегрируемый геодезический поток на сфере. Интеграл четвертой степени не сводится к квадратичному	16
§ 5 . Интегрируемые метрики на торе и на сфере	17
§ 6 . Гипотезы	20
§ 7 . Сложность интегрируемых геодезических потоков 1–2-метрик на сфере и на торе	22
§ 8 . Более грубая гипотеза: сложность любой невырожденно-интегрируемой метрики на сфере или на торе совпадает со сложностью известных интегрируемых 1–2-метрик	24
§ 9 . Геодезический поток эллипсоида топологически траекторно эквивалентен интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела	25
Список литературы	31

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 93-013-16244, 93-01-00155) и ISF (гранты № МСУ00 и М6Z000).

Введение

Классический принцип Мопертюи, которому, кстати, исполнилось в 1994 году ровно 250 лет, излагается практически в каждой книге, посвященной вариационному исчислению и механике. В то же время приходится констатировать, что лишь изредка он применяется к конкретным задачам. Укажем здесь, например, на работы С. П. Новикова [23], [24]. В них показано, как принцип Мопертюи позволяет применять топологические методы для отыскания периодических решений гамильтоновых систем, в частности, в задаче Кирхгофа. Далее, в [24] принцип Мопертюи использован при построении теории многозначных функционалов. Эта теория естественно возникает при изучении движения заряженной частицы на гладком многообразии в потенциальном скалярном поле и при наличии эффективного магнитного поля. Укажем также работу Смоленцева [25].

Цель нашей работы двояка:

- 1) мы описываем явно (с современной точки зрения) механизм действия принципа Мопертюи на примере классических интегрируемых динамических систем,
- 2) скомбинировав его с новой теорией топологической классификации интегрируемых систем (см. [1]–[3]), мы строим новые примеры интегрируемых геодезических потоков на сфере с интегралами степеней 3 и 4, и доказываем, что эти степени понизить нельзя.

§ 1. Общий принцип Мопертюи

Пусть M^n – компактное гладкое риманово многообразие с метрикой $g_{ij}(x)$, и пусть T^*M – пространство кокасательного расслоения на M , координатами в котором служат переменные x и p , где p – это ковектор из T_x^*M . Напомним, что T^*M является гладким симплектическим $2n$ -многообразием со стандартной 2-формой $\omega = dp \wedge dx$. Рассмотрим на T^*M натуральную механическую систему $v = \text{sgrad } H$, где H – гамильтониан, задающийся формулой

$$H = g^{ij}(x)p_i p_j + V(x),$$

где g^{ij} – тензор, обратный к метрическому, а $V(x)$ – гладкий потенциал, заданный на базе M .

Согласно известному *принципу Мопертюи*, при достаточно больших h (превосходящих $\max V(x)$) на фиксированном $(2n - 1)$ -мерном изоэнергетическом уровне $Q^{2n-1} = (H(x, p) = h)$ (являющемся гладким многообразием) интегральные траектории векторного поля v совпадают с траекториями другого векторного поля $\tilde{v} = \text{sgrad } \tilde{H}$, где гамильтониан \tilde{H} задается формулой

$$\tilde{H} = \frac{g^{ij}(x)}{h - V(x)} p_i p_j.$$

Ясно, что векторное поле \tilde{v} задает *геодезический поток* римановой метрики \tilde{g}_{ij} на многообразии T^*M , где

$$\tilde{g}_{ij} = (h - V(x))g_{ij}(x).$$

Таким образом, мы можем говорить об “отображении Мопертюи”, которое переводит исходное гамильтоново векторное поле v (заданное на T^*M) в другое гамильтоново векторное поле \tilde{v} (тоже заданное на том же многообразии T^*M). Изучим некоторые важные свойства этого отображения.

ТЕОРЕМА 1.

а) Гамильтоново поле v и гамильтоново поле \tilde{v} , являющееся его образом при отображении Мопертюи, имеют одинаковые интегральные траектории на данном фиксированном уровне энергии $Q^{2n-1} = (H = h)$. Следовательно, эти две гамильтоновы системы гладко траекторно эквивалентны. Напомним, что здесь $h > \max V(x)$.

б) Если исходное поле v обладало гладким интегралом $f(x, p)$ на данной изоэнергетической $(2n - 1)$ -поверхности Q (такие интегралы будем называть частными), то поле \tilde{v} также обладает гладким интегралом $\tilde{f}(x, p)$ (уже не частным, а полным) на всем кокасательном расслоении T^*M (за вычетом, быть может, нулевого сечения $M = \{(x, 0)\}$).

Доказательство теоремы следует из классического доказательства принципа Мопертюи. Легко проверить, что на уровне $Q = (H = h)$ выполнено равенство

$$d\tilde{H} = \frac{1}{h - V(x)} dH.$$

Отметим также, что отсюда сразу следуют формулы замены времени вдоль интегральных траекторий поля v , дающие время поля \tilde{v} . А именно, если t – время вдоль траекторий поля v , а \tilde{t} – время вдоль траекторий поля \tilde{v} , то имеет место соотношение $d\tilde{t} = (h - V(x)) dt$.

Прокомментируем простое, но полезное утверждение б) теоремы 1. Дело в том, что, согласно принципу Мопертюи, интеграл \tilde{f} определен изначально лишь на изоэнергетической поверхности Q . Однако его можно продолжить на все кокасательное расслоение (кроме, быть может, нулевого сечения) по следующей естественной формуле:

$$\tilde{f}(x, p) = f(x, p/|p|),$$

где норма $|p|$ рассматривается в смысле римановой метрики \tilde{g}_{ij} .

При этом мы используем тот факт, что векторное поле \tilde{v} является геодезическим потоком, поэтому его интеграл можно распространить по однородности с одной фиксированной изоэнергетической поверхности на все пространство. Некоторые проблемы могут возникнуть на нулевом сечении, но нас это не будет интересовать, так как мы изучаем гамильтоновы системы на регулярных изоэнергетических $(2n - 1)$ -мерных многообразиях Q (отличных от нулевого n -мерного сечения, гомеоморфного M).

ЗАМЕЧАНИЕ. Принцип Мопертюи можно использовать и в случае, когда гамильтониан H содержит линейные по импульсам члены (отражающие, например, наличие магнитного поля). См., например, [23], [24].

§ 2. Принцип Мопертюи в динамике тяжелого твердого тела

Применим теорему 1 в важном специальном случае, когда четырехмерное симплектическое 4-многообразие T^*M является гладким подмногообразием в линейном 6-мерном пространстве $R^6(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$, отождествляющимся с линейным пространством, сопряженным к алгебре Ли группы движений трехмерного евклидова пространства. Эта алгебра Ли обозначается обычно через $e(3)$, тогда $R^6 = e(3)^*$. При этом 4-многообразие T^*M задается в R^6 уравнениями:

$$\begin{aligned} r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 &= 1, \\ r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3 &= 0. \end{aligned}$$

Отметим, что эти два уравнения очевидно задают четырехмерное многообразие, диффеоморфное кокасательному расслоению к двумерной сфере T^*S^2 . В разных вариантах динамики твердого тела переменные r_i и s_i приобретают конкретный механический смысл. Например, при движении твердого тела с фиксированной точкой в поле силы тяжести (т.н. тяжелое твердое тело) переменные r_i являются компонентами единичного вектора вертикали (фиксированного в трехмерном пространстве) с точки зрения системы координат, вращающейся в движущееся твердое тело, а переменные s_i являются компонентами вектора кинетического момента твердого тела.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $v = \text{sgrad } H$ – гамильтонова система на евклидовом пространстве $R^6(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$ с гамильтонианом

$$H(r, s) = \langle B(r)s, s \rangle + V(r),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидово скалярное произведение в R^3 , B – симметричная невырожденная положительно определенная матрица (зависящая в общем случае от r), а $V(r)$ – гладкий потенциал. Предположим, что система v интегрируема на 4-многообразии T^*S^2 (вложенном в R^6), причем второй интеграл $f(r, s)$ является гладкой функцией, полиномиальной по s степени n , т.е. $f(r, s) = \sum_{i=1}^m P_i(s)$, где $P_i(s)$ – полиномы от s с коэффициентами, зависящими от переменных r . Рассмотрим гамильтонову систему \tilde{v} , являющуюся образом системы v при отображении Мопертюи.

Тогда система \tilde{v} (задающая геодезический поток некоторой римановой метрики на сфере S^2) также обладает вторым интегралом \tilde{f} (его построение см. выше в теореме 1), являющимся однородным полиномом по переменным s и имеющим ту же степень n , что и исходный интеграл f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно принципу Мопертюи, новое векторное поле \tilde{v} задается гамильтонианом \tilde{H} вида

$$\tilde{H} = \frac{1}{h - V(r)} \langle B(r)s, s \rangle.$$

Отметим прежде всего, что без ограничения общности мы можем предполагать, что все переменные s_i входят в полином f либо только в четных степенях, либо только в нечетных. Пояснение: если в интеграл f входили члены как четных, так и нечетных степеней по s , то, сгруппировав отдельно четные степени и отдельно нечетные степени,

мы сразу видим, что каждая из этих двух групп по отдельности является интегралом. Определим теперь новый второй интеграл \tilde{f} поля \tilde{v} по формуле

$$\tilde{f} = \sum_{i=1}^m P_i(s) (\tilde{H}(s, r))^{(m-i)/2}.$$

Относительно переменных s эта функция является однородным полиномом степени m . Дело в том, что, в силу сделанного предположения о четности или о нечетности степеней мономов в функции f , показатель $(m - i)/2$ всегда является целым числом. Следовательно, в функцию \tilde{f} радикалы не входят.

Теперь докажем, что \tilde{f} действительно является интегралом поля \tilde{v} . Заметим, что функция \tilde{f} совпадает с f на уровне $Q = (H = h)$. Следовательно, на этом уровне энергии функция \tilde{f} является интегралом. Кроме того, легко проверить, что из однородности \tilde{H} и \tilde{f} (по s) следует, что и скобка Пуассона $\{\tilde{H}, \tilde{f}\}$ также однородна (как полином по s). Эта скобка равна нулю на заданной поверхности Q (на которой \tilde{f} является интегралом), следовательно, функция $\{\tilde{H}, \tilde{f}\}$ равна нулю тождественно, т.е. \tilde{f} является интегралом на всем 4-многообразии T^*S^2 . Теорема доказана.

§ 3. Принцип Мопертюи и явный вид метрик на сфере, порожденных квадратичным гамильтонианом на алгебре Ли группы движений R^3

Сформулируем еще одну интересную задачу. Пусть, согласно принципу Мопертюи, мы сопоставили исходной системе v на $e(3)^*$ систему \tilde{v} на 2-сфере, т.е. на ее кокасательном расслоении T^*S^2 . Однако это соответствие, описанное выше, было описано пока лишь на содержательном, но “не на формульном уровне”. Другими словами: как найти явные формулы, связывающие естественные координаты $(r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3)$ с двумя связями (наложенными на эти 6 евклидовых координат):

$$\begin{aligned} r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 &= 1, \\ r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3 &= 0, \end{aligned}$$

на 4-многообразии M^4 с естественными координатами на кокасательном расслоении к стандартной 2-сфере? Итак, из шести координат с двумя связями нужно изготовить четыре координаты (x_1, x_2, p_1, p_2) на T^*S^2 .

При этом, мы вложим 2-сферу в R^3 с координатами u_1, u_2, u_3 . Сфера задается стандартно: $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$. Вторую группу координат в кокасательном расслоении к R^3 мы обозначим через v_1, v_2, v_3 . Они определяют импульсы. Кокасательное расслоение к сфере определяется, тем самым, как 4-многообразие, вырезаемое в 6-мерном пространстве $R^6(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3)$ двумя уравнениями:

$$\begin{aligned} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 &= 1, \\ u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 &= 0. \end{aligned}$$

При этом мы отождествляем векторы и ковекторы при помощи *евклидова скалярного произведения* (евклидовой метрики в R^3).

Теперь нужно задать явное вложение μ кокасательного расслоения к 2-сфере в линейное пространство $e(3)^*$. Зададим его следующими явными формулами:

$$r = u, \quad s = [u, v],$$

где через $[,]$ обозначено векторное произведение векторов в евклидовом пространстве. В координатной записи это вложение выглядит так:

$$r_i = u_i, \quad s_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2, \quad s_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3, \quad s_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

ЛЕММА 1.

а) При указанном вложении μ кокасательного расслоения T^*S^2 в $e(3)^*$ его образ совпадает с 4-мерной орбитой коприсоединенного действия группы $E(3)$ движений R^3 на коалгебре $e(3)^*$:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, \\ r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3 = 0.$$

б) При этом вложении μ каноническая симплектическая структура, имеющаяся на орбитах коприсоединенного представления, индуцирует на кокасательном расслоении к стандартной 2-сфере (при его вложении в коалгебру) каноническую симплектическую структуру кокасательного расслоения T^*S^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

а) Ясно, что уравнение $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ переходит при указанном вложении в уравнение $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$. Далее, вектор v , ортогональный радиус-вектору u , переходит в векторное произведение векторов u и v . Ясно, что это произведение $[u, v]$ также ортогонально радиус-вектору u . Поэтому вектор $s = [u, v]$ удовлетворяет линейному уравнению

$$r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3 = 0,$$

являющемуся “образом соотношения ортогональности”.

б) Теперь осталось проверить, что стандартная скобка Пуассона в $R^6(u, v)$:

$$\{u_i, v_j\} = \delta_{ij}, \quad \{u_i, u_j\} = 0, \quad \{v_i, v_j\} = 0$$

переходит в стандартную скобку Пуассона–Ли на коалгебре $R^6(r, s)$:

$$\{r_i, r_j\} = 0, \\ \{s_1, s_2\} = s_3, \quad \{s_1, s_3\} = -s_2, \quad \{s_2, s_3\} = s_1, \\ \{s_1, r_2\} = r_3, \quad \{s_1, r_3\} = -r_2, \quad \{s_2, r_3\} = r_1, \\ \{r_1, s_2\} = -r_3, \quad \{r_1, s_3\} = r_2, \quad \{r_2, s_3\} = -r_1.$$

Это утверждение проверяется прямым вычислением. Тем самым доказана пуассоновость отображения $T^*R^3(u, v) \rightarrow e(3)^*(r, s)$. Это отображение переводит $R^6(u, v) = T^*R^3(u, v)$ в 5-мерную поверхность, задаваемую в $R^6(r, s) = e(3)^*$ уравнением $r_1 s_1 +$

$r_2 s_2 + r_3 s_3 = 0$. Отображение, конечно, нелинейное. Его ядром является “нормальное расслоение” к сфере. Уравнение $r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3 = 0$ является частным случаем уравнения $r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3 = g$, где g – постоянная площадей. При этом мы учитываем, что вложение

$$T^*S^2 \rightarrow TS^2 \rightarrow TR^3 \rightarrow T^*R^3$$

является симплектическим. Напомним, что, отождествляя касательное и кокасательные расслоения, мы пользуемся евклидовой метрикой.

Лемма доказана.

Итак, рассмотрим симплектическое вложение (диффеоморфизм)

$$\mu: T^*S^2(x, p) \rightarrow T^*S^2(r, s).$$

Здесь x, p – канонические координаты. Для упрощения обозначений мы вместо \tilde{H} напишем K .

ЛЕММА 2. *Если гамильтониан $K(r, s)$ квадратичен по координатам s , т.е. имеет вид $K = \langle B(r)s, s \rangle$ (где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидово скалярное произведение), то при отображении μ он переходит в гамильтониан $K(x, p)$, квадратичный по импульсам p . Следовательно, он имеет вид*

$$\sum g^{ij}(x)p_i p_j,$$

где g^{ij} – тензор, обратный к римановой метрике $g_{ij}(x)$ на 2-сфере S^2 . В частности, гамильтонова система с гамильтонианом K превращается в геодезический поток метрики g_{ij} на 2-сфере.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы для μ , выражающие (r, s) через (u, v) , линейны по v . Лемма доказана.

Теперь напишем явные формулы, выражающие риманову метрику g_{ij} через матрицу B , а также обратные формулы, выражающие B через g_{ij} .

ТЕОРЕМА 3. *Связь между B и g_{ij} задается так. Пусть B – заданная билинейная форма. Рассмотрим стандартное вложение сферы S^2 в R^3 и определим на R^3 риманову метрику $\bar{B}_{\alpha\beta}$ посредством формул, указанных ниже. Тогда искомая риманова метрика g_{ij} на сфере будет индуцироваться этой метрикой из R^3 . Формулы для \bar{B} следующие:*

$$\bar{B}_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}/\lambda,$$

где функция λ является определителем $\det B(u)|_L$, где $B(u)|_L$ – это ограничение 2-формы B на двумерную евклидову плоскость L , ортогональную радиус-вектору u ; при этом на плоскости L введена евклидова метрика, т.е. определитель вычисляется по отношению к декартовым координатам в L .

Таким образом, форма \bar{B} конформно эквивалентна форме B . Отметим, что форма B имеет матрицу 3×3 , а метрика g_{ij} – матрицу 2×2 . Удобно рассматривать “черту” как отображение, переводящее форму в форму. Тогда теорему, обратную к теореме 3, можно кратко сформулировать так.

ТЕОРЕМА 4. *Наоборот, форма B восстанавливается по метрике \overline{B} аналогичным образом, а именно*

$$B = \overline{\overline{B}}.$$

Перейдем к доказательству теорем 3 и 4.

Рассмотрим гамильтониан $K(u, v)$ геодезического потока метрики g_{ij} на сфере S^2 . Напомним, что (u, v) принадлежит к кокасательному расслоению к сфере. По определению гамильтониана K , его значение $K(u, v)$ на паре (u, v) есть скалярный квадрат вектора v в смысле метрики g^{-1} в точке u на сфере. Здесь мы рассматриваем метрику g^{-1} как метрику на *векторах*, опуская индексы при помощи евклидова скалярного произведения. С другой стороны, из явных формул вложения кокасательного расслоения сферы на орбиту в коалгебре, мы видим, что $K(u, v)$ совпадает со скалярным квадратом вектора $[u, v]$ в смысле формы B . Таким образом, учитывая, что действие векторного произведения в касательной плоскости к сфере сводится к повороту вектора на $\pi/2$, мы получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 3. *Пусть дана форма g . Тогда ограничение формы B на касательную плоскость к стандартной 2-сфере устроено следующим образом. Для того, чтобы найти скалярное произведение касательных векторов a и b относительно формы B , мы должны повернуть каждый из векторов на 90° и затем взять их скалярное произведение относительно формы g^{-1} .*

Опираясь на эту лемму, мы можем теперь сравнить матрицы двух форм: B и g на касательной плоскости к 2-сфере. Известно, что в касательной плоскости всегда существует ортонормированный базис, относительно которого форма g запишется при помощи диагональной матрицы

$$g = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу формы B в этом же базисе. Получаем:

$$B = \begin{pmatrix} 1/d & 0 \\ 0 & 1/c \end{pmatrix},$$

которая очевидно переписывается так:

$$B = \frac{1}{cd} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \frac{g}{\det g}.$$

Теорема 4 доказана.

Надо отметить, что появление $\det g$ фактически объясняется тем, что мы должны отождествлять векторы с ковекторами (и наоборот).

Из полученной формулы очевидно, что операция “черта” является инволюцией в касательном пространстве к *единичной стандартной сфере*. (В других точках это – не инволюция). Отсюда и следует теорема 3.

Появление инволюции указывает на наличие интересной двойственности. Операция “черта” позволяет изготавливать из метрики на сфере (стандартно вложенной в R^3 , но наследующей из R^3 некоторую метрику g общего вида) – некоторую другую метрику. Алгоритм такого изготовления фактически описан в лемме 3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Обратно, рассмотрим на стандартной сфере, вложенной в R^3 , некоторую метрику, индуцированную *диагональной* метрикой из объемлющего пространства R^3 . Пусть эта объемлющая метрика имеет вид

$$ds^2 = I_1(u) du_1^2 + I_2(u) du_2^2 + I_3(u) du_3^2.$$

Тогда при помощи отображения μ^{-1} из нее изготавливается следующий гамильтониан H :

$$K = (I_1 I_2 I_3)^{-1} \cdot \frac{I_1(r)s_1^2 + I_2(r)s_2^2 + I_3(r)s_3^2}{I_1^{-1}(r)r_1^2 + I_2^{-1}(r)r_2^2 + I_3^{-1}(r)r_3^2}.$$

Отметим, что в смысле обнаруженной выше двойственности, метрика эллипсоида двойственна метрике на сфере Пуассона.

Сформулируем здесь интересную задачу: обобщить изложенную выше конструкцию на случай кокасательных расслоений к сфере любой размерности.

§4. Классические случаи интегрируемости в динамике твердого тела и отвечающие им интегрируемые геодезические потоки на сфере

В теории твердого тела хорошо известны следующие классические случаи интегрируемости: Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Горячева–Чаплыгина, Клебша. Все эти случаи объединены тем свойством, что их гамильтониан имеет вид квадратичной формы по импульсам плюс потенциал (т.е. нет членов, линейных по импульсам). Применяя отображение Мопертюи, получаем серию соответствующих интегрируемых геодезических потоков. Интересный вопрос – какие именно потоки (и метрики) получаются.

Рассмотрим гамильтониан задачи движения твердого тела. В общем случае он имеет вид:

$$H = I_1 s_1^2 + I_2 s_2^2 + I_3 s_3^2 + L(r, s) + V(r),$$

где I_1, I_2, I_3 – постоянные, L – линейно по импульсам, а V – гладкий потенциал.

Рассмотрим теперь интересный частный случай, когда гамильтониан H (или метрика g) не содержит линейных (по импульсам) членов, но включает в себя некоторый потенциал $V(r)$. Как запишется отвечающая ему метрика на сфере радиуса 1, стандартно вложенной в евклидово пространство $R^3(u_1, u_2, u_3)$?

При помощи отображения μ из него изготавливается геодезический поток следующей римановой метрики:

$$ds^2 = (h - V(u))(I_1 I_2 I_3)^{-1} \cdot \frac{I_1 du_1^2 + I_2 du_2^2 + I_3 du_3^2}{I_1^{-1}u_1^2 + I_2^{-1}u_2^2 + I_3^{-1}u_3^2}.$$

4.1. Случай Эйлера и метрика на сфере Пуассона. Гамильтониан в случае Эйлера имеет вид

$$H = I_1 s_1^2 + I_2 s_2^2 + I_3 s_3^2.$$

При отображении Мопертюи μ ему отвечает следующая метрика на 2-сфере (так называемая *метрика на сфере Пуассона*):

$$ds^2 = h(I_1 I_2 I_3)^{-1} \cdot \frac{I_1 du_1^2 + I_2 du_2^2 + I_3 du_3^2}{I_1^{-1}u_1^2 + I_2^{-1}u_2^2 + I_3^{-1}u_3^2},$$

где h – фиксированный уровень энергии (т.е. $H = h$) в случае Эйлера. Здесь предполагается, что написанная метрика должна быть ограничена на стандартно вложенную сферу S^2 в $R^3(u_1, u_2, u_3)$. Напомним, что эту же метрику на сфере Пуассона можно определить по-другому. Нужно рассмотреть группу вращений $SO(3)$, снабженную левоинвариантной римановой метрикой, определяемой диагональной матрицей $\text{diag}(I_1, I_2, I_3)$. Эта матрица задает скалярное произведение на алгебре Ли этой группы. Разнося это скалярное произведение левыми сдвигами по группе, мы и получаем некоторую левоинвариантную метрику. Затем нужно рассмотреть левое действие окружности S^1 на группе $SO(3)$ и перейти к фактор-пространству группы по этому действию. Получится 2-сфера. При этом исходная левоинвариантная метрика на группе индуцирует некоторую метрику на базе, т.е. на сфере. Это и есть метрика на сфере Пуассона.

Интересный вопрос: можно ли реализовать сферу Пуассона в виде гладкой сферы, вложенной (или погруженной) в \mathbb{R}^3 ?

Если кривизна метрики на сфере Пуассона положительна, то по классической теореме Г. Вейля [17] эту сферу можно реализовать как выпуклую поверхность в трехмерном евклидовом пространстве. Оказывается, эта кривизна не всегда положительна и, по всей видимости, в общем случае вложение сферы Пуассона в R^3 невозможно. При $I_1 = I_2$ эта задача рассматривалась в статье Г. Г. Окуневой [22]. Там показано, что при $(I_1 - I_3)/I_3 < -\frac{1}{3}$ (тогда на S^2 имеются области с отрицательной кривизной) невозможно реализовать сферу Пуассона как поверхность вращения в R^3 . По-видимому, в этом случае вообще не существует изометрического вложения.

4.2. Случай Лагранжа и соответствующая “метрика вращения” на сфере. Гамильтониан в случае Лагранжа выглядит так:

$$H = I_1 s_1^2 + I_1 s_2^2 + I_3 s_3^2 + V(r_3).$$

Здесь эллипсоид инерции является поверхностью вращения, так как $I_1 = I_2$. Соответствующая метрика на сфере имеет вид

$$ds^2 = (h - V(u_3))(I_1 I_1 I_3)^{-1} \cdot \frac{I_1 du_1^2 + I_1 du_2^2 + I_3 du_3^2}{I_1^{-1} u_1^2 + I_1^{-1} u_2^2 + I_3^{-1} u_3^2}.$$

Другими словами, геодезический поток, возникающий из случая Лагранжа, является геодезическим потоком на некоторой сфере вращения. Интересная задача – дать геометрическое описание этих сфер вращения.

4.3. Случай Клебша и геодезический поток эллипсоида. Укажем на одно чрезвычайно интересное следствие из принципа Мопертюи, а именно, докажем гладкую траекторную эквивалентность интегрируемого случая Клебша и геодезического потока на эллипсоиде (напомним, что последняя задача также интегрируема, что хорошо известно). Этот результат в разное время и разными способами был получен Г. Минковским [3] и В. В. Козловым [2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему v на пространстве $e(3) = R^6(s, r)$, описывающую движение трехмерного твердого*

тела в идеальной жидкости в классическом случае Клебша. В этом случае гамильтониан H имеет вид

$$H = \frac{s_1^2}{I_1} + \frac{s_2^2}{I_2} + \frac{s_3^2}{I_3} - (I_1 r_1^2 + I_2 r_2^2 + I_3 r_3^2).$$

Второй интеграл f этой системы имеет вид

$$f = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + (I_2 I_3 r_1^2 + I_3 I_1 r_2^2 + I_1 I_2 r_3^2).$$

Тогда эта система v , ограниченная на трехмерный уровень энергии $H = 0$, гладко траекторно эквивалентна геодезическому потоку \tilde{v} стандартной римановой метрики на эллипсоиде в евклидовом трехмерном пространстве, задаваемом уравнением

$$I_1 x^2 + I_2 y^2 + I_3 z^2 = 1$$

в декартовых координатах x, y, z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим трехмерный уровень $Q = (H = 0)$ (т.е. $h = 0$) и применим общую схему отображения Мопертюи, изложенную выше. Тогда траектории системы v совпадают с траекториями системы \tilde{v} с гамильтонианом \tilde{H} следующего вида:

$$\tilde{H} = \left(\frac{s_1^2}{I_1} + \frac{s_2^2}{I_2} + \frac{s_3^2}{I_3} \right) / (I_1 r_1^2 + I_2 r_2^2 + I_3 r_3^2).$$

Гамильтониан \tilde{H} задает некоторую риманову метрику на 2-сфере. Легко проверить, что эта метрика совпадает с метрикой эллипсоида, задаваемого уравнением, указанным в формулировке теоремы. Предложение доказано.

Отметим, что второй интеграл системы \tilde{v} имеет здесь вид

$$\tilde{f} = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + (I_2 I_3 r_1^2 + I_3 I_1 r_2^2 + I_1 I_2 r_3^2) \frac{s_1^2/I_1 + s_2^2/I_2 + s_3^2/I_3}{I_1 r_1^2 + I_2 r_2^2 + I_3 r_3^2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим теперь другой уровень энергии $H = h$, где h теперь отлично от нуля. Следуя той же схеме, получаем при помощи отображения Мопертюи новую гамильтонову систему \tilde{v} , являющуюся геодезическим потоком некоторой римановой метрики на двумерной сфере. Эта система имеет следующий гамильтониан:

$$\tilde{H} = \left(\frac{s_1^2}{I_1} + \frac{s_2^2}{I_2} + \frac{s_3^2}{I_3} \right) / (I_1 r_1^2 + I_2 r_2^2 + I_3 r_3^2 + h).$$

Эта система снова, конечно, интегрируема. Ее второй интеграл имеет следующий вид:

$$\tilde{f} = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + (I_2 I_3 r_1^2 + I_3 I_1 r_2^2 + I_1 I_2 r_3^2) \frac{s_1^2/I_1 + s_2^2/I_2 + s_3^2/I_3}{I_1 r_1^2 + I_2 r_2^2 + I_3 r_3^2 + h}.$$

Таким образом, мы видим, что метрика эллипсоида включается в однопараметрическое семейство римановых метрик (уже не являющихся метриками эллипсоидов), геодезические потоки которых тем не менее интегрируемы. Чрезвычайно интересно было бы выяснить – что это за римановы метрики на двумерной сфере? Поскольку они

интегрируемы при помощи интеграла, квадратичного по импульсам, следовательно, по классической теореме, они являются *биркгофовскими*, т.е. при подходящем выборе конформных координат на сфере они запишутся в хорошо известном виде (обнаруженном Биркгофом и изученном затем В. Н. Колокольцовым). Однако поиск “подходящих конформных координат” весьма затруднен (неясен сам алгоритм их обнаружения). Поэтому вопрос об описании геометрических свойств таких метрик остается актуальным.

4.4. Случай Горячева–Чаплыгина и соответствующий интегрируемый геодезический поток на сфере. Кубический интеграл не сводится к квадратичному или линейному. Здесь подробно излагаются результаты А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко, кратко опубликованные в [16].

Применим ту же самую формулу для интегрируемого случая Горячева–Чаплыгина. Гамильтониан Горячева–Чаплыгина имеет следующий вид:

$$H = s_1^2 + s_2^2 + 4s_3^2 + r_1.$$

Интеграл Горячева–Чаплыгина выглядит так:

$$f = s_3(s_1^2 + s_2^2) - (r_3 s_1)/2.$$

Согласно принципу Мопертюи, мы изготавливаем из этого гамильтониана H новый гамильтониан \tilde{H} на кокасательном расслоении к сфере следующего вида:

$$\tilde{H} = \frac{s_1^2 + s_2^2 + 4s_3^2}{h - r_1},$$

где постоянная h больше 1. При этом интеграл f превращается в интеграл \tilde{f} , имеющий вид

$$\tilde{f} = s_3(s_1^2 + s_2^2) - \frac{r_3 s_1}{2(h - r_1)}(s_1^2 + s_2^2 + 4s_3^2).$$

Риманова метрика соответствующего геодезического потока на сфере имеет следующий вид:

$$ds^2 = \frac{h - u_1}{4} \frac{du_1^2 + du_2^2 + 4du_3^2}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2/4}.$$

Чтобы записать интеграл соответствующего геодезического потока, достаточно подставить в формулу для \tilde{f} вместо переменных r и s их выражения через u и v , указанные в [15]. Этого мы делать не будем, ввиду громоздкости получающегося выражения.

ТЕОРЕМА 5 (А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко [16]).

Интегрируемый случай Горячева–Чаплыгина порождает на сфере риманову метрику, геодезический поток которой является боттовским и интегрируем при помощи интеграла степени 3, указанного выше. Этот интеграл не сводится к квадратичному интегралу.

Доказательство. Рассмотрим грубую молекулу W указанного геодезического потока метрики Горячева–Чаплыгина на сфере. Как мы знаем, этот поток траекторно непрерывно эквивалентен исходной динамической системе динамики твердого тела (случай Горячева–Чаплыгина). Грубая молекула W этой последней интегрируемой системы была ранее вычислена в работе А. А. Ошемкова [12]. Она имеет вид, показанный на рис. 1. Продолжим далее доказательство, предположив противное, т.е. что интеграл Горячева–Чаплыгина на сфере сводится к квадратичному. Но в таком случае мы можем воспользоваться работой Т. З. Нгуена и Л. С. Поляковой [5], в которой они полностью вычислили молекулы W^* всех геодезических потоков на сфере, интегрируемых при помощи *квадратичных* и *линейных интегралов*. Все эти молекулы перечислены в явных терминах.

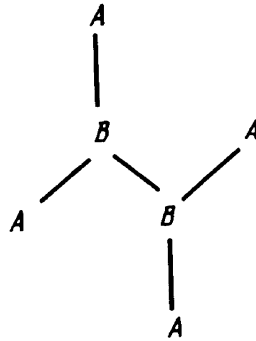


Рис. 1

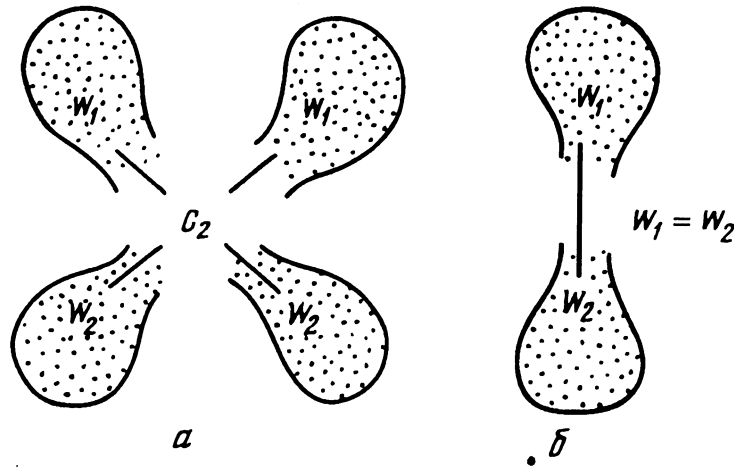


Рис. 2

Используя этот результат, мы видим, что молекула потока Горячева–Чаплыгина на сфере должна была бы иметь один из двух видов, показанных на рис. 2. Молекула на рис. 2а отвечала бы случаю, если бы интеграл Горячева–Чаплыгина сводился

к квадратичному, а молекула на рис. 2б отвечала бы случаю, если бы интеграл Горячева–Чаплыгина сводился к линейному. Здесь W_1 – некоторое дерево, все ветви которого *направлены вверх*, а W_2 – дерево, ветви которого *направлены вниз*. При этом атомы, являющиеся вершинами графов-деревьев W_1 и W_2 должны иметь специальный вид и, в частности, не содержать “звездочек” (см. [5]). Сравнивая эти графы с графом на рис. 1, мы видим, что граф на рис. 1 *не имеет такой структуры*. Поскольку граф W – это грубый топологический инвариант интегрируемой системы, мы получили противоречие. Теорема доказана.

4.5 Случай Ковалевской и соответствующий интегрируемый геодезический поток на сфере. Интеграл четвертой степени не сводится к квадратичному. Здесь подробно излагаются результаты А. В. Болсинова и А. Т. Фоменко, кратко опубликованные в [16].

Гамильтониан Ковалевской имеет следующий вид:

$$H = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2) + r_1.$$

Интеграл Ковалевской выглядит так:

$$f = \left(\frac{s_1^2}{2} - \frac{s_2^2}{2} - r_1 \right)^2 + (s_1 s_2 - r_2)^2.$$

Согласно принципу Мопертюи, мы изготавливаем из этого гамильтониана H новый гамильтониан \tilde{H} на кокасательном расслоении к сфере следующего вида:

$$\tilde{H} = \frac{s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2}{h - r_1},$$

где постоянная h больше 1. При этом интеграл f превращается в интеграл \tilde{f} , имеющий вид

$$\tilde{f} = \left(\frac{s_1^2}{2} - \frac{s_2^2}{2} - r_1 \frac{s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2}{h - r_1} \right)^2 + \left(s_1 s_2 - r_2 \frac{s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2}{h - r_1} \right)^2.$$

Риманова метрика соответствующего геодезического потока на сфере имеет следующий вид:

$$ds^2 = \frac{h - u_1}{2} \frac{du_1^2 + du_2^2 + 2du_3^2}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2/2}.$$

Чтобы записать интеграл соответствующего геодезического потока, достаточно подставить в формулу для \tilde{f} вместо переменных r и s их выражения через u и v , указанные в [15]. Этого мы делать не будем, ввиду громоздкости получающегося выражения.

ТЕОРЕМА 6 (А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко [16]).

Интегрируемый случай Ковалевской порождает на сфере риманову метрику, геодезический поток которой является боттовским и интегрируем при помощи интеграла степени 4, указанного выше. Этот интеграл не сводится к квадратичному интегралу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим молекулу W указанного геодезического потока метрики Ковалевской на сфере. Как мы знаем, этот поток траекторно непрерывно эквивалентен исходной динамической системе динамики твердого тела (случай Ковалевской). Молекула W этой последней интегрируемой системы была ранее вычислена в работе А. А. Ошемкова [12] (см. также [11]). Она имеет вид, показанный на рис. 3. Продолжим далее доказательство, предположив противное, т.е. что интеграл Ковалевской на сфере сводится к квадратичному. Но в таком случае мы снова можем воспользоваться работой Т. З. Нгуена и Л. С. Поляковой [5], в которой они полностью вычислили молекулы W^* всех геодезических потоков на сфере, интегрируемых при помощи *квадратичных и линейных интегралов*. Все эти молекулы перечислены в явных терминах.

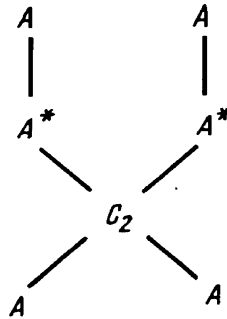


Рис. 3

Используя этот результат, мы видим, что молекула потока Ковалевской на сфере должна была бы иметь один из двух видов, показанных на рис. 2. Молекула на рис. 2а отвечала бы случаю, если бы интеграл Ковалевской сводился к квадратичному, а молекула на рис. 2б отвечала бы случаю, если бы интеграл Ковалевской сводился к линейному. Как видно из рис. 3, молекула W случая Ковалевской содержит два атома A^* , которых нет ни в одной из молекул, вычисленных Нгуен Тьен Зунгом и Л. С. Поляковой. Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 5. Интегрируемые метрики на торе и на сфере

Отметим, что в действительности интегрируемые случаи Горячева–Чаплыгина и Ковалевской порождают целое семейство (по крайней мере *однопараметрическое*) римановых метрик на сфере. Как видно из формул, в коэффициенты метрики входит параметр h , который можно менять произвольно. Таким образом, мы получаем два однопараметрических семейства интегрируемых геодезических потоков метрик, интегралы которых степеней 3 и 4, соответственно, не сводятся к квадратичным.

Таким образом, на сфере существуют метрики, геодезические потоки которых интегрируемы при помощи интегралов степеней 1, 2, 3, 4. Назовем такие метрики *интегрируемыми 1-метриками, 2-метриками, 3-метриками и 4-метриками* (а их совокупность назовем *1–2–3–4-метриками*).

Интегрируемые 1-метрики и 2-метрики полностью описаны. Рассмотрим сначала локальный аспект этой задачи. Пусть x_1, x_2 – локальные конформные (изотермичес-

кие) координаты римановой метрики, p_1 и p_2 – сопряженные им канонические импульсы. В этих переменных гамильтониан геодезического потока принимает вид

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2\Lambda(x_1, x_2)}.$$

ТЕОРЕМА 7 (Дж. Д. Биркгоф [9]). *Если имеется линейный по импульсам интеграл f , то в некоторых конформных координатах $f = p_1$ и Λ не зависит от переменной x_1 . Если же имеется квадратичный по импульсам интеграл, независимый от H , то в некоторых координатах $\Lambda = \lambda(x_1) + \mu(x_2)$.*

Координата x_1 , от которой не зависит гамильтониан H , называется *циклической*, а отвечающий ей импульс p_1 называется *циклическим интегралом*. Таким образом, наличие линейных интегралов связано с существованием “скрытых” циклических переменных.

Гамильтониан геодезического потока с квадратичным интегралом приводится к виду

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2(\lambda(x_1) + \mu(x_2))}.$$

Системы такого вида называются *лиувиллевыми*. Переменные x_1, p_1 и x_2, p_2 разделяются: уравнения допускают два квадратичных интеграла

$$f_1 = \frac{p_1^2}{2} - H\lambda(x_1), \quad f_2 = \frac{p_2^2}{2} - H\mu(x_2).$$

Итак, наличие дополнительного квадратичного интеграла влечет за собой существование “скрытых” разделенных переменных.

На самом деле Биркгоф рассматривал более общую задачу об *условных* полиномиальных интегралах первой и второй степени по импульсам (они являются интегралами на каком-то одном уровне интеграла энергии). Теорема Биркгофа остается справедливой и в этом случае, только надо еще выполнить подходящую замену времени.

Теперь рассмотрим задачу о строении 1-метрики и 2-метрики в целом. Прежде всего отметим, что замкнутая поверхность M рода > 1 вообще не допускает 1 и 2-метрики. Это – следствие более общего результата об отсутствии нетривиальных интегралов геодезического потока, аналитических по импульсам, в частности, полиномиальных интегралов [18]. Поэтому нам остается рассмотреть случаи, когда M гомеоморфно тору T^2 и сфере S^2 . На торе, как известно, всегда можно ввести конформные координаты в целом. Значит, можно считать, что гамильтониан геодезического потока на торе имеет вид $H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2\Lambda(x_1, x_2)}$, где Λ – некоторая положительная 2π -периодическая функция от x_1 и x_2 .

ТЕОРЕМА 8 (Дж. Д. Биркгоф, В. Н. Колокольцов, И. К. Бабенко, Н. Н. Нехоршев). *Если имеется линейный по импульсам интеграл, то в некоторых угловых конформных координатах*

$$\Lambda = \lambda(mx_1 + nx_2),$$

где $\lambda(\cdot)$ – 2π -периодическая функция, m, n – целые числа. Если же имеется дополнительный квадратичный интеграл, то в некоторых конформных координатах

$$\Lambda = \lambda(mx_1 + nx_2) + \mu(-nx_1 + mx_2),$$

где $\lambda(\cdot)$ и $\mu(\cdot)$ – 2π -периодические функции, m, n – целые числа.

Подчеркнем, что линейный интеграл не всегда порождается угловой циклической координатой. Вот простой контрпример: $\Lambda \equiv 1, f = p_1 + \sqrt{2}p_2$. Эта теорема фактически содержится в [10]. Правда, там имеется неточность, обнаруженная И. К. Бабенко и Н. Н. Нехорошевым: утверждалось, что с помощью подходящего линейного унимодулярного преобразования в выражениях для Λ можно положить $m = 1, n = 0$. Оказывается, при этом нарушается либо условие свойства конформности, либо унимодулярности. Более общая теорема об условно-линейных и условно-квадратичных (по Биркгофу) интегралах геодезического потока на торе получена в [19].

Описание интегрируемых 1-метрик и 2-метрик на двумерной сфере является более сложной задачей.

ТЕОРЕМА 9 (В. Н. Колокольцов [10]). *Если имеется линейный интеграл геодезического потока на сфере, то в некоторых конформных координатах x_1, x_2 на сфере с выколотой точкой функция Λ имеет вид $\Lambda = \lambda(x_1^2 + x_2^2)$, где $\lambda(\cdot)$ – такая гладкая функция, что $\lambda(\xi) = (c + o(1))/\xi$ при $\xi \rightarrow \infty$.*

Если имеется дополнительный квадратичный интеграл, то функция Λ имеет в некоторых конформных координатах следующий вид:

$$\Lambda = \frac{\lambda(u(x_1, x_2)) + \mu(v(x_1, x_2))}{|4z^2 + g_2z + g_3|}, \quad z = x_1 + ix_2,$$

где $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. При этом u, v – вещественная и мнимая части преобразования $w = \mathcal{P}^{-1}(z)$, где $\mathcal{P}(z | g_2, g_3)$ – функция Вейерштрасса с парой периодов вида $\omega_1, i\omega_2$ с вещественными ω_1, ω_2 , а λ и μ – такие гладкие функции, что

$$\begin{aligned} \text{а) } \quad \lambda(u) &= (u - k\omega_1/2)^2(c + o(1)) \quad \text{при } u \rightarrow k\omega_1/2, \\ \mu(v) &= (v - k\omega_2/2)^2(c + o(1)) \quad \text{при } v \rightarrow k\omega_2/2, \end{aligned}$$

для любого целого $k, c > 0$,

б) значения функций λ и μ на отрезках $[\omega_1/2, \omega_1]$ и $[\omega_2/2, \omega_2]$ определяются через их значения на отрезках $[0, \omega_1/2]$ и $[0, \omega_2/2]$ по формулам

$$\begin{aligned} \lambda(\omega_1/2 + \tau) &= \lambda(\omega_1/2 - \tau), \quad \tau \in [0, \omega_1/2], \\ \mu(\omega_2/2 + \tau) &= \mu(\omega_2/2 - \tau), \quad \tau \in [0, \omega_2/2], \end{aligned}$$

в) λ и μ периодичны с периодами ω_1 и ω_2 , соответственно (тогда значение $\lambda(u(z)) + \mu(v(z))$ не зависит от выбора значения многозначной функции $\mathcal{P}^{-1}(z)$).

В отличие от этих метрик, интегрируемые 3-метрики и 4-метрики полностью не описаны. Мы предъявили пока лишь первые отдельные примеры таких метрик, хотя убеждены, что эти однопараметрические метрики в действительности включаются в некоторые естественные *многопараметрические* (или даже функциональные) семейства метрик, интегрируемых при помощи интегралов степеней 3 или 4.

Назовем метрику *невыврожденно-интегрируемой*, если ее геодезический поток интегрируем при помощи некоторого боттговского интеграла (на неособом изоэнергетическом уровне).

§ 6. Гипотезы

- (а) На торе нет никаких других невырожденно-интегрируемых метрик, кроме хорошо известных интегрируемых 1–2-метрик.
- (б) На сфере любая невырожденно-интегрируемая метрика совпадает с какой-либо из интегрируемых 1–2–3–4-метрик.
- в) Контргипотеза для случая сферы.

Гипотезы (а) и (б) сформулированы В. В. Козловым и А. Т. Фоменко, причем, возможно, что в их формулировке условие *невырожденности* метрики можно ослабить, заменив его всего лишь на *гладкость*.

ПРОБЛЕМА. *Верно ли, что любая невырожденно (гладкая) интегрируемая риманова метрика на торе обязательно является интегрируемой 1–2-метрикой (все такие метрики известны), а на сфере совпадает с какой-либо метрикой типа 1–2–3–4 (сегодня полностью описаны лишь 1–2-метрики), т.е. имеет интеграл степени либо 1, либо 2, либо 3, либо 4?*

Другими словами, утверждается, что если геодезический поток какой-то гладкой метрики на торе (соответственно, на сфере) интегрируем при помощи гладкого невырожденного интеграла (или полиномиального по импульсам), то тогда этот поток обязательно имеет интеграл степени 1 либо 2 в случае тора и степени, не превышающей 4, в случае сферы.

Один из авторов настоящей статьи, а именно, А. В. Болсинов высказал по поводу этой гипотезы (в случае сферы) свое *особое*, противоположное мнение. Оно заключается в следующем:

в случае сферы нет никаких топологических препятствий к существованию геодезических потоков, интегрируемых при помощи интеграла произвольной степени.

Поэтому А. В. Болсинов выдвигает контргипотезу: *на сфере существуют интегрируемые геодезические потоки метрик, интегралы которых имеют сколь угодно большую степень (по импульсам) и не сводятся к интегралам степеней 1, 2, 3, 4.*

Это предположение имеет под собой следующий локальный результат.

ТЕОРЕМА 10 (В. В. Козлов). *Имеются системы с гамильтонианом*

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2\Lambda(x_1, x_2)},$$

которые допускают в области $D_x \times \mathbb{R}_p^2$ (D – диск на плоскости x_1, x_2) полиномиальный по импульсам интеграл любой заданной степени n , независимый от H , и при этом не допускают независимого от H полиномиального интеграла степени $< n$.

Для сферы мы пока не можем достаточно убедительно обосновать ни первую, ни вторую гипотезы. Перейдем поэтому к случаю тора (для которого между авторами нет разногласий).

ТЕОРЕМА 11 (В. В. Козлов, Н. В. Денисова [20]). *Предположим, что Λ – тригонометрический многочлен и что геодезический поток на торе имеет независимый от H полиномиальный интеграл. Тогда найдется дополнительный полиномиальный по импульсам интеграл степени ≤ 2 .*

Согласно аппроксимационной теореме Вейерштрасса, такими метриками можно сколь угодно точно приблизить любую метрику на торе. Таким образом, высказанная выше гипотеза доказана для всюду плотного множества римановых метрик на торе.

В общем случае, когда Λ – произвольная гладкая функция на торе, в этом направлении получен более слабый результат.

ТЕОРЕМА 12 (В. В. Козлов, Н. В. Денисова [21]). *Предположим, что геодезический поток на торе имеет дополнительный полиномиальный интеграл f степени n , причем,*

- а) *если n – четно, то f – четная функция по p_1 и p_2 ,*
- б) *если n – нечетно, то f – четная функция по p_1 (или p_2) и нечетная функция по p_2 (или p_1).*

Тогда найдется независимый от H полиномиальный интеграл степени ≤ 2 .

Заметим, что вопрос о существовании интегрируемых натуральных механических систем на торе T^2 с интегралами высших степеней по импульсам частично исследовался ранее в работах М. Л. Бялого [13], В. В. Козлова, Д. В. Трещева [14]. Например, в работе М. Л. Бялого [13] рассматривается гамильтонова система $v = \text{sgrad } H$ с гамильтонианом

$$H = (p_1^2 + p_2^2)/2 + V(x, y),$$

где V – 2π -периодическая функция переменных x и y . Система $v = \text{sgrad } H$ задает движение материальной точки по двумерному тору в потенциальном поле. Общая задача: найти потенциал V , при котором существует полиномиальный по импульсам интеграл n -й степени F_n с 2π -периодическими коэффициентами. При этом четная и нечетная части F_n в отдельности являются первыми интегралами, поэтому можно считать, что F_n – сумма однородных полиномов только четных или только нечетных степеней. Случаи линейного и квадратичного интегралов относятся к числу классических (см. Дж. Д. Биркгоф [9], В. Н. Колокольцов [10], М. Л. Бялый [13]). Известно, что:

(1) линейный по импульсам интеграл F_1 существует тогда и только тогда, когда $V = f(mx + ny)$, где m, n – целые числа, а f – 2π -периодическая функция; при этом $F_1 = mp_2 - np_1$;

(2) квадратичный по импульсам интеграл F_2 существует тогда и только тогда, когда $V = f_1(m_1x + n_1y) + f_2(m_2x + n_2y)$, где m_i и n_i – целые числа и $m_1m_2/n_1n_2 = -1$, а f_i – 2π -периодичны; при этом $F_2 = (x_1 + x_2)p_1^2 + 4p_1p_2 - (x_1 + x_2)p_2^2 + 2(x_1 - x_2)(f_1 + f_2)$ и $x_i = m_i/n_i$.

Для более высоких степеней отметим следующие результаты М. Л. Бялого.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (М. Л. Бялый [13]). *Для гамильтониана H на торе T^2 кубический по импульсам интеграл F_3 существует тогда и только тогда, когда реализуется случай (1), т.е. когда существует линейный по импульсам интеграл F_1 и при этом F_3 явно выражается через F_1 и H .*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (М. Л. Бялый [13]). *Для гамильтониана H на торе T^2 интеграл четвертой степени по импульсам F_4 существует тогда и только тогда, когда реализуется случай (2), т.е. когда существует квадратичный по импульсам интеграл F_2 и при этом F_4 явно выражается через F_2 и H .*

Доказательство обеих теорем основано на детальном исследовании уравнения $\{F_n, H\} = 0$. Отмечается, что при $n > 4$ вычисления становятся слишком громоздкими, хотя, по-видимому, приводят к тем же результатам.

В. В. Козлов и Д. В. Трещев [14] рассмотрели этот вопрос с другой стороны: предполагается, что потенциал $V(x_1, \dots, x_n)$ натуральной системы с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} p_i p_j + V(x_1, \dots, x_n)$$

является тригонометрическим полиномом от координат x_1, \dots, x_n на торе T^n , зато на степени дополнительных интегралов никаких ограничений не налагается. Из основной теоремы, дающей необходимое и достаточное условие на потенциал $V(x_1, \dots, x_n)$, обеспечивающее полную интегрируемость (по Биркгофу) гамильтоновой системы с положительно определенной квадратичной формой $\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} p_i p_j$, вытекает следующее важное следствие. Если гамильтонова система с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} p_i p_j + V(x_1, \dots, x_n)$$

имеет n независимых полиномиальных интегралов с независимыми старшими однородными формами, то существует n независимых инволютивных полиномиальных интегралов степени, не превосходящей 2.

Итак, результаты работ [13], [14], [20], [21] дают веское основание надеяться, что на торе T^2 не существует интегрируемых натуральных механических систем с нетривиальными интегралами высших степеней по импульсам. Тем не менее, вопрос пока остается открытым.

§ 7. Сложность интегрируемых геодезических потоков 1–2-метрик на сфере и на торе

Е. Н. Селиванова [4], Т. З. Нгуен и Л. С. Полякова [5] получили топологическую классификацию интегрируемых геодезических потоков на торе T^2 и на сфере S^2 , обладающих линейными или квадратичными по импульсам дополнительными интегралами f . Это позволило затем Е. Н. Селивановой, Л. С. Поляковой и Т. З. Нгуену классифицировать сложности этих интегрируемых геодезических потоков на сфере и на торе (см. [4], [5] и ниже).

ТЕОРЕМА 13 (Т. З. Нгуен, Л. С. Полякова). *Интегрируемые геодезические потоки (римановы метрики) на сфере, обладающие линейным или квадратичным по импульсам дополнительным интегралом, заполняют область $A \cup B$ на молекулярной таблице сложности (рис. 4).*

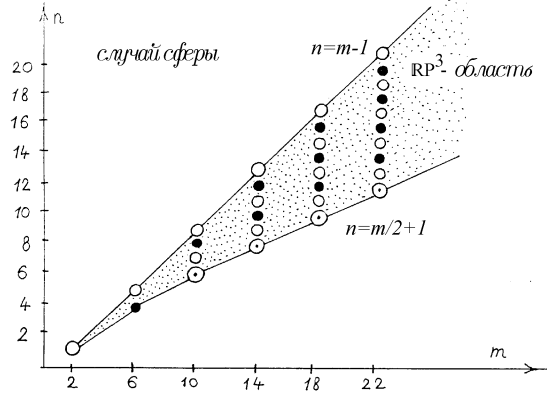


Рис. 4

а) Множество

$$A = \left\{ (m, n) = (6, 4) \text{ или } \frac{m}{2} + 3 \leq n \leq m - 2, m \geq 6, \right.$$

где $m = 4k + 2, n = 2l$ и k, l – произвольные неотрицательные целые числа $\left. \right\}$.

Это множество A , изображающее на таблице геодезические интегрируемые потоки с квадратичным дополнительным интегралом, показано на рис. 4 черными малыми кружками (большие черные точки).

б) Множество

$$B = \left\{ (m, n) = (2, 1) \text{ или } \frac{m}{2} + 2 \leq n \leq m - 1, m \geq 6, \right.$$

где $m = 4k + 2, n = 2l + 1$ и k, l – произвольные неотрицательные целые числа $\left. \right\}$.

Это множество B , изображающее на таблице интегрируемые геодезические потоки с линейным дополнительным интегралом, показано на рис. 4 белыми малыми кружками (большие белые точки).

ТЕОРЕМА 14 (Е. Н. Селиванова). Интегрируемые геодезические потоки на торе заполняют область C на таблице молекулярных сложностей (рис. 5). Множество

$$C = \left\{ (m, n) = (0, 1) \text{ или } \frac{m}{2} + 2 \leq n \leq m, m = 4k, n = 2(l + 1), \right.$$

где k, l – произвольные неотрицательные целые числа $\left. \right\}$.

Точки этого множества изображены на рис. 5 черными малыми дисками.

Отметим, что изоэнергетическая 3-поверхность $Q^3 = \{H = \text{const}\}$ в случае геодезических потоков на торе диффеоморфна тору T^3 , а в случае сферы – проективному пространству, т.е. $Q^3 = RP^3$. Все “математически существующие” интегрируемые гамильтоновы системы (общего положения; см. выше) на изоэнергетической 3-сфере

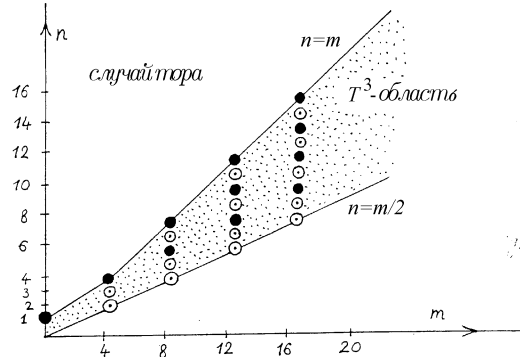


Рис. 5

были классифицированы Т. З. Нгуеном и А. Т. Фоменко [6]. Сложности всех “математически существующих” интегрируемых систем на торе T^3 и на проективном пространстве RP^3 были описаны Т. З. Нгуеном [7]. Он вычислил форму той области на таблице сложности, которая заполнена сложностями таких интегрируемых систем. Эти области были названы так: S^3 -область, T^3 -область и RP^3 -область, соответственно [1], [6], [7].

Как мы видим из рис. 4, 5, зоны, изображающие сложности интегрируемых геодезических потоков 1–2-метрик на сфере (и на торе соответственно), образуют “сеть” (“сеточное подмножество”) внутри RP^3 -области (T^3 -области соответственно).

§ 8. Более грубая гипотеза:

сложность любой невырожденно-интегрируемой метрики на сфере или на торе совпадает со сложностью известных интегрируемых 1–2-метрик

Эта гипотеза была сформулирована А. Т. Фоменко, и она опирается на некоторые “экспериментальные” факты.

ГИПОТЕЗА О СЛОЖНОСТИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ МЕТРИК. Пусть g_{ij} – произвольная невырожденно-интегрируемая риманова метрика на торе (или сфере) (т.е. соответствующий геодезический поток интегрируем по Лиувиллю). Тогда сложность этой метрики (ее геодезического потока) совпадает в случае тора со сложностью некоторой интегрируемой 1–2-метрики (все такие сложности уже вычислены), а в случае сферы совпадает со сложностью некоторой интегрируемой 1–2–3–4-метрики (их сложности пока описаны лишь частично).

Как мы доказали выше, на сфере существуют интегрируемые метрики с дополнительным интегралом степени 3 и 4, не сводящимся к квадратичному, например, метрика Горячева–Чаплыгина и метрика Ковалевской. Легко видеть, что сложность метрики Горячева–Чаплыгина равна (6,5), т.е. попадает в область, заполненную сложностями 1–2-метрик. В то же время, сложность метрики Ковалевской (8,6) очевидно не попадает в эту зону (рис. 4). Отметим, что молекула Ковалевской содержит также два атома вида A^* (а таких атомов нет у геодезических потоков 1–2-метрик).

Если сформулированная выше общая гипотеза верна, то точка, изображающая любую невырожденно-интегрируемую метрику на торе должна лежать на таблице сложностей в замечательной области, открытой Е. Н. Селивановой. Эта область отмечена черными дисками на рис. 5. Вид аналогичной области для сферы пока неясен: пока лишь описаны сложности 1–2-метриков, но совершенно неясно – как устроены сложности 3–4-метриков.

Интегрируемая риманова метрика на двумерном многообразии M^2 называется *ориентируемой*, если все седловые критические окружности соответствующего геодезического потока (= гамильтоновой системы) имеют ориентируемые сепаратрисные диаграммы.

Оказывается, что в классе ориентируемых интегрируемых метрик на сфере гипотеза А. Т. Фоменко об их сложности “почти верна”. А именно, справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 (Т. З. Нгуен, Л. С. Полякова, В. В. Калашников(мл.)).

Количество m критических окружностей произвольной невырожденно-интегрируемой ориентируемой римановой метрики на сфере имеет следующий вид: $m = 4k + 2$ для некоторого целого k .

СЛЕДСТВИЕ 1 (Т. З. Нгуен, Л. С. Полякова).

Невырожденно-интегрируемые и ориентируемые геодезические потоки на сфере содержатся внутри следующего “сетчатого подмножества” внутри RP^3 -области, изображенного на рис. 4 белыми, черными дисками и белыми дисками с точкой внутри. Здесь белые и черные диски изображают геодезические потоки с линейными и квадратичными интегралами, соответственно. Белые диски с точкой внутри изображают неизвестные на сегодняшний день (и, может быть, не существующие вовсе) интегрируемые римановы метрики.

Таким образом, как мы видим, “зона сложности всех интегрируемых ориентируемых метрик” практически совпадает с “зоной линейно-квадратично интегрируемых метрик”, за исключением прямой, лежащей на нижней границе угла на рис. 4. Чрезвычайно интересная задача – завершить исследование этой “специальной прямой” на границе (и, тем самым, дать окончательный ответ на сформулированный выше вопрос).

Утверждение, что $m = 4k$ (аналогичное сформулированной выше теореме), справедливо для произвольного невырожденно-интегрируемого геодезического потока римановой метрики на торе. Здесь число n – четно (см. выше). Поэтому, “1–2-зона интегрируемости” (изображающая на таблице сложности классических лиувиллевых интегрируемых 1–2-метриков на торе) покрывает по крайней мере “половину” области, соответствующей всем “математически возможным” интегрируемым геодезическим потокам (невырожденных ориентируемых метрик) на торе. На рис. 5 черные диски изображают лиувиллевы геодезические потоки на торе, а белые диски с точкой изображают неизвестные сегодня (и, быть может, вообще не существующие) интегрируемые геодезические потоки на торе.

§ 9. Геодезический поток эллипсоида топологически траекторно эквивалентен интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела

Помимо принципа Мопертюи существуют и другие способы устанавливать изомор-

физмы между разными динамическими системами.

В этом параграфе мы расскажем об одном таком новом способе, недавно разработанном А. В. Болсиновым и А. Т. Фоменко. Некоторые другие приемы и примеры изоморфизмов см., например, в [30]–[32].

Как хорошо известно, геодезический поток метрики, индуцированной на эллипсоиде в евклидовом пространстве R^3 , является вполне интегрируемой гамильтоновой системой [26] (Якоби).

Рассмотрим также другую известную интегрируемую систему – т.н. случай Эйлера в динамике твердого тела в R^3 . Мы доказываем, что *эти две динамические системы топологически траекторно эквивалентны*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Две гладкие динамические системы называются топологически (гладко) траекторно эквивалентными, если существует *гомеоморфизм (диффеоморфизм)* одного многообразия на другое, который переводит траектории первой системы в траектории второй системы с сохранением их ориентации (при этом не требуется, чтобы сохранялось время вдоль траекторий).

Вопрос о траекторной эквивалентности динамических систем обсуждался во многих работах.

Поскольку трехмерные поверхности уровня интегрируемого гамильтониана с двумя степенями свободы инвариантны относительно потока, достаточно изучить траекторную классификацию интегрируемых систем (с двумя степенями свободы) на трехмерных уровнях энергии. В дальнейшем, говоря о трехосном эллипсоиде мы будем всегда предполагать, что он не является поверхностью вращения. Аналогично, в случае твердого тела будем предполагать все его моменты инерции различными.

ТЕОРЕМА 15 (А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко [15]). *Интегрируемый случай Эйлера при нулевой постоянной площадей топологически траекторно эквивалентен интегрируемому геодезическому потоку трехосного эллипсоида (задача Якоби).*

Более подробно, это означает следующее.

а) Динамическая система, описывающая интегрируемый случай Эйлера при нулевой постоянной площадей (на трехмерном уровне энергии и вообще на всем четырехмерном симплектическом многообразии M^4 , являющемся кокасательным пучком к 2-сфере без нулевого сечения), топологически траекторно эквивалентна геодезическому потоку некоторого эллипсоида в трехмерном пространстве (задача Якоби) (соответственно, на трехмерном уровне энергии и вообще на всем кокасательном пучке к 2-сфере без нулевого сечения).

б) То есть, для каждого твердого тела случая Эйлера с фиксированным эллипсоидом инерции существует и притом единственный (с точностью до подобия) эллипсоид в трехмерном евклидовом пространстве, геодезический поток которого топологически траекторно эквивалентен заданной системе уравнений Эйлера, т.е. динамической системе, описывающей свободное вращение твердого тела вокруг его центра масс.

в) И наоборот, для геодезического потока любого эллипсоида в R^3 существует твердое тело, свободно вращающееся вокруг своего центра масс, эллипсоид инерции которого определен однозначно (с точностью до подобия) и такое, что описывающая это движение динамическая система уравнений Эйлера топологически траекторно эквивалентна исходному геодезическому потоку метрики эллипсоида в R^3 .

г) Явные формулы, связывающие квадраты полуосей a, b, c эллипсоида Якоби и главные моменты инерции $1/A, 1/B, 1/C$ траекторно эквивалентного ему твердого тела в случае Эйлера, получаются из следующих равенств:

$$\begin{aligned} -\frac{\int_{-b}^{-a} \Phi(u, c) du}{\int_0^{+\infty} \Phi(u, c) du} - 1 &= -\frac{C}{\sqrt{(C-A)(C-B)}}, \\ \frac{\int_{-c}^{-b} \Phi(u, a) du}{\int_0^{+\infty} \Phi(u, a) du} - 1 &= -\frac{A}{\sqrt{(C-A)(B-A)}}, \end{aligned}$$

где $\Phi(u, t) = \sqrt{\frac{u}{(u+a)(u+b)(u+c)(u+t)}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В классической теории реального твердого тела главные моменты инерции удовлетворяют неравенствам треугольника. Однако уравнения Эйлера–Пуассона имеют смысл для произвольных моментов инерции. Поэтому мы не будем ограничивать “запас твердых тел” неравенствами треугольника и рассмотрим всевозможные тройки чисел $1/A, 1/B, 1/C$, удовлетворяющие лишь одному условию: $1/A > 1/B > 1/C$. Эти же уравнения Эйлера–Пуассона описывают геодезические на сфере Пуассона и имеют смысл для любых $1/A > 1/B > 1/C$.

Эти результаты являются следствиями общей теории траекторной классификации невырожденных интегрируемых систем с двумя степенями свободы на трехмерных уровнях энергии, развитой Болсиновым и Фоменко в [28], [29].

Система называется *невырожденной*, если она обладает (на данном уровне энергии) *боттовским интегралом*, т.е. критические точки интеграла организованы в невырожденные критические подмногообразия. Теория основана на изучении новых топологических инвариантов (грубых молекул и меченых молекул) интегрируемых систем, открытых в серии работ А. Т. Фоменко, Х. Цишанга, А. В. Болсинова, С. В. Матвеева [1]–[3]. Идея теории состоит в том, чтобы сопоставить каждой интегрируемой системе некоторый инвариант, являющийся в действительности графом с метками и названный нами t -молекулой. Центром теории является утверждение о том, что две интегрируемые невырожденные системы топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им t -молекулы совпадают. Оказывается далее, что во многих конкретных задачах эти инварианты можно успешно вычислить, что и приводит к результатам, сформулированным выше.

После обнаружения непрерывной (т.е. топологической) траекторной эквивалентности систем Эйлера и Якоби возникает естественный вопрос – а не являются ли они топологически *сопряженными*, т.е. точно эквивалентными? Может быть, существует гомеоморфизм одного пространства на другое, который переводит точное решение в точное решение (с сохранением времени).

Оказывается, это не так.

Прежде всего поясним, что задача Эйлера и задача Якоби являются трехпараметрическими. Геодезический поток эллипсоида определяется тремя квадратами его полуосей a, b, c , а система Эйлера – тремя главными моментами инерции твердого тела $1/A, 1/B, 1/C$. Если для эллипсоида $a = b = c$, то получается сфера. Если же для твердого тела $1/A = 1/B = 1/C$, то мы имеем дело с твердым шаром. Легко видеть, что в этом случае обе системы просто совпадают.

ТЕОРЕМА 16 (О. Е. Орел). *Геодезический поток любого трехосного (т.е. отличного от сферы) эллипсоида, ограниченный на любое трехмерное многообразие постоянной энергии, топологически не сопряжен никакой динамической системе Эйлера твердого тела.*

Идея доказательства теоремы Орел состоит в следующем. Нужно подсчитать и сравнить некоторые инварианты исследуемых динамических систем.

Как было показано в работах Болсинова и Фоменко [15], [28], [29], топологический орбитальный тип интегрируемой системы в данном случае полностью определяется двумя инвариантами k и l для задачи Якоби и соответственно инвариантами K и L для задачи Эйлера. Дело в том, что каждая из сравниваемых нами динамических систем имеет по две периодические устойчивые траектории. Инварианты k и l являются пределами чисел вращения динамической системы при стремлении торов Лиувилля к этим траекториям (в пределе тор вырождается и превращается в окружность). В задаче Якоби эти периодические траектории имеют ясный геометрический смысл. Они отвечают двум замкнутым устойчивым геодезическим, являющимся экваториальными плоскими сечениями эллипсоида в направлениях, перпендикулярных его наибольшей и наименьшей полуосям. А в случае задачи Эйлера аналогичные периодические траектории отвечают вращениям твердого тела вокруг его максимальной и минимальной осей инерции. Здесь соответствующие пределы чисел вращения дают нам инварианты K и L .

Отметим, что инварианты k, l и K, L являются функциями от параметров a, b, c и A, B, C , соответственно. При этом соотношения, выписанные выше и устанавливающие связь между параметрами “траекторно эквивалентных” между собой эллипсоида и твердого тела, означают в точности, что

$$k(a, b, c) = K(A, B, C) \quad \text{и} \quad l(a, b, c) = L(A, B, C).$$

Но поскольку сейчас нас интересует проблема сравнения этих двух систем с точки зрения их сопряженности, следует добавить к двум упомянутым выше инвариантам по крайней мере еще три новых инварианта. Таковыми являются периоды трех замкнутых особых траекторий. Две из них были описаны выше. Нужно добавить к ним еще одну периодическую *неустойчивую* траекторию – гиперболическую геодезическую на эллипсоиде и соответственно неустойчивое вращение твердого тела вокруг средней оси инерции. Обозначим эти три дополнительных инварианта через t_1, t_2, t_3 для задачи Якоби и через T_1, T_2, T_3 для задачи Эйлера. В результате топологический класс сопряженности системы Якоби определяется набором инвариантов, заведомо включающих в себя следующие пять чисел:

$$k, l, t_1, t_2, t_3,$$

а для системы Эйлера, соответственно:

$$K, L, T_1, T_2, T_3.$$

Полезно привести явные выражения для периодов замкнутых траекторий в задачах Эйлера и Якоби.

В задаче Якоби период замкнутой геодезической просто равен ее длине. Поэтому для периодов в задаче Якоби получаем:

$$\begin{aligned} t_1 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a \cos^2 t + b \sin^2 t} dt, \\ t_2 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a \cos^2 t + c \sin^2 t} dt, \\ t_3 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{b \cos^2 t + c \sin^2 t} dt. \end{aligned}$$

В случае задачи Эйлера периоды движения по трем замкнутым траекториям имеют такой вид:

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{2}{C}}, \quad T_2 = \pi \sqrt{\frac{2}{B}}, \quad T_3 = \pi \sqrt{\frac{2}{A}}.$$

В обоих случаях мы предполагаем, что энергия H равна 1, т.е. что уровень энергии для обеих задач фиксирован.

Поскольку задача Якоби является трехпараметрической, то, сопоставляя каждому трехосному эллипсоиду указанные выше пять чисел, мы получим гладкое отображение трехмерного множества всех трехосных эллипсоидов в *пятимерное* евклидово пространство. В результате получим некоторую 3-поверхность в R^5 . Обозначим ее через J^3 . Поступая по той же схеме для случая Эйлера, мы также получаем некоторую 3-поверхность E^3 в том же пятимерном пространстве R^5 .

Чтобы доказать топологическую несопряженность задач Эйлера и Якоби, достаточно убедиться, что эти две трехмерные поверхности *не пересекаются* в R^5 за исключением одной точки, отвечающей случаю $a = b = c$ и $A = B = C$, т.е. случаю стандартной 2-сферы.

После некоторых аналитических преобразований эта задача сводится к следующему вопросу: пересекаются ли на двумерной плоскости некоторые две гладкие кривые. Обе они выходят из одной точки, отвечающей случаю $a = b = c$ (в задаче Якоби) и случаю $A = B = C$ (в случае Эйлера). Теорема 16 следует из аналитически проверяемого факта, что эти две кривые *не пересекаются* (за исключением той точки, из которой они обе выходят).

Наконец, возникает еще один естественный вопрос: будут ли *задача Якоби и случай Эйлера гладко траекторно эквивалентны?*

Эта задача была полностью решена А. В. Болсиновым. Ответ следующий: задачи Эйлера и Якоби *гладко траекторно не эквивалентны*.

Этот ответ получается так. Нужно воспользоваться построенной А. В. Болсиновым [33] теорией гладкой траекторной классификации интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. А именно, следует подсчитать гладкие инварианты рассматриваемых систем и затем сравнить их.

Оказывается, достаточно рассмотреть только один гладкий инвариант. Каждая из двух сравниваемых нами систем (Эйлера и Якоби) имеет по одной неустойчивой гиперболической замкнутой траектории (с точностью до изменения на противоположное направления движения). В действительности их две, если мы учтем *направление* движения по гиперболической окружности. Эта гиперболическая траектория имеет естественный гладкий траекторный инвариант – мультипликатор. Это собственное

значение дифференциала отображения Пуанкаре. Для двух наших систем (Эйлера и Якоби) эти мультипликаторы можно вычислить явно.

Нам удобнее указать здесь не сам мультипликатор λ , а обратную величину его логарифма.

Для случая Эйлера и задачи Якоби мы обозначим этот инвариант через $M(A, B, C)$ и $m(a, b, c)$ соответственно. Они выглядят так:

$$M(A, B, C) = -\frac{1}{\pi} \frac{B}{\sqrt{(C-B)(B-A)}},$$

$$m(a, b, c) = -\frac{\sqrt{\frac{b}{(c-b)(b-a)}}}{\int_0^{+\infty} \Phi(u, b) du}.$$

Рассмотрим теперь две двумерные поверхности в трехмерном пространстве R^3 , которое мы интерпретируем как пространство значений инвариантов:

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{array}{l} x = K(A, B, C) \\ y = L(A, B, C) \\ z = M(A, B, C) \end{array} \right\}, \quad \mathcal{J} = \left\{ \begin{array}{l} x = k(a, b, c) \\ y = l(a, b, c) \\ z = m(a, b, c) \end{array} \right\}.$$

Эти поверхности являются образами отображений пространств параметров в пространство инвариантов.

Зная взаимное расположение этих поверхностей, мы можем сделать некоторые выводы.

Если поверхности вообще не пересекаются, то заведомо не существует ни одной пары (твердое тело, эллипсоид), для которой соответствующие динамические системы были бы гладко эквивалентны (даже в смысле C^1 -гладкости, поскольку M и m являются, как нетрудно видеть, C^1 -инвариантами).

Если поверхности совпадают, то это служит веским аргументом в пользу возможной гладкой эквивалентности рассматриваемых систем. Поскольку такое совпадение вряд ли может быть случайным. Разумеется, исследование должно быть в этом случае продолжено: мы должны будем сравнить все остальные гладкие инварианты.

Если поверхности пересекаются по какой-нибудь кривой, то это означает, что рассматриваемые системы, как правило, гладко не эквивалентны. Но существуют некоторые “исключительные” пары (твердое тело, эллипсоид), для которых происходит совпадение по крайней мере трех инвариантов. На самом деле, мы должны были бы затем сравнить для этих исключительных пар все остальные гладкие инварианты. Впрочем, в такой ситуации было бы естественно перейти к изучению вопроса о C^1 -эквивалентности. Можно показать, что помимо описанных выше трех инвариантов, имеется еще ровно один C^1 -инвариант. Для полного ответа на этот вопрос нам было бы достаточно проанализировать взаимное расположение двух двумерных поверхностей в четырехмерном пространстве инвариантов. Их точки пересечения соответствовали бы парам C^1 -эквивалентных систем.

Такова возможная общая схема анализа, которая может быть применена и в других ситуациях. В рассматриваемом нами случае, ввиду достаточной сложности явных формул, А. В. Болсинов провел компьютерное исследование задачи совместно с проф. Холгером Дуллином (Институт теоретической физики, Университет г. Бремена, ФРГ).

При помощи компьютера были построены поверхности \mathcal{E} (случай Эйлера) и \mathcal{J} (задача Якоби). Выяснилось, что качественное поведение этих поверхностей очень похоже. Обе они являются графиками некоторых функций $z = z_{\mathcal{E}}(x, y)$ и $z = z_{\mathcal{J}}(x, y)$.

Численное исследование показывает, что поверхности \mathcal{E} (случай Эйлера) и \mathcal{J} (задача Якоби) не пересекаются: разность $z_{\mathcal{E}}(x, y) - z_{\mathcal{J}}(x, y)$ всегда остается отрицательной, асимптотически приближаясь к нулю при уходе поверхностей на бесконечность.

Разумеется, этот способ является лишь численным экспериментом, на основании которого нельзя сформулировать полученный результат в виде строго доказанной теоремы (возможно поверхности пересекаются где-то вдалеке). Однако, заведомо строгим результатом является то, что эти две поверхности не совпадают. Это в точности означает, что непрерывно траекторно эквивалентные пары (твердое тело, эллипсоид), как правило, гладко эквивалентными не являются (даже в смысле C^1 -эквивалентности).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Fomenko A. T. Topological Classification of all Hamiltonian Differential Equations of General Type with Two Degrees of Freedom // The Geometry of Hamiltonian Systems. Proceedings of a Workshop Held June 5-16, 1989. Berkeley. New York: Springer-Verlag, 1991. P. 131-339.
- [2] Fomenko A. T. Integrability and Nonintegrability in Geometry and Mechanics. Dordrecht: Kluwer 1988.
- [3] Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // УМН. 1990. Т. 45. №2. С. 49-77.
- [4] Selivanova E. N. Topological classification of integrable Bott geodesic flows on the two-dimensional torus // Advances in Soviet Mathematics. Amer. Math. Soc. 1991. V. 6. P. 209-228.
- [5] Nguen T. Z., Polyakova L. S. A topological classification of integrable geodesic flows of the two-dimensional sphere with quadratic in momenta additional integral // Journ. Nonlinear Sciences. 1992. V. 6. P. 85-108.
- [6] Fomenko A. T., Nguen T. Z. Topological classification of integrable nondegenerate Hamiltonians on the isoenergy three-dimensional sphere // Advances in Soviet Mathematics. Amer. Math. Soc. 1991. V. 6. P. 267-296.
- [7] Nguen T. Z. On the complexity of integrable Hamiltonian systems on three-dimensional isoenergy submanifolds // Advances in Soviet Mathematics. Amer. Math. Soc. 1991. V. 6. P. 229-255.
- [8] Kalashnikov V. V. (junior). Description of the structure of Fomenko invariants on the boundary and inside Q -domains, estimates of their number on the lower boundary for the manifolds S^3 , RP^3 , $S^1 \times S^2$, and T^3 // Advances in Soviet Mathematics. Amer. Math. Soc. 1991. V. 6. P. 297-304.
- [9] Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.-Л.: Гостехиздат, 1941.
- [10] Колокольцов В. Н. Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. №5. С. 994-1010.
- [11] Bolsinov A. V. Methods of calculation of the Fomenko-Zieschang invariant // Advances in Soviet Math. Amer. Math. Soc. 1991. V. 6. P. 147-183.
- [12] Oshemkov A. A. Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations // Advances in Soviet Math. Amer. Math. Soc. 1991. V. 6. P. 67-146.
- [13] Бялый М. Л. О полиномиальных по импульсам первых интегралах для механической системы на двумерном торе // Функциональный анализ и его прил. 1987. Т. 21. №4. С. 64-65.

- [14] Козлов В. В., Трещев Д. В. Об интегрируемости гамильтоновых систем с торическим пространством положений // Матем. сб. 1988. Т. 135 (177). № 1. С. 119–138.
- [15] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Геодезический поток эллипсоида траекторно эквивалентен интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела // ДАН. 1994. Т. 339.
- [16] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Геодезические потоки на сфере с интегралами непонижаемой степени 3 и 4, порожденные случаями Горячева–Чаплыгина и Ковалевской // Матем. заметки. 1994.
- [17] Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969.
- [18] Козлов В. В. Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // ДАН СССР. 1979. Т. 249. № 6. С. 1299–1302.
- [19] Kozlov V. V. Integrable and Nonintegrable Hamiltonian systems // Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys. 1988. V. 8. P. 1–81.
- [20] Козлов В. В., Денисова Н. В. Полиномиальные интегралы геодезических потоков на торе // Матем. сб. (в печати).
- [21] Козлов В. В., Денисова Н. В. Симметрии и топология динамических систем с двумя степенями свободы // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 9. С. 125–148.
- [22] Окунева Г. Г. Некоторые геометрические свойства приведенного многообразия положений в динамике твердого тела // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1986. № 4. С. 55–59.
- [23] Новиков С. П. Вариационные методы и периодические решения уравнений типа Кирхгофа. II // Функ. анализ и приложения. 1981. Т. 15. № 4. С. 37–52.
- [24] Новиков С. П. Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // УМН. 1992. Т. 37. № 5.
- [25] Смоленцев. О принципе Мопертюи // Сиб. матем. журн. 1979. Т. 20. № 5.
- [26] Якоби К. Лекции по динамике. М.–Л., 1936.
- [27] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Траекторная классификация интегрируемых систем типа Эйлера в динамике твердого тела // УМН. 1993. Т. 48. № 5. С. 163–164.
- [28] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Траекторная эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Теорема классификации. I // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 4. С. 27–80; II // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 5. С. 27–28.
- [29] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Траекторная классификация простых интегрируемых систем на трехмерных поверхностях постоянной энергии // ДАН. 1993. Т. 332. № 5. С. 553–555.
- [30] Adler M., van Moerbeke P. The Kowalewski and Henon–Heiles motions as Manakov geodesic flows on $SO(4)$. A two-dimensional family of Lax pairs // Comm. Meth. Phys. 1988. V. 113. № 4. P. 659–700.
- [31] Knorrer H. Geodesics on quadrics and a mechanical problem of C. Neumann // J. Reine Angew. Math. 1982. V. 334. P. 69–78.
- [32] Veselov A. P. Two remarks about the connection of Jacobi and Neumann integrable systems // Math. Zeitschrift. 1994. V. 216. P. 337–345.
- [33] Болсинов А. В. Гладкая траекторная классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 1. С. 3–28.