ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 59, Вып. 1, 1995

УДК 531.01

© 1995 г. В.В. Козлов

НЕКОТОРЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ЗАДАЧИ ЯКОБИ О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ НА ЭЛЛИПСОИДЕ

Рассматривается задача о движении точки по поверхности n-мерного эллипсоида в потенциальном силовом поле. Показано, что если слагаемые потенциальной энергии обратно пропорциональны второй степени расстояний до $(n-1)$-мерных плоскостей симметрий эллипсоида, то эта задача явно интегрируется методом разделения переменных с использованием эллиптических координат Якоби. Она имеет n независимых коммутирующих интегралов, квадратичных по импульсам. При $n = 2$ дополнительный интеграл указан в явном виде с использованием избыточных координат. В пределе, когда меньшая полуось стремится к нулю, получается новая интегрируемая биллиардная задача внутри эллипса. Обсуждаются обобщения этих результатов для пространства постоянной ненулевой кривизны.

1. Основной результат. Как известно [1], Якоби ввел эллиптические координаты в многомерном евклидовом пространстве и с их помощью решил ряд нетривиальных задач динамики. Среди них – знаменитая задача о движении по поверхности n-мерного эллипсоида. Траектории материальной точки, движущейся по инерции, совпадают с геодезическими линиями. Более того, Якоби проинтегрировал методом разделения переменных и более общую задачу, когда на точку действует упругая сила, центр которой совпадает с центром эллипсоида.

Пусть $\mathbf{R}^{n+1}$ – евклидово пространство с декартовыми координатами $x_0, x_1,..., x_n$. Рассмотрим в $\mathbf{R}^{n+1}$ n-мерный эллипсоид

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{x_s^2}{a_s^2}=1 \tag{1.1}$$

причем $a_0 < a_1 < ... < a_n$.

Теорема 1. Задача о движении по эллипсоиду (1.1) под действием потенциальных сил с потенциальной энергией

$$V=\frac{k}{2}\sum_{s=0}^{n}x_s^2+\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\alpha_\nu}{x_\nu^2};\quad k,\alpha_\nu=\mathrm{const} \tag{1.2}$$

вполне интегрируема.

Если $\alpha_0 = ... = \alpha_n = 0$, то получаем классический результат Якоби [1]: потенциал (1.2) порождает поле упругих сил, центр которых совпадает с началом координат.

Отметим одно интересное свойство потенциала (1.2) (ср. с [2]). С этой целью рассмотрим движение частицы в $\mathbf{R}^{n+1}$ без связи (1.1) под действием потенциальной силы с компонентами $-\partial V/\partial x_\nu$. Эта задача легко решается с учетом разделения декартовых координат. Оказывается, все ограниченные траектории замкнуты. Этот факт, правда, нуждается в уточнении: следует исключить траектории, попадающие за конечное время на координатные гиперплоскости, где функция (1.2) имеет сингулярности.

Теорема 1 справедлива и в том случае, когда числа $a_0,..., a_n$ имеют разные знаки. В этом случае уравнение (1.1) задает гиперболоид в $\mathbf{R}^{n+1}$. Кроме того, свойство полной интегрируемости сохранится и для эллипсоидов вращения, когда среди $a_0,..., a_n$ найдутся равные числа. Наиболее интересен частный случай, когда $a_0 = ... = a_n = a$. Тогда эллипсоид (1.1) будет сферой $\mathbf{S}^n$ радиуса $a^{1/2}$. Поскольку первое слагаемое в (1.2) постоянно на $\mathbf{S}^n$, то оно не оказывает никакого влияния на динамику частицы.

Интегрируемость задачи о движении по двумерной сфере в силовом поле с потенциалом вида (1.2) указана в [3]. Там же отмечено, что для потенциалов

$$\alpha_\nu / x_\nu^2; \quad \nu = 0,1,...,n \tag{1.3}$$

почти все орбиты на $\mathbf{S}^n$ замкнуты. Функции (1.3) – аналоги потенциала упругой пружины в пространстве постоянной положительной кривизны (один из концов пружины закреплён в точке с координатами $x_s = 0$ $(s \neq \nu)$, $x_\nu = \pm 1$). Как заметил Ю.Н. Фёдоров, задача о движении точки по n-мерной сфере с потенциальной энергией (1.2) допускает $n(n + 1)/2$ квадратичных интегралов

$$I_{ij} = (\dot{x}_i x_j - x_i \dot{x}_j)^2 + 2\alpha_i x_j^2 / x_i^2 + 2\alpha_j x_i^2 / x_j^2, \quad i,j = 0,1,...,n$$

Так как среди них $2n - 1$ независимых, то орбиты с почти всеми начальными данными замкнуты.

2. Разделение переменных. Эллипсоид (1.1) можно включить в семейство конфокальных квидрик в $\mathbf{R}^{n+1}$.

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{x_s^2}{a_s - \lambda} = 1$$

Это алгебраическое уравнение относительно λ имеет ровно $n + 1$ вещественных корней

$$\lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_n \tag{2.1}$$

причём $a_{s-1} < \lambda_s < a_s$ $(s \geqslant 1)$, $\lambda_0 < a_1$. Числа (2.1) – эллиптические координаты в $\mathbf{R}^{n+1}$. Они связаны с декартовыми координатами следующими формулами:

$$x_\nu^2 = \prod_{s=0}^{n}(a_\nu - \lambda_s) / \prod_{s \neq \nu}(a_\nu - a_s) \tag{2.2}$$

Зафиксируем значение переменной λ_0; например, положим $\lambda_0 = 0$. Тогда получим эллипсоид (1.1). Остальные координаты $\lambda_1,..., \lambda_n$ будут лагранжевыми координатами задачи о движении частицы единичной массы по поверхности (1.1). Пусть $\mu_1,..., \mu_n$ – сопряжённые импульсы. Известна формула для кинетической энергии [1]:

$$T = 2\sum_{s=1}^{n} \frac{\mu_s^2}{M_s(\lambda)}, \quad M_s = -\lambda_s \prod_{\nu \neq s} \frac{\lambda_s - \lambda_\nu}{A(\lambda_s)}$$
$$A(z) = (z - a_0)(z - a_1)...(z - a_n) \tag{2.3}$$

В выражении (1.2) для простоты записи опустим первое слагаемое. Его легко учесть с помощью формул разделения переменных, указанных Якоби в [1]. Используя (2.2), получим выражение потенциальной энергии (1.2) через эллиптические координаты:

$$V = \sum_{s=1}^{n} \frac{\beta_s}{(a_s - \lambda_1)...(a_s - \lambda_n)} \tag{2.4}$$

где $\beta_0, \ldots, \beta_n$ – некоторые новые постоянные. Воспользуемся тождеством

$$\frac{1}{(a_s-\lambda_1)\ldots(a_s-\lambda_n)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\gamma_j}{a_s-\lambda_j}, \qquad \gamma_j=\left(\prod_{\nu\neq j}(\lambda_j-\lambda_\nu)\right)^{-1} \tag{2.5}$$

которое просто выводится с помощью теоремы о вычетах. Используя (2.4) и (2.5), получаем окончательно

$$V=\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{\beta_j\gamma_s}{a_j-\lambda_s} \tag{2.6}$$

Итак, согласно (2.3) и (2.6),

$$\sum_{s=1}^{n}\left[-2\mu_s^2\frac{A(\lambda_s)}{\lambda_s}+\sum_{j=0}^{n}\frac{\beta_j}{a_j-\lambda_s}\right]\gamma_s=\sum_{s=1}^{n}[F_0+F_1\lambda_s+\ldots+F_{n-1}\lambda_s^{n-1}]\gamma_s \tag{2.7}$$

где $F_{n-1}=T+V$ – полная энергия. Согласно Якоби [1], выражение справа равно как раз F_{n-1}. Применяя общий принцип разделения переменных, приравниваем выражения в квадратных скобках в (2.7) при $s=1,\ldots,n$. Так как $\lambda_k\neq\lambda_l$ при $k\neq l$, то из получившейся линейной системы можно найти $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ как квадратичные функции по импульсам. При этом, конечно, F_{n-1} – полная энергия. Остальные функции $F_0, \ldots, F_{n-2}$ – коммутирующие интегралы рассматриваемой задачи.

Следовательно, задача о движении по n-мерному эллипсоиду с потенциалом (1.2) имеет n независимых интегралов в инволюции $F_0, \ldots, F_{n-1}$. По теореме Лиувилля (см., например, [2]), она вполне интегрируема. Теорема 1 доказана.

С помощью упомянутой линейной системы можно выписать дифференциальные уравнения для отыскания эллиптических координат:

$$\begin{gathered}\dot\lambda_s=\partial H/\partial\mu_s=\pm4\gamma_s\sqrt{\Phi(\lambda_s)/(2\lambda_s)}\\ \Phi(z)=A(z)[-F_0-\ldots-F_{n-1}z^{n-1}+\sum\beta_j/(a_j-z)]\end{gathered} \tag{2.8}$$

При учете формулы для A, заключаем, что $\Phi(z)$ – многочлен от z степени $2n$. Система (2.8) имеет вид уравнений типа Абеля–Ковалевской.

Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби для рассматриваемой задачи имеет вид

$$W=-F_{n-1}t+\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{\Phi(\lambda_s)}{\lambda_s}}d\lambda_s$$

Роль n произвольных параметров $c_1, \ldots, c_n$ играют постоянные n независимых интегралов $F_0, \ldots, F_{n-1}$. Общее решение уравнений (2.8) находится из соотношений Якоби

$$\partial W/\partial c_i=b_i, \quad b=\text{const}; \quad i=1,\ldots,n$$

3. Случай двух степеней свободы. При $n=2$ можно в явном виде указать дополнительный квадратичный интеграл. Пусть x, y, z – декартовы координаты в $\mathbf{R}^3$ и

$$x^2/a+y^2/b+z^2/c=1 \tag{3.1}$$

– уравнение эллипсоида. Как показал Иоахимсталь (см., например, [4]), для движения по инерции интегралом служит функция

$$I=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{\dot x^2}{a}+\frac{\dot y^2}{b}+\frac{\dot z^2}{c}\right) \tag{3.2}$$

Рассмотрим движение частицы единичной массы под действием силы с потенциальной энергией вида (1.2)

$$V=\frac{k}{2}(x^2+y^2+z^2)+\frac{\alpha}{2x^2}+\frac{\beta}{2y^2}+\frac{\gamma}{2z^2} \tag{3.3}$$

Будем искать интеграл уравнений движения

$$x^{\cdot\cdot}=\lambda x/a-V_x,\quad y^{\cdot\cdot}=\lambda y/b-V_y,\quad z^{\cdot\cdot}=\lambda z/c-V_z \tag{3.4}$$

в виде суммы $F=I+f$, где f – пока неизвестная функция от x, y, z.

Из (3.1) и (3.4) находится множитель Лагранжа λ как функция состояния частицы:

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\lambda=\frac{x}{a}V_x+\frac{y}{b}V_y+\frac{z}{c}V_z-\frac{x^{\cdot 2}}{a}-\frac{y^{\cdot 2}}{b}-\frac{z^{\cdot 2}}{c}$$

Так как функция (3.2) – интеграл уравнений движения по инерции, то в выражении $F^{\cdot}$ совокупность слагаемых третьей степени по скоростям $x^{\cdot}$, $y^{\cdot}$, $z^{\cdot}$ обращается в нуль. Уравнение $F^{\cdot}=0$ принимает следующий явный вид:

$$2\left(\frac{x}{a}V_x+\frac{y}{b}V_y+\frac{z}{c}V_z\right)=\left(\frac{xx^{\cdot}}{a^2}+\frac{yy^{\cdot}}{b^2}+\frac{zz^{\cdot}}{c^2}\right)-$$

$$-2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{x^{\cdot}}{a}V_x+\frac{y^{\cdot}}{b}V_y+\frac{z^{\cdot}}{c}V_z\right)+f_x x^{\cdot}+f_y y^{\cdot}+f_z z^{\cdot}=0 \tag{3.5}$$

Если приравнять нулю коэффициенты при $x^{\cdot}$, $y^{\cdot}$, $z^{\cdot}$, то получим систему трёх уравнений в частных производных:

$$2\left(\frac{x}{a}V_x+\frac{y}{b}V_y+\frac{z}{c}V_z\right)\frac{x}{a^2}-2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{V_x}{a}=-f_x,\ \ldots \tag{3.6}$$

Для сингулярной части потенциала (3.3) эта система легко решается:

$$f=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{\alpha}{ax^2}+\frac{\beta}{by^2}+\frac{\gamma}{cz^2}\right) \tag{3.7}$$

Однако, если подставить в (3.6) функцию $V=k(x^2+y^2+z^2)/2$, то получим несовместимую систему уравнений. На самом деле здесь нет никакого противоречия. Дело в том, что для упругого потенциала второе слагаемое в (3.5) обращается в нуль ввиду тождества

$$xx^{\cdot}/a+yy^{\cdot}/b+zz^{\cdot}/c=0$$

В связи с чем в (3.6) следует опустить вторые слагаемые. После этого, с учётом (3.1) находим решение

$$f=-k(x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2) \tag{3.8}$$

Суммируя (3.2), (3.7) и (3.8), получаем окончательный результат

$$F=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{x^{\cdot 2}}{a^2}+\frac{y^{\cdot 2}}{b^2}+\frac{z^{\cdot 2}}{c^2}-k+\frac{\alpha}{ax^2}+\frac{\beta}{by^2}+\frac{\gamma}{cz^2}\right)$$

4. Интегрируемый биллиард. Предполагая справедливыми неравенства $c < b \leqslant a$, устремим в уравнении (3.1) квадрат малой полуоси c к нулю. Естественно ожидать, что в пределе получим задачу о движении точки внутри эллипса

$$x^2 / a + y^2 / b = 1 \tag{4.1}$$

которая упруго отражается от этой кривой.

В отсутствие внешних сил такой предельный переход впервые осуществил Биркгоф [5] (см. также [6]). Характерное свойство биллиарда Биркгофа заключается в следующем: прямолинейные отрезки каждой траектории (или их продолжения) касаются одной и той же коники, софокусной эллипсу (4.1).

Как показано в [7], добавление притягивающей или отталкивающей упругой силы с центром в начале координат также приводит к интегрирующей биллиардной задаче. Её качественный анализ (включая построение бифуркационных диаграмм) содержится в [8].

Было показано [9], что после преобразования Болина эта задача перейдёт в биллиардную задачу о движении частицы под действием гравитационной силы, направленной к фокусу эллипса (4.1). В частности, гравитационный эллиптический биллиард также является интегрируемой динамической системой.

Устремим теперь малую полуось эллипсоида (3.1) к нулю в более общей задаче о движении частицы в поле с потенциалом (3.7). Ясно, что при $c \to 0$ координата z также стремится к нулю. Чтобы избежать сингулярности при $z = 0$, положим в (3.7) $\gamma = 0$.

Можно показать, что существует

$$\lim_{c\to 0} cF|_{x,y} = \frac{\dot{x}^2}{a} + \frac{\dot{y}^2}{b} - \frac{(\dot{x}y - x\dot{y})^2}{ab} + \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\left(-k + \frac{\alpha}{ax^2} + \frac{\beta}{by^2}\right) \tag{4.2}$$

Правая часть этого равенства – квадратичный по скоростям интеграл биллиарда внутри эллипса (4.1). Следовательно, предельная задача интегрируемая. Траектории частицы внутри эллипса состоят из дуг конических сечений. Этот результат можно обобщить. Справедлива

Теорема 2. Упругий биллиард внутри эллипса (4.1) с потенциалом

$$V = \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\alpha}{2x^2} + \frac{\beta}{2y^2} + \frac{\gamma_1}{r_1} + \frac{\gamma_2}{r_2} \tag{4.3}$$

где k, α, β, γ_1, γ_2 – постоянные, r_1, r_2 – расстояния от фокусов эллипса до частицы – интегрируемая динамическая система.

Доказательство использует метод разд. 3. Биллиард в эллипсе с упругими отражениями – система с двумя степенями свободы. Она допускает интеграл энергии $(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 + V$. Дополнительный интеграл будем искать в виде (ср. с (4.2))

$$F = \dot{x}^2 / a + \dot{y}^2 / b - (\dot{x}y - x\dot{y})^2 / (ab) + f(x,y)$$

Квадратичная по скоростям составляющая этой функции – интеграл биллиарда Биркгофа. Следовательно, она не изменится в момент упругого удара (величина скорости не меняется и угол падения равен углу отражения). Поэтому функцию f надо искать из условия постоянства F на фазовых траекториях "свободной" системы

$$\ddot{x} = -V_x, \quad \ddot{y} = -V_y$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\dot{x}$, $\dot{y}$ в уравнении $\dot{F} = 0$, приходим к системе двух уравнений в частных производных

$$\frac{2V_x}{a} - \frac{2y}{ab}(yV_x - xV_y) = f_x, \quad \frac{2V_y}{b} + \frac{2x}{ab}(yV_x - xV_y) = f_y$$

Ввиду равенства $f_{xy}=f_{yx}$ получаем искомое уравнение второго порядка в частных производных на потенциал:

$$(a-b)V_{xy}+3(yV_x-xV_y)+(y^2-x^2)V_{xy}+xy(V_{xx}-V_{yy})=0 \tag{4.4}$$

Каждому его решению отвечает интегрируемый биллиард в эллипсе (4.1). Ясно, что $a-b$ равно квадрату расстояния от фокуса до центра эллипса. Для завершения доказательства остаётся проверить, что каждое слагаемое в (4.3) удовлетворяет уравнению (4.4).

5. Некоторые обобщения. Пусть $\mathbf{R}^{n+2}$ – евклидово пространство с декартовыми координатами $x_1,\dots,x_{n+2}$ и

$$\mathbf{S}^{n+1}=\left\{x\colon \sum_{\nu=1}^{n+2}x_\nu^2=1\right\} \tag{5.1}$$

– $(n+1)$-мерная сфера, метрика которой имеет постоянную положительную кривизну. Рассмотрим в $\mathbf{R}^{n+2}$ ещё $(n+1)$-мерный конус с вершиной в начале координат, задаваемый уравнением

$$\sum_{\nu=1}^{n+2}\frac{x_\nu^2}{a_\nu-z}=0 \tag{5.2}$$

где $a_1<a_2<\dots<a_{n+2}$, $z\neq a_\nu$ и $a_1<z<a_{n+2}$. Конус (5.2) пересекает сферу (5.1) по n-мерной поверхности E^n – естественному аналогу эллипсоида в пространстве постоянной кривизны.

Как и в случае плоского пространства, задача о геодезических на E^n – вполне интегрируемая гамильтонова система. Этот результат фактически был известен Якоби [1]. Геометрические и аналитические аспекты задачи о геодезических на E^n обсуждаются в [10]. Эта обобщённая задача Якоби решается методом разделения переменных с использованием сфероконических координат; они определяются как корни уравнения (5.2) $z_1,\dots,z_{n+1}$, разделяющие числа $a_1,\dots,a_{n+2}$. Переменные z_k – лагранжевы координаты на сфере $\mathbf{S}^{n+1}$. Декартовы координаты x выражаются через z с использованием уравнения сферы (5.1).

Как уже говорилось, задача о движении по инерции по поверхности эллипсоида в плоском пространстве останется вполне интегрируемой, если добавить упругую силу, линия действия которой постоянно проходит через центр симметрии эллипсоида [1]. Естественным аналогом этого результата Якоби является

Теорема 3. Задача о движении по эллипсоиду $E^n\subset\mathbf{S}^{n+1}$ под действием сил с потенциалом

$$V=\sum_{\nu=1}^{n+2}\alpha_\nu/x_\nu^2 \tag{5.3}$$

вполне интегрируема.

Для того чтобы выяснить геометрический смысл потенциала (5.3), рассмотрим движение точки по $\mathbf{S}^{n+1}$ под действием потенциальной силы, потенциал которой зависит от расстояния до некоторого центра (точки на $\mathbf{S}^{n+1}$) – аналог центрального движения в плоском евклидовом пространстве. В качестве расстояния можно принять угловую координату ϑ на большом круге, отсчитываемую от указанного центра. В [11] решена обобщённая задача Бертрана: найти все потенциалы, для которых почти все орбиты замкнуты. Оказывается, эта задача (как и в пространстве нулевой кривизны) имеет всего два решения

$$V=\alpha\operatorname{ctg}\vartheta,\quad V=\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\vartheta;\quad \alpha,\beta=\mathrm{const} \tag{5.4}$$

Первое из них – аналог ньютоновского потенциала; эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа–Бельтрами на S^3 [3]. Второе решение – аналог потенциала упругой пружины.

Можно показать, что если центры упругого притяжения или отталкивания поместить в точки S^{n+1} с координатами

$$(\pm 1, 0,..., 0),..., (0,..., 0, \pm 1)$$

то с точностью до несущественной аддитивной постоянной потенциал силового поля будет иметь вить (5.3). Одна из этих точек совпадает с центром эллипсоида E^n.

Теорема 3 доказывается с помощью сфероконических координат. Разделение переменных проводится по схеме, изложенной в разд. 2.

С теоремой 3 связаны некоторые новые интегрируемые биллиардные задачи. Рассмотрим движение частицы по сфере S^{n+1} внутри (или вне) эллипсоида E^n под действием сил с потенциалом (5.3), причём удары о границу E^n считаются абсолютно упругими. Можно показать, что эта динамическая система с $n + 1$ степенями свободы вполне интегрируема: она допускает $n + 1$ независимых коммутирующих интегралов, квадратичных по скоростям.

При $n = 1$ можно говорить о фокусах эллипса E^1. Если поместить в эти фокусы гравитирующие центры, потенциалы которых определяются первой формулой (5.4), то снова получим интегрируемый биллиард внутри (вне) кривой E^1 на двумерной сфере. В отсутствие сил интегрируемость упругого биллиарда внутри $E^1 \subset S^2$ установлена в [12]. Многомерные обобщения даны в [10].

Отметим в заключение, что аналогичные результаты справедливы и в пространстве постоянной отрицательной кривизны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16244).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Якоби К.* Лекции по динамике. М.; Л.: Гостехиздат, 1936. 270 с.
2. *Переломов А.М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990. 237 с.
3. *Kozlov V., Harin A.* Kepler's problem in constant curvature spaces // Celest. Mech. and Dynam. Astronom., 1992. V. 54. № 4. P. 393–399.
4. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1. М.: Физматгиз. 1960. 515 с.
5. *Биркгоф Дж.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
6. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Биллиарды. М.: Изд-во МГУ. 1991. 168 с.
7. *Козлов В.В.* Конструктивный метод обоснования теории систем с неудерживающими связями // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 883–894.
8. *Ильинская Н.Н.* Геометрический анализ задачи о гармоническом осцилляторе в эллипсе // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. 1991. № 1. С. 88–92.
9. *Панов А.А.* Эллиптический биллиард с ньютоновским потенциалом. Мат. заметки, 1994. Т. 55. Вып. 3. С. 139–140.
10. *Veselov A.P.* Confocal surfaces and integrable billiards on the sphere and in Lobachevsky space // J. Geometry and Phys. 1990. V. 7. № 7. P. 81–107.
11. *Slawianowski J.* Bertrand systems on SO (3, R) and SU (2) // Bull. L'Acad. Polonaise Sci. Ser. Sci. Phys. et astron. 1980. V. 28. № 2. P. 83–94.
12. *Абдрахманов А.М.* Интегрируемые бильярды // Вест. Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. 1990. № 6. С. 28–33.

Москва

Поступила в редакцию
9.11.1994