

УДК 531.36

© 1994 г. В.В. Козлов

## ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Рассматривается задача о существовании и аналитических свойствах асимптотических решений уравнений динамики, стремящихся к положениям равновесий при  $t \rightarrow -\infty$ . В случае, когда равновесие – невырожденная критическая точка потенциальной энергии, эта задача решена Ляпуновым [1]. Ниже рассматривается ситуация, когда отсутствие минимума потенциальной энергии нельзя определить по квадратичной форме разложения потенциальной энергии в ряд Тейлора. Показано, что асимптотические решения можно найти в виде ряда по обратным степеням времени, содержащим логарифмы. Если эти ряды расходятся, то они являются асимптотическими разложениями для рассматриваемых решений. Рассмотрена задача о влиянии гироскопических сил на существование асимптотических движений в системах с вырожденной потенциальной энергией. Получен аналог теоремы Кельвина о невозможности стабилизации равновесия посредством гироскопических и диссипативных сил.

**1. Постановка задачи.** Пусть  $x_1, \dots, x_n$  – обобщенные координаты,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) x_i x_j$$

– кинетическая энергия системы (при всех значениях  $x$  она положительно определена по скорости  $\dot{x}$ ),

$$\Phi = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) x_i x_j \geq 0 \tag{1.1}$$

– диссипативная функция Релея,  $V(x)$  – потенциальная энергия. Функции  $T, \Phi, V$  считаются бесконечно дифференцируемыми.

Движения  $t \rightarrow x(t)$  рассматриваемой механической системы с диссипацией определяются как решения дифференциальных уравнений Лагранжа

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}} \tag{1.2}$$

Предположим, что  $dV(0) = 0$ . Тогда  $x = 0$  – положение равновесия. Без ущерба для общности можно считать, что  $V(0) = 0$ .

Если потенциальная энергия  $V$  не имеет в точке  $x = 0$  локального минимума, то при некоторых дополнительных предположениях общего характера равновесие  $x = 0$  будет неустойчивым (см., например, [2]). Более того, неустойчивость равновесия часто можно вывести из существования асимптотических решений уравнений (1.2):  $x(t) \rightarrow 0$ , когда  $t \rightarrow -\infty$ . Цель работы – исследовать условия существования таких движений и их аналитические свойства (например, асимптотические представления решений при  $t \rightarrow -\infty$ ).

Пусть

$$V = V_m + V_{m+1} + \dots \tag{1.3}$$

– ряд Маклорена потенциальной энергии  $V$  (не обязательно сходящийся). Здесь  $V_s$  означает однородную форму от  $x$  степени  $s$ . Так как  $V(0) = 0$  и  $dV(0) = 0$ , то  $m \geq 2$ . При  $m = 2$  вопрос об асимптотических решениях и их аналитической структуре решается с помощью первого метода Ляпунова [1]: если  $V_2$  не имеет минимума в точке  $x = 0$ , то уравнения (1.2) имеют решение

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) e^{\lambda k t}, \quad \lambda = \text{const} > 0 \quad (1.4)$$

которое стремится к нулю при  $t \rightarrow -\infty$ . В (1.4)  $a_k(\cdot)$  – полиномиальные вектор-функции времени. В аналитическом случае ряды Ляпунова (1.4) сходятся. Если функции  $T$ ,  $\Phi$ ,  $V$  лишь бесконечно дифференцируемы по  $x$  в окрестности точки  $x = 0$ , то ряды (1.4), как правило, расходятся. Однако по теореме А.Н. Кузнецова [3], каждому ряду (1.4), формально удовлетворяющему уравнениям движения (1.2), отвечает решение  $x(t)$ , такое, что 1)  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$ , 2) ряд (1.4) является асимптотическим рядом для решения  $x(\cdot)$  при  $t \rightarrow -\infty$ .

Будем рассматривать в основном случай, когда в разложении (1.3)  $m \geq 3$ .

**2. Асимптотические движения.** Пусть  $u = (u_1, \dots, u_n)$  –  $n$ -мерный вектор. Положим

$$\|u\|_* = \left( \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(0) u_i u_j \right)^{1/2}$$

Если диссипация полная, то  $\|\cdot\|_*$  – норма в  $\mathbb{R}^n$ .

*Теорема 1.* Предположим, что функция Релея (1.1) положительно определена и форма  $V_m$  ( $m \geq 3$ ) не имеет в точке  $x = 0$  минимума. Тогда уравнения (1.2) допускают асимптотическое (при  $t \rightarrow -\infty$ ) решение со следующим асимптотическим рядом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(-t)^{k\mu}}, \quad \mu = \frac{1}{m-2} \quad (2.1)$$

где  $a_k$ ,  $k \geq 2$  – полиномиальные вектор-функции от  $\ln(-t)$ ;  $a_1 = \lambda e_*$ ,  $\lambda = \text{const} > 0$ ,  $e_*$  – точка эллипсоида  $\|x\|_* = 1$ , в которой ограничение формы  $V_m$  достигает минимума.

*Следствие 1.* В предположениях теоремы 1 уравнения (1.2) имеют асимптотическое решение  $x(\cdot)$  такое, что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{x(t)}{\|x(t)\|_*} = e_* \quad (2.2)$$

*Следствие 2.* Если диссипация полная и первая нетривиальная форма ряда Маклорена потенциальной энергии не имеет минимума, то равновесие неустойчиво.

Это заключение о неустойчивости формально не вытекает из известных результатов.

Укажем схему доказательства теоремы 1. Сначала рассмотрим "упрощенное" уравнение

$$Bx' = -\partial V_m / \partial x, \quad B = \|b_{ij}(0)\| \quad (2.3)$$

В предположениях теоремы оно имеет решение вида

$$a_1 / (-t)^\mu \quad (2.4)$$

где  $a_1 = \lambda e_*$ ,  $\lambda$  – некоторая положительная постоянная. При подстановке решения (2.4) в левую и правую часть уравнения (2.3) получим функцию времени, убывающую при  $t \rightarrow -\infty$  как  $(-t)^{-\mu-1}$ . Если подставить (2.4) в другие составляющие исходного уравнения движения (1.2), отличные от  $Bx$  и  $\partial V_m / \partial x$ , то получим функцию  $t$ , убы-

вающую быстрее  $(-t)^{-\mu-1}$ . Для отыскания других членов ряда (2.1) получается бесконечная цепочка уравнений, которую можно решить последовательно методом, изложенным в [4]. Остается применить результат [3], согласно которому уравнения (1.2) допускают решение с асимптотическим рядом (2.1).

*Замечание.* При доказательстве теоремы 1 нигде не используется положительная определенность кинетической энергии  $T$ . Теорема справедлива и в том случае, когда  $T = 0$ . Тогда уравнение (1.2) перейдет в градиентную систему, асимптотические решения которой исследовались в [4].

Положив в (1.2)  $\Phi = 0$ , получим обратимую систему с теми же положениями равновесия. Если форма  $V_m$ ,  $m \geq 3$  не имеет минимума в точке  $x = 0$ , то, как установлено в [5, 6], уравнения движения имеют формальное решение в виде ряда

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s}{t^{2s\mu}}, \quad \mu = \frac{1}{m-2} \quad (2.5)$$

где  $b_s$ ,  $s \geq 2$  – полиномиальные вектор-функции от  $\ln(-t)$ ;  $b_1 = \kappa e$ ,  $\kappa = \text{const} > 0$ ,  $e$  – точка эллипсоида  $\|x\| = 1$ , где ограничение формы  $V_m$  достигает минимума. Здесь  $\|\cdot\|$  – норма в  $\mathbf{R}^n$ , задаваемая кинетической энергией при  $x = 0$ .

Ряд (2.5) является асимптотическим разложением для некоторого решения  $t \rightarrow x(t)$  уравнений движения, такого, что 1)  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$ , 2)  $x(t)/\|x(t)\| \rightarrow e$  при  $t \rightarrow -\infty$ .

Векторы  $e$  и  $e_*$  из (2.2) определяют направления "наискорейшего спуска" для потенциальной энергии относительно метрик  $T|_{x=0}$  и  $\Phi|_{x=0}$ . Они, разумеется, не совпадают.

Устремим теперь диссипацию к нулю. Спрашивается, перейдет ли при этом ряд (2.1) в (2.5)? Ответ оказывается отрицательным. Это показывает пример уравнения

$$x'' - \varepsilon x' = x^2 \quad (2.6)$$

$$(T = x^2 / 2, \quad V = -x^3 / 3, \quad \Phi = \varepsilon x^2 / 2; \quad \varepsilon = \text{const} > 0)$$

В уравнении (2.6) сделана замена времени  $t \rightarrow -t$  с целью упрощения записи ряда (2.1). В связи с этим рассматривается задача о решениях (2.6), которые стремятся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ .

При  $\varepsilon = 0$  уравнение (2.6) имеет асимптотическое решение

$$x(t) = 6/t^2 \quad (2.7)$$

При  $\varepsilon > 0$  ищем асимптотическое решение в виде ряда

$$a/t + b/t^2 + c/t^3 + \dots \quad (2.8)$$

где  $a = \text{const}$ ,  $b, c, \dots$  – полиномы от  $z = \ln t$ . Обозначая штрихом дифференцирование по  $z$ , получим

$$\left(\frac{b}{t^2}\right)' = \frac{b' - 2b}{t^3}, \quad \left(\frac{c}{t^3}\right)' = \frac{c' - 3c}{t^4}, \dots; \quad \left(\frac{b}{t^2}\right)'' = \frac{b'' - 5b' + 6b}{t^4}, \dots \quad (2.9)$$

Подставляя ряд (2.8) в уравнение (2.6), используя формулы (2.9) и приравнявая коэффициенты при одинаковых обратных степенях времени, получим бесконечную цепочку уравнений для последовательного определения  $a, b, c, \dots$ :

$$\varepsilon a = a^2, \quad 2a - \varepsilon b' + 2b\varepsilon = 2ab \quad (2.10)$$

$$b'' - 5b' + 6b - \varepsilon c' + 3c\varepsilon = b^2 + 2ac, \dots$$

Полагая  $\varepsilon = 0$ , получим цепочку уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты ряда (2.7).

Решим уравнения (2.10), полагая  $\varepsilon > 0$ . Так как  $a \neq 0$  (теорема 1), то из первого

уравнения (2.10) получаем  $a = \varepsilon$ . Второе уравнение дает соотношение  $b' = 2$ . Откуда (с точностью до аддитивной постоянной)  $b = 2 \ln t$ . Третье уравнение (2.10) дает

$$\varepsilon(c' - c) = -b^2 + 6b - 10$$

Следовательно,  $c$  – многочлен второй степени по  $z$ , старший коэффициент которого как функция  $\varepsilon$  имеет особенность типа полюса. Итак, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  коэффициенты ряда (2.8) вообще не имеют конечных пределов.

**3. Влияние дополнительных гироскопических сил.** Добавим в правую часть уравнения (1.2) дополнительное слагаемое  $-Cx'$ , где  $C(x)$  – кососимметрическая  $(n \times n)$ -матрица. Это слагаемое обычно интерпретируют как гироскопические силы, если 2-форма

$$\sum c_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j, \quad \|c_{ij}\| = C$$

замкнута. Впрочем, это условие в дальнейшем не используется.

Положим  $D = B(0) + C(0)$ . Так как функция Релея всегда неотрицательна, то  $|B(0)| \geq 0$ . В [7] установлена

*Лемма 1.* Если  $B$  – матрица неотрицательной квадратичной формы, то  $|B + C| \geq 0$  для любой кососимметричной матрицы  $C$ .

*Следствие.* Если матрица  $D$  невырождена, то  $|D| > 0$ .

Рассмотрим "упрощенное" уравнение

$$Dx' = -\partial V_m / \partial x, \quad m \geq 3$$

Будем искать решение вида

$$x(t) = a/(-t)^\mu, \quad a \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$$

Вектор  $a$  удовлетворяет алгебраическому соотношению

$$\mu D a = \frac{\partial V_m}{\partial x}(a) \tag{3.1}$$

Это уравнение, конечно, не всегда имеет нетривиальное вещественное решение.

*Теорема 2.* Предположим, что уравнение (3.1) с невырожденной матрицей  $D$  имеет решение  $a \neq 0$ . Тогда уравнения движения

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x'} \right)' - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} - Cx' - \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \tag{3.2}$$

допускают асимптотическое решение вида (2.1), в котором  $a_1 = a$ .

*Следствие 1.* В предположениях теоремы 2 равновесие  $x = 0$  неустойчиво.

*Теорема 2* доказывается тем же способом, что и теорема 1.

*Следствие 2.* Пусть  $x = 0$  – изолированная критическая точка функции  $V_m$  и индекс градиентного векторного поля  $\partial V_m / \partial x$  в точке  $x = 0$  не равен  $(-1)^n$ . Тогда существует асимптотическое решение уравнений (3.2), "выходящее" из равновесия  $x = 0$  и, в частности, это равновесие неустойчиво.

Напомним, что индекс изолированной особой точки  $x = 0$  векторного поля  $v(x)$  определяется как степень отображения

$$x \in S_\varepsilon^{n-1} \rightarrow v(x)/|v(x)| \in S^{n-1} \tag{3.3}$$

где  $S_\varepsilon^{n-1}$  – сфера малого радиуса  $\varepsilon > 0$  с центром в точке  $x = 0$ . Определение степени отображения и основные его свойства можно найти, например, в [8]. В частности, гомотопные отображения имеют одинаковую степень. Полезна следующая формула:

$$\text{ind}_{x=0}(Ax) = \text{sgn}|A| \tag{3.4}$$

Знаменитую теорему Кельвина о невозможности стабилизации невырожденного

равновесия с нечетной степенью неустойчивости  $s$  с помощью гироскопических и диссипативных сил можно переформулировать в терминах индекса градиентного поля. Действительно, пусть  $m = 2$ . Предположение о невырожденности критической точки  $x = 0$  эквивалентно условию изолированности нуля градиентного поля  $v = \partial V_2 / \partial x$ . В соответствии с (3.4)

$$\text{ind}_{x=0} v = \text{sgn} |\partial^2 V_2 / \partial x^2| = (-1)^s$$

Следовательно, если  $\text{ind}_{x=0} v \neq 1$ , то стабилизация невозможна. Следствие 2 указывает, что при  $m \geq 3$  условие обобщенной теоремы Кельвина зависит от четности числа степеней свободы.

Для четных значений  $n$  и  $\Phi = 0$  следствие 2 установлено ранее в [9]. Доказательство неустойчивости в общем случае проводится методом [9] с использованием леммы 1.

Сначала заметим, что в уравнении (3.1) параметр  $\mu$  можно считать произвольным положительным числом. Для этого достаточно сделать подходящую линейную подстановку  $a \rightarrow \lambda a$ ,  $\lambda > 0$ . Рассмотрим семейство векторных полей

$$v_\alpha = (1 - \alpha)v - \alpha Dx, \quad v = \partial V_m / \partial x, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

Если уравнение (3.1) не имеет ненулевых решений при  $\mu > 0$ , то для всех  $0 \leq \alpha \leq 1$  поле  $v_\alpha$  обладает изолированным нулем в точке  $x = 0$ . Так как поля  $v_0 = v$  и  $v_1 = -Dx$  гомотопны, то их индексы совпадают. Следовательно,

$$\text{ind}_{x=0} v = \text{ind}_{x=0} (-Dx) = (-1)^n$$

поскольку  $|D| > 0$  (следствие из леммы 1). Утверждение доказано.

*Следствие 3.* Пусть  $m$  нечетно и  $x = 0$  – изолированная критическая точка функции  $V_m$ . Тогда  $x = 0$  – неустойчивое равновесие системы (3.2).

Действительно, в этом случае индекс градиентного поля  $\partial V_m / \partial x$  в точке  $x = 0$  будет четным, поскольку ввиду четности его компонент каждая точка единичной сферы  $S^{n-1}$  в (3.3) имеет четное число прообразов.

Отметим, что условие изолированности критической точки функции  $V_m$  существенно для разрешимости алгебраической системы (3.1). Вот простой контрпример:  $V_3 = x_1 x_2 x_3$ ,  $D = \text{diag}(-1, 1, -1)$ . Отметим, что  $|D| > 0$ .

Неустойчивость равновесия обратимой системы при нечетном  $m$  впервые доказана в [5]. Невозможность стабилизации гироскопическими силами с невырожденной матрицей  $C$  установлена в [9]. По-видимому, заключение следствия 3 справедливо без предположения об изолированности критической точки  $x = 0$ . Задача об устойчивости равновесия в случае сильно вырожденных гироскопических сил, когда  $C = 0$ , рассмотрена в [10].

**4. Некоторые обобщения.** Рассмотрим случай, когда ряд Маклорена потенциальной энергии начинается с квадратичных членов:

$$V = V_2 + V_m + V_{m+1} + \dots, \quad m \geq 3 \tag{4.1}$$

Если форма  $V_2$  положительно определена, то равновесие  $x = 0$  будет устойчивым и асимптотических движений нет. Если же  $V_2$  не имеет в точке  $x = 0$  минимума, то существование асимптотических движений вытекает из классических результатов Ляпунова [1]. Поэтому рассмотрим случай, когда  $V_2 \geq 0$  и множество  $\pi = \{x: V_2(x) = 0\}$  не сводится к одной точке  $x = 0$ . Такая ситуация часто встречается в приложениях, когда изучаются случаи вырождения. Из линейной алгебры известно, что  $\pi$  – плоскость. Пусть  $W_m$  – ограничение формы  $V_m$  на плоскость  $\pi$ .

*Теорема 3.* Предположим, что форма  $W_m$  не имеет в точке  $x = 0 \in \pi$  минимума и

диссипация полная. Тогда уравнения движения (1.2) допускают асимптотическое решение с асимптотическим рядом вида (2.1).

Доказательство проводится методом, изложенным в [4]. Было бы интересным изучить влияние гироскопических сил на существование асимптотических движений в системах с потенциалом (4.1). Еще одна интересная задача – исследование асимптотических рядов вида (2.1) в системах с частичной диссипацией.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–013–16244).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 471 с.
2. *Караетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем. Итоги науки и техники. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНТИ, 1983. 132 с.
3. *Кузнецов А.Н.* О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением // Функциональный анализ и его приложения. 1989. Т. 23. Вып. 4. С. 63–74.
4. *Козлов В.В.* Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа–Дирихле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 928–937.
5. *Козлов В.В.* Асимптотические решения уравнений классической механики // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 573–577.
6. *Козлов В.В., Паламопов В.П.* Об асимптотических решениях уравнений классической механики // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 2. С. 285–289.
7. *Козлов В.В.* О степени неустойчивости // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 14–19.
8. *Шварц Дж.* Дифференциальная геометрия и топология. М.: Мир, 1970. 224 с.
9. *Болотин С.В., Негрини П.* Асимптотические траектории гироскопических систем // Вестник МГУ. Сер. Математика, механика. 1993. № 6. С. 66–75.
10. *Фурта С.Д.* Об асимптотических решениях уравнений движения механических систем // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 938–944.

Москва

Поступила в редакцию  
23.XI.1993