ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1994. № 3

УДК 531.01

В. В. Козлов

О РАВНОВЕСИЯХ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Введение. Стационарные точки потенциальной энергии являются положениями равновесия неголономных систем со стационарными связями. Они называются равновесиями I рода. Исследование их устойчивости начато в работах Уиттекера. В типичных случаях равновесия I рода изолированы.

Характерная особенность неголономных систем — наличие равновесий II рода, не являющихся стационарными точками потенциальной энергии. Эти равновесия (отмеченные впервые Боттемой), как правило, неизолированы: они группируются в семейства, размерность которых равна числу независимых уравнений неинтегрируемых связей.

К сожалению, геометрия равновесий неголономных систем пока мало изучена (см. [1]). В настоящей заметке предпринята попытка восполнить этот пробел. Отмечены некоторые общие утверждения о строении многообразий равновесий систем с неинтегрируемыми связями. В духе теории бифуркаций Пуанкаре исследована зависимость от параметра многообразий равновесия в типичной ситуации. Оказалось, что в типичных однопараметрических семействах многообразия равновесий гладко зависят от параметра и, в частности, сохраняют свою структуру. Однако расположенные на них равновесия I рода испытывают бифуркации: при изменении параметра они либо исчезают, либо рождаются парами.

1. Равновесия неголономных систем. Пусть $x=(x_1, \ldots, x_n)$ — обобщенные координаты механической системы, на которую наложены неинтегрируемые дифференциальные связи

$$a_1\dot{x}=0, \ \ldots, a_m\dot{x}=0. \tag{1.1}$$

Ковекторы $a_1, \ldots, a_m$ — функции от x. Предполагается, что они линейно независимы при всех значениях x.

Пусть $V(x)$ — потенциальная энергия системы. Хорошо известно (см., например, [1]), что равновесия неголономной системы со связями (1.1) в потенциальном поле определяются уравнением

$$\frac{\partial V}{\partial x}+\sum_{j=1}^{m}\mu_j a_j=0. \tag{1.2}$$

Здесь $\mu_1, \ldots, \mu_m$ — некоторые неизвестные множители. Отметим, что условия равновесия механических систем в моделях, обобщающих классическую неголономную механику (см. [2]), также совпадают с уравнением (1.2).

Пусть x_0 — критическая точка функции V: $dV(x_0)=0$. Тогда эта точка будет положением равновесия. Действительно, в (1.2) надо положить $\mu_1=\ldots=\mu_m=0$. Такие равновесия обычно называют равновесиями первого рода. Пусть $x=x_0$, $\mu=\mu_0$ — решение (1.2) и $\mu_0\neq 0$. Тогда точка x_0 называется равновесием второго рода. Условие $\mu_0\neq 0$, очевидно, эквивалентно предположению $dV(x_0)\neq 0$.

Условие равновесия (1.2) представляет систему n алгебраических уравнений относительно $n+m$ неизвестных x, μ. Поэтому можно ожидать, что в общем случае положения равновесия будут группироваться в m-мерные семейства. Обсудим этот вопрос отдельно для равновесий I и II родов.

Предложение 1. *Пусть x_0 — невырожденная критическая точка потенциальной энергии: $dV(x_0)=0$ и*

$$\det\left\|\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_0)\right\|\neq 0. \tag{1.3}$$

Тогда через точку x_0 проходит единственная гладкая регулярная m-мерная поверхность Σ, целиком состоящая из положений равновесия. Все равновесия из малой проколотой окрестности точки x_0 на Σ являются равновесиями II рода.

Действительно, при $x=x_0$, $\mu=0$

$$\det\left\|\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\Sigma\mu_j\frac{\partial a_j}{\partial x}\right\|=\det\left\|\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right\|\neq 0$$

в силу предположения (1.3). Следовательно, по теореме о неявных функциях в окрестности точки x_0 координаты x можно представить в виде гладких функций от μ:

$$x=f(\mu),\ f(0)=x_0. \tag{1.4}$$

Подставляя это соотношение в (1.2), дифференцируя полученное тождество по μ_j и полагая затем $\mu=0$, получим

$$\Gamma \frac{\partial f}{\partial \mu_j}(0)+a_j(x_0)=0,\quad 1\leqslant j\leqslant m,$$

где Γ — матрица Гессе функции V в точке $x=x_0$. Так как Γ невырождена и ковекторы $a_1, \ldots, a_m$ линейно независимы, то векторы

$$\frac{\partial f}{\partial \mu_1}(0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial \mu_m}(0)$$

также линейно независимы. Поэтому поверхность Σ, заданная в параметрической форме (1.4), будет m-мерной регулярной поверхностью.

Остается заметить, что невырожденные критические точки изолированы. Поэтому равновесия $x\neq x_0$ на Σ вблизи точки x_0 будут равновесиями второго рода. Предложение доказано.

Анализ равновесий II рода начнем с рассмотрения простейшего нетривиального случая, когда $m=1$.

Пусть

$$\sum_{s=1}^{n} f_s(x)\dot{x}_s=0 \tag{1.5}$$

— уравнение единственной неинтегрируемой связи. Без ограничения общности будем считать, что $x_0=0$ — равновесие второго рода. Так как $dV(0)\neq 0$, то в окрестности нуля можно так выбрать обобщенные координаты, что

$$V(x)=x_n+\text{const}.$$

Запишем уравнения равновесия в явном виде

$$\mu f_1=\ldots=\mu f_{n-1}=0,\quad 1=\mu f_n. \tag{1.6}$$

Следовательно, в окрестности точки $x=0$ функция f_n сохраняет знак. Из последнего уравнения (1.6) находим множитель $\mu=1/f_n\neq 0$. Таким образом, отыскание равновесий второго рода сводится к решению системы $n-1$ алгебраических уравнений

$$f_1(x)=\ldots=f_{n-1}(x)=0. \tag{1.7}$$

Предложение 2. *Если связь* (1.5) *вполне неинтегрируема, то* $df_s(0)\neq 0$ *при некотором* $s\leqslant n-1$.

Следствие. *Равновесия второго рода лежат на регулярных гиперповерхностях в конфигурационном пространстве.*

Для интегрируемых связей предложение 2 не справедливо. Вот простой пример: $f_1=\ldots=f_{n-1}=0$, $f_n=1$. Каждая точка является положением равновесия. Отметим, что для неинтегрируемых связей все функции f_k, $k\neq s$, могут тождественно обращаться в нуль. Например, для уравнения (1.5) $x_n\dot{x}_1+\dot{x}_n=0$.

Доказательство предложения 2. Воспользуемся критерием Фробениуса неинтегрируемости связи (1.5): в окрестности точки $x=0$

$$\omega \wedge d\omega \neq 0, \tag{1.8}$$

где $\omega = \sum f_s dx_s$. Предположим, что $df_s(0)=0$ при всех $s \leqslant n-1$. Тогда при $x=0$

$$d\omega = \sum \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(0)\, dx_i \wedge dx_n.$$

Так как $f_s(0)=0$ для $1 \leqslant s \leqslant n-1$, то в этой точке $\omega = f_n(0)\, dx_n$. Следовательно, $\omega \wedge d\omega = 0$ при $x=0$. Но это противоречит неравенству (1.8).

Замечание. Пусть в окрестности нуля форма ω имеет постоянный класс $2p+1$: $\omega \wedge (d\omega)^p \neq 0$ и $(d\omega)^{p+1}=0$. Тогда градиенты некоторых p функций (1.7) линейно независимы. В частности, равновесия второго рода будут расположены на регулярной поверхности размерности $n-p$.

Решения системы (1.7) могут быть устроены весьма сложно. В качестве примера рассмотрим уравнение вида (1.5) для $n=3$:

$$x_3 \dot{x}_1 + f \dot{x}_2 + \dot{x}_3 = 0. \tag{1.9}$$

Здесь f — функция от x, ряд Маклорена которой не содержит линейных членов. В малой окрестности нуля, очевидно, выполнено неравенство (1.8), так что связь (1.9) неинтегрируема. Система (1.7) имеет вид $x_3=0$, $f=0$. Пусть $f = x_1^2 + x_2^2$. Тогда получим изолированное равновесие II рода. Положим $f = x_1^2 - x_2^2$. Тогда семейство равновесий состоит из двух прямых, пересекающихся в начале координат. Это семейство не является гладким многообразием.

Однако в типичном случае градиенты

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0), \ \ldots, \ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x}(0)$$

линейно независимы и поэтому равновесия II рода образуют гладкую регулярную кривую в пространстве положений.

Вернемся к общему случаю, когда имеется m связей (1.1). Так как ковекторы $a_1, \ldots, a_m$ линейно независимы, то среди уравнений равновесия (1.2) найдется m штук, которые однозначно определяют множители μ как функции от x. Тогда остальные $n-m$ уравнений (1.2) вида (1.7) будут определять равновесия второго рода. В типичной ситуации они независимы и поэтому равновесия группируются в гладкие регулярные m-параметрические семейства.

2. Типичные однопараметрические семейства равновесий. Предположим, что потенциальная энергия V и уравнения связей (1.1) гладко зависят от некоторого параметра ε. Наша цель — изучить характер зависимости положений равновесия от ε.

Рассмотрим сначала равновесия II рода. Как уже отмечалось в п. 1, после исключения множителей Лагранжа уравнения равновесий приводятся к виду

$$g_1(x, \varepsilon) = \ldots = g_k(x, \varepsilon) = 0, \quad k = n-m \geqslant 1. \tag{2.1}$$

Функция g_i, очевидно, гладко зависит от ε. Пусть

$$J = \frac{\partial(g_1, \ldots, g_k)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

— их матрица Якоби. Если $\operatorname{rank} J=k$, то уравнения (2.1) определяют гладкую m-мерную поверхность $\Sigma(\varepsilon)$, гладко зависящую от ε. Таким образом, особенности у поверхности $\Sigma(\varepsilon)$ могут возникнуть лишь тогда, когда ранг матрицы J падает по крайней мере на единицу.

Соответствие $\varepsilon \to J(\varepsilon)$ определяет гладкую кривую в kn-мерном пространстве матриц размером $k \times n$. Хорошо известно (см., например, [3]), что $k \times n$-матрицы ранга r образуют подмногообразие коразмерности

$$(n-r)(k-r).$$

При $r=k-1$ получаем простую оценку

$$n-k+1 \geqslant 2.$$

Таким образом, типичная кривая $\varepsilon \to J(\varepsilon)$ не пересекает многообразие «вырожденных» матриц размера $k \times n$. Итак, доказано

Предложение 3. *Типичные однопараметрические семейства равновесий* II *рода состоят из гладких регулярных поверхностей одинаковой размерности.*

Следовательно, бифуркации поверхностей равновесий $\Sigma(\varepsilon)$ возможны лишь тогда, когда $\Sigma(\varepsilon)$ содержат равновесия I рода. Однако и в этом случае типичные однопараметрические семейства $\varepsilon \to \Sigma(\varepsilon)$ состоят из гладких m-мерных поверхностей, а бифуркации испытывают расположенные на них равновесия I рода.

Рассмотрим структуру множества равновесий в окрестности равновесия I рода. Если система зависит от параметра ε и при $\varepsilon=\varepsilon_0$ в положении равновесия x_0 выполнено неравенство (1.3), то при значениях ε, близких к ε_0, строение множества равновесий описывается предложением 1. Если же при $\varepsilon=\varepsilon_0$ критическая точка $x=x_0$ потенциальной энергии V становится вырожденной, то значение ε_0 будет бифуркационным.

Теорема. *В типичном случае множество равновесий является гладким m-мерным многообразием, причем при прохождении параметра ε через бифуркационное значение ε_0 положения равновесия* I *рода либо «рождаются», либо «умирают» парами.*

Пусть (для простоты записи) $\varepsilon_0=0$ и $x_0=0$. Хорошо известно (см., например, [3]), что в окрестности типичной стационарной точки функция $V_\varepsilon(x)$, гладко зависящая от параметра ε, приводится к следующему виду:

$$V=\frac{x_1^3}{3}+\varepsilon x_1 \pm \frac{x_2^2}{2} \pm \ldots \pm \frac{x_n^2}{2}+\text{const}.$$

В связи с этим условия равновесия (1.2) записываются в форме уравнений

$$\begin{aligned} & x_1^2+\varepsilon+\mu_1 a_1^1+\ldots+\mu_m a_m^1=0, \\ & \quad \pm x_2+\mu_1 a_1^2+\ldots+\mu_m a_m^2=0, \\ & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \quad \pm x_n+\mu_1 a_1^n+\ldots+\mu_m a_m^n=0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь a_s^i — компоненты s-го ковектора a_s.

По теореме о неявной функции из последних $n-1$ уравнений системы (2.2) можно найти $x_2, \ldots, x_n$ как гладкие функции от $x_1, \mu_1, \ldots, \mu_m$ и ε. Зависимость от ε возникает из-за того, что коэффициенты a_s^i уравнений связей зависят от этого параметра. Итак,

$$x_2=h_2(x_1, \mu, \varepsilon), \ldots, x_n=h_n(x_1, \mu, \varepsilon). \tag{2.3}$$

В результате первое уравнение системы (2.2) принимает вид

$$x_1^2+\varepsilon+\sum_{s=1}^{m}\mu_s F_s(x_1,\ \mu,\ \varepsilon)=0, \tag{2.4}$$

где $F_1, ..., F_m$ — некоторые гладкие функции. В типичной ситуации, конечно, хотя бы одно из чисел

$$F_1,\ \ldots,\ F_m|_{x_1=0,\mu=0,\varepsilon=0} \tag{2.5}$$

отлично от нуля. Следовательно, из (2.4) можно выразить одну из переменных $\mu_1, ..., \mu_m$ через остальные и x_1, ε. С учетом формул (2.3) получаем, что в окрестности вырожденного равновесия I рода $x=0$ при малых значениях ε положения равновесия неголономной системы образуют гладкое m-мерное многообразие, гладко зависящее от параметра ε.

Что же происходит с равновесиями I рода, когда ε проходит через бифуркационное значение $\varepsilon=0$? Чтобы ответить на этот вопрос, положим в (2.4) множители Лагранжа μ равными нулю. При отрицательных значениях ε имеем два различных равновесия $x_1=\pm\sqrt{-\varepsilon}$, $x_2=\ldots=x_n=0$. При $\varepsilon>0$ равновесия I рода исчезают. Теорема доказана.

Замечание. Если все числа (2.5) одновременно обращаются в нуль, то может нарушаться гладкость семейства положений равновесия. Однако эта ситуация может быть типичной лишь для неголономных систем, содержащих два и более параметра. Исследование бифуркаций равновесий в многопараметрических системах представляет отдельную содержательную задачу.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93—013—16244).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М., 1967.
2. Козлов В. В. Динамика систем с неинтегрируемыми связями, I—III//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1982. № 3. 92—100; 1982. № 4. 70—76; 1983. № 3. 102—111.
3. Брекер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. М., 1977.

Поступила в редакцию
17.11.93