Математические заметки

том 56 выпуск 3 сентябрь 1994

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ НА СФЕРЕ С ПОТЕНЦИАЛАМИ УПРУГОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В. В. Козлов, Ю. Н. Федоров

1. Классический пример системы, решаемой методом разделения переменных с использованием эллиптических сферических координат (elliptische Kugel coordinaten), – это задача Неймана о движении точки по n-мерной сфере

$$S^n = \{(x, x) = 1\}, \qquad x = (x_0, x_1 \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \tag{1}$$

в силовом поле с потенциальной энергией

$$V = \frac{1}{2}(Ax, x), \tag{2}$$

где $A : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ – симметрический линейный оператор. Доказательство этого факта можно найти, например, в статье Ю. Мозера [1].

Систему Неймана иногда называют (анизотропным) гармоническим осциллятором на сфере [2]. Это название, по-видимому, связывается с тем фактом, что в отсутствии связи (1) система

$$\ddot{x} = -\partial V / \partial x$$

с положительно определенным потенциалом (2) распадается на несколько несвязанных гармонических осцилляторов. На самом же деле, как будет видно из дальнейшего, аналогом потенциала Гука на сфере является функция вида

$$V(x) = \alpha_i / x_i^2, \qquad \alpha_i = \mathrm{const}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{3}$$

Чтобы разобраться в этом, рассмотрим случай $n = 3$. В работе [3] изучалось движение точки по S^3 в потенциальном поле, когда потенциал зависит только от расстояния до некоторого центра в S^3. При этом была решена задача Бертрана: найти все потенциалы, для которых почти все орбиты замкнуты. В качестве расстояния можно принять угловую координату θ на большом круге, отсчитываемую от притягивающего (отталкиваю-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-013-16244).

щего) центра. Оказывается, как и в пространстве нулевой кривизны, задача Бертрана на S^3 имеет всего два решения:

$$V = \alpha \operatorname{ctg}\theta, \quad V = \frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\theta; \qquad \alpha, \beta = \mathrm{const}\,. \tag{4}$$

Первое из них – аналог ньютоновского потенциала. Как отмечено в [4], эта функция удовлетворяет уравнению Лапласа–Бельтрами на S^3. Второе решение является аналогом потенциала упругой пружины. Эта функция имеет сингулярности на экваторе $\theta = \pi/2$. В [4] получены также аналогичные результаты для пространства Лобачевского $\mathbb{L}^3$, а в работе [5] дан детальный анализ орбит (в частности, выведены аналоги классических законов Кеплера для потенциала ньютоновского типа). Отметим, что орбиты на n-мерной сфере в "центральном" поле с потенциалами (4) замкнуты для всех значений n, однако потенциал ньютоновского типа является гармонической функцией на S^n только при $n = 3$.

Легко сообразить, что если указанный центр упругого притяжения или отталкивания поместить в одну из точек

$$(\pm 1, 0, \dots, 0), \ \dots \ (0, \dots, 0, \pm 1), \tag{5}$$

то, с точностью до несущественной аддитивной постоянной, потенциал силового поля будет иметь вид (3). При $n = 2$ интегрируемость системы с данным потенциалом установлена в работе [4] как частный случай более общего интегрируемого обобщения классической задачи Эйлера-Лагранжа двух неподвижных центров.

По аналогии с потенциалом (2) системы Неймана, рассмотрим теперь движение по S^n в поле с потенциалом

$$W(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\frac{\alpha_i}{x_i^2}$$

($n + 1$ центров упругого притяжения или отталкивания в точках (5)). Из уравнений Лагранжа со множителем λ

$$\ddot{x}_i = \frac{\alpha_i}{x_i^3} + \lambda x_i, \qquad i = 0, 1 \dots, n, \tag{6}$$

и из связи (1) находим

$$\lambda = -(\dot{x}, \dot{x}) - 2W(x).$$

Таким образом, в отличие от задачи Неймана, множитель λ есть постоянная величина – удвоенная полная энергия системы со знаком минус, и система на S^n распадается на $n+1$ несвязанных осцилляторов, то есть тривиально интегрируется в квадратурах. Действительно, каждое из уравнений (6) имеет соответствующий первый интеграл

$$\dot{x}_i^2 - \lambda x_i^2 + \alpha_i / x_i^2 = h_i, \qquad h_i = \mathrm{const}, \qquad h_0 + h_1 + \cdots + h_n = -2\lambda,$$

откуда

$$\frac{d}{dt}(x_i^2) = 2\sqrt{\lambda x_i^4 + h_i x_i^2 - \alpha_i}.$$

Если оба корня $\mu_1 < \mu_2$ полинома $\lambda y^2 + h_i y - \alpha_i$ положительны, то координата x_i изменяется между $\sqrt{\mu_1}$ и $\sqrt{\mu_2}$, если положителен только корень μ_2, то $-\sqrt{\mu_2} \leqslant x_i \leqslant \sqrt{\mu_2}$. Во втором случае точка на $\mathbb{S}^n$ пересекает экватор $x_i = 0$, и в момент пересечения скорость $\dot{x}_i$ обращается в бесконечность.

Если $\alpha_1 \geqslant 0, \ldots, \alpha_{n+1} \geqslant 0$, то решения уравнений (6) есть периодические функции без сингулярностей с одним и тем же периодом $2\pi/\sqrt{-\lambda}$, зависящим лишь от полной энергии. Тем самым, как и в случае только одного центра упругого взаимодействия, любые траектории рассматриваемой системы являются замкнутыми кривыми.

В общем случае данные уравнения на $2n$-мерном фазовом пространстве TS^n имеют $n(n+1)$ квадратичных интегралов

$$M_{ij} = (\dot{x}_i x_j - \dot{x}_j x_i)^2 + x_i \frac{\alpha_j}{x_j^2} + x_j \frac{\alpha_i}{x_i^2}, \qquad i, j = 0, 1, \ldots, n,$$

из которых, как и при движении по инерции, $2n-1$ являются независимыми.

2. Известно, что некоторые классические задачи о движении точки остаются интегрируемыми при добавлении потенциала упругого взаимодействия. Например, задача Якоби о свободном движении точки по эллипсоиду в $\mathbb{R}^3$ ([6]) остается интегрируемой, если центр упругого притяжения (отталкивания) поместить в центр эллипсоида. Покажем, что аналог этой обобщенной системы на n-мерной сфере также является интегрируемой системой. Именно, рассмотрим движение точки в поле с потенциалом $W(x)$ по $n-1$-мерной поверхности $\mathcal{E}$ – пересечению сферы (1) и конуса

$$x_0^2/a_0 + \cdots + x_n^2/a_n = 0, \qquad a_0 < a_1 < \cdots < a_n.$$

Последний можно включить в семейство конфокальных конусов с параметром s

$$\frac{x_0^2}{a_0 - s} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n - s} = 0. \tag{7}$$

Каждой фиксированной точке на S^n соответствуют n корней $s = u_1, \ldots, u_n$ уравнения (7), которые и являются ее эллиптическими сферическими координатами. При этом

$$x_i^2 = \frac{(a_i - u_1)\cdots(a_i - u_n)}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Положим теперь $u_n = 0$. Тогда координаты $u_1, \ldots, u_{n-1}$ будут задавать положение точки на обобщенном эллипсоиде $\mathcal{E} \subset S^n$. С учетом (8), потенциал $W(x)$ и кинетическая энергия $T = (\dot{x}, \dot{x})/2$ в этих координатах примут вид

$$\begin{aligned}
W(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_i \prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}{(a_i - u_1)\cdots(a_i - u_{n-1})a_i} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\prod_{l\neq k}^{n-1}(u_k - u_l)} \sum_{i=0}^{n} \frac{\beta_i}{a_i(a_i - u_k)}, \\
\beta_i &= \alpha_i \prod_{j\neq i}(a_i - a_j), \\
T &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k \prod_{l\neq k}^{n-1}(u_k - u_l)}{\Phi(u_k)} \dot{u}_k^2, \\
\Phi(u_k) &= (u_k - a_0)(u_k - a_1)\cdots(u_k - a_n).
\end{aligned}$$

Согласно теореме Штеккеля (см., например, [7]), система с гамильтонианом $T(u, \dot{u}) + W(u)$ интегрируется в квадратурах путем разделения переменных. Действительно, используя данную теорему можно показать, что система обладает семейством квадратичных интегралов

$$\begin{aligned}
I(\varkappa) = \sum_{k=1}^{n-1} & \frac{(\varkappa - u_1)\cdots(\varkappa - u_{n-1})}{\varkappa - u_k} \\
& \times \left(\frac{u_k \prod_{l\neq k}^{n-1}(u_k - u_l)}{\Phi(u_k)} \dot{u}_k^2 + \frac{1}{\prod_{l\neq k}^{n-1}(u_k - u_l)} \sum_{i=0}^{n} \frac{\beta_i}{a_i(a_i - u_k)} \right),
\end{aligned}$$

которое является полиномом степени $n-2$ по параметру $\varkappa$. Зафиксируем константы интегралов, полагая

$$I(\varkappa)=(\varkappa-c_1)\cdots(\varkappa-c_{n-2}),\qquad c_1,\ldots,c_{n-2}=\mathrm{const}\,.$$

Отсюда, приравнивая $\varkappa=u_k$, находим

$$\frac{u_k\Big[\prod_{l\neq k}^{n-1}(u_k-u_l)\Big]^2}{\Phi(u_k)}\,\dot u_k^2+\sum_{i=0}^{n}\frac{\beta_i}{a_i(a_i-u_k)}=(u_k-c_1)\cdots(u_k-c_{n-2}),$$

или

$$\dot u_k=\frac{\sqrt{R(u_k)}}{u_k\prod_{l\neq k}^{n-1}(u_k-u_l)},$$

$$R(u_k)=u_k\Phi(u_k)\left[(u_k-c_1)\cdots(u_k-c_{n-2})+\sum_{i=0}^{n}\frac{\beta_i}{a_i(a_i-u_k)}\right].$$

Очевидно, что $R(u_k)$ есть полином степени $2n$. Полученные выражения приводят к системе $n-1$ уравнений

$$\frac{u_1^k du_1}{\sqrt{R(u_1)}}+\cdots+\frac{u_{n-1}^k du_{n-1}}{\sqrt{R(u_{n-1})}}=\varepsilon_k\,dt,\qquad k=1,\ldots,n-1,$$

где $\varepsilon_1=\cdots=\varepsilon_{n-2}=0$, $\varepsilon_{n-1}=1$. Отсюда, после замены времени $dt=u_1\cdots u_{n-1}\,d\tau$, получаем уравнения Абеля для гиперэллиптических интегралов первого рода

$$\int_{u_0}^{u_1}\frac{u^{k-1}du}{\sqrt{R(u)}}+\cdots+\int_{u_0}^{u_{n-1}}\frac{u^{k-1}du}{\sqrt{R(u)}}=\delta_k\tau+\Delta_k,\qquad k=1,\ldots,n-1 \tag{9}$$
$$\delta_1=1,\delta_2=\cdots=\delta_{n-1}=0,\quad \Delta_1,\ldots\Delta_{n-1},u_0=\mathrm{const}\,.$$

Применяя процедуру обращения уравнений (9) (см., например, [8]), симметрические функции от эллиптических координат и, следовательно, декартовы координаты $x_0,x_1,\ldots,x_n$ могут быть выражены в тэта-функциях нового времени τ, ассоциированных с гиперэллиптической римановой поверхностью $w^2=R(u)$.

3. Аналогичные результаты справедливы и для пространства постоянной отрицательной кривизны. Сферу (1) надо заменить гиперболоидом L^n

$$-x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2=-1$$

в $(n+1)$-мерном псевдоевклидовом пространстве с метрикой

$$-dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2.$$

В качестве потенциальной энергии снова примем функцию $W(x)$. Также как и в случае сферы S^n, каждое слагаемое в W является аналогом потенциала упругой пружины (см. [4]).

Для пространства Лобачевского L^n уравнения Лагранжа (6) принимают вид

$$\ddot{x}_0 = -\lambda x_0 + \frac{\alpha_i}{x_0^3}, \quad \ddot{x}_k = \lambda x_k + \frac{\alpha_i}{x_k^3}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{10}$$

Так как потенциальная энергия W – однородная функция по x степени однородности -2, то множитель λ равен удвоенной полной энергии $T + W = h$ (напомним, что для сферы $\lambda = -h$). Таким образом, в уравнениях (10) снова $\lambda = \mathrm{const}$, что позволяет проинтегрировать их в элементарных функциях. Также как и для сферы S^n, данные уравнения допускают $2n-1$ независимых интегралов, квадратичных по скоростям.

Можно показать, что задача о движении по $(n-1)$-мерному "эллипсоиду" в L^n останется вполне интегрируемой при добавлении поля упругих сил, центры которых расположены в аналогах точек (5). Разделение переменных проводится по схеме, изложенной в п.2.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступило
18.02.94

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Мозер Ю. Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем // УМН. Т. 36. №5. С. 109–151.

[2] Veselov A.P. Confocal Surfaces and Integrable Billiards on the Sphere and in the Lobachevsky Space // Preprint. Forschungsinstitute für Mathematik, ETH Zürich.

[3] Slawianowski J. Bertrand systems on $SO(3,\mathbb{R})$ and $SU(2)$ // Bull. L'Acad. Polonaise Sci. 1920. V. XXVIII. №2. P. 83–94.

[4] Kozlov V., Harin A. Kepler's Problem in Constant Curvature Spaces // Celest. Mech. and Dynam. Astron. 1992. V. 54. P. 393–399.

[5] Козлов В.В. О динамике в пространствах постоянной кривизны // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. (в печати).

[6] Якоби К. Лекции по динамике. М.–Л.: Гостехиздат, 1936.

[7] Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. М.–Л.: Гостехиздат, 1937.

[8] Дубровин Б.А. Тэта-функции и нелинейные уравнения // УМН. Т. 32. №2. С. 11–80.