УДК 531.36

© 1993 г. В.В. Козлов

О СТЕПЕНИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Степенью неустойчивости положения равновесия автономной динамической системы называется число собственных чисел ее линеаризации, лежащих в правой полуплоскости. Рассматриваются диссипативные системы, допускающие функции Морса, не возрастающие вдоль их траекторий. Критические точки таких функций совпадают с положениями равновесия. Показано, что степень неустойчивости невырожденного положения равновесия имеет ту же четность, что и индекс функции Морса в этой точке. В частности, если индекс нечетный, то равновесие неустойчиво. Этот результат распространен на компактные инвариантные многообразия динамической системы, удовлетворяющие условиям невырожденности, приводимости и эргодичности. В качестве примера рассмотрена задача об устойчивости стационарных движений тяжелого цилиндрического твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости с ненулевой циркуляцией.

1. Степень неустойчивости. Пусть v – гладкое векторное поле на n-мерном многообразии M с локальными координатами $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Оно порождает динамическую систему на M

$$x^{\cdot} = v(x) \tag{1.1}$$

Предположим, что $x = 0$ – положение равновесия: $v(0) = 0$. Тогда в окрестности этой точки система (1.1) имеет вид

$$x^{\cdot} = Ax + o(|x|)$$

где A – матрица Якоби поля v в точке $x = 0$.

Степенью неустойчивости равновесия $x = 0$ назовем число собственных чисел матрицы A (считая кратности) с положительной вещественной частью. Это определение является естественным обобщением определения степени неустойчивости положений равновесий обратимых механических систем, предложенного Пуанкаре (см. [1]). В частности, если степень неустойчивости нечетна, то характеристический многочлен матрицы A имеет положительный вещественный корень.

Степень неустойчивости можно определить и для приводимого компактного инвариантного многообразия N системы (1.1). Пусть y – локальные координаты на N, а z – координаты в трансверсальном направлении. В этих переменных многообразие N задается соотношением $z = 0$, а уравнения (1.1) принимают следующий вид:

$$y^{\cdot} = u(y) + f(y, z), \qquad z^{\cdot} = Az + g(y, z)$$

$$f(y, 0) = 0, \qquad g = O(|z|^2) \tag{1.2}$$

Здесь u – ограничение поля v на N. Ввиду предположения о приводимости, в подходящих координатах y, z матрица A постоянна. Если $\dim N = 1$ (т.е. N – периодическая траектория), то уравнения (1.2) всегда приводимы (теорема Флоке–Ляпунова). Степенью неустойчивости N снова назовем число собственных чисел матрицы A с положительной вещественной частью; обозначим его $\deg N$.

Задача о приводимости инвариантных многообразий размерности $\geqslant 2$ достаточно сложная. Она не решена полностью даже для случая тора (см., например [2]).

Инвариантное многообразие N назовем *невырожденным*, если $|A| \neq 0$. Справедлива простая

Лемма 1. Пусть N – приводимое невырожденное инвариантное многообразие. Тогда

$$\deg N \equiv \tfrac{1}{2}(1 - \operatorname{sign}|-A|) \bmod 2 \qquad (1.3)$$

Действительно, так как комплексные собственные значения встречаются парами, то $\deg N$ по модулю 2 равно числу положительных вещественных корней характеристического многочлена (считая кратности). Далее знак коэффициента при λ^n характеристического многочлена матрицы A совпадает со знаком $|-A|$. Остается применить теорему Декарта о числе положительных корней многочлена.

Укажем одно из следствий. Предположим, что система (1.1) зависит от параметра α и имеет гладкое по α семейство приводимых невырожденных инвариантных многообразий N_α. Если при некотором α степень неустойчивости N_α нечетна, то при всех значениях α многообразие N_α будет неустойчивым.

Задача об условиях существования инвариантных многообразий размерности $\geqslant 2$ при гладком возмущении исходной системы рассматривалась в [3]. При этом на инвариантное многообразие накладываются жесткие ограничения. Если же $\dim N \leqslant 1$, то продолжаемость по параметру α положения равновесия или периодического решения гарантируют условия невырожденности.

Рассмотрим более подробно случай положений равновесия. Пусть γ – гладкая регулярная кривая в $(n+1)$-мерном пространстве $M \times \mathbf{R}_\alpha$ ($\mathbf{R}_\alpha$ – вещественная ось параметра α), являющаяся одной из кривых равновесий: если $(x_*, \alpha_*) \in \gamma$, то $x = x_*$ – равновесие системы (1.1) при $\alpha = \alpha_*$. Далее пусть

$$\ldots, (x_k, \alpha_0), \quad (x_{k+1}, \alpha_0), \ldots$$

– точки трансверсального пересечения кривой γ с "плоскостью" $\alpha = \alpha_0$, расположенные последовательно на γ.

Предложение 1. Разность $\deg x_{k+1} - \deg x_k$ нечетная для всех k.

Это – аналог известного результата Пуанкаре о законе смены устойчивости (см. [1]). Четаев [4] получил аналогичное соотношение для индексов особых точек, используя известную теорему Пуанкаре–Кронекера о сумме индексов. Так как индекс невырожденной особой точки равен ± 1 в зависимости от знака $|A|$, то предложение 1 есть следствие результата Четаева и леммы 1.

2. Диссипативные системы. Предположим, что найдется гладкая функция F: $M \to \mathbf{R}$, такая, что

$$F^{\cdot} = (\partial F/\partial x, v) \leqslant 0$$

Такую систему будем называть *диссипативной*. Функция F как бы играет роль полной энергии. Было показано [5], что невырожденные критические точки функции F отвечают положениям равновесия системы (1.1).

Основной результат составляет

Теорема 1. Пусть x_0 – невырожденное положение равновесия системы (1.1), являющееся невырожденной критической точкой функции F. Тогда

$$\deg x_0 \equiv \operatorname{ind}_{x_0} F \,(\mathrm{mod}\, 2) \tag{2.1}$$

В этом равенстве справа стоит индекс функции F в критической точке x_0.

Следствие. Пусть F – функция Морса. Тогда ее критические точки нечетного индекса являются неустойчивыми равновесиями системы (1.1).

В случае, когда F – интеграл (1.1), это утверждение установлено в [6] (простое доказательство приведено в [7]). Если n четно, то условие $F^{\cdot} \leqslant 0$ можно заменить условием $F^{\cdot} \geqslant 0$.

Указанное следствие – естественное обобщение известной теоремы Кельвина–Четаева о неустойчивости равновесия механической системы с нечетной степенью неустойчивости Пуанкаре при добавлении произвольных гироскопических и диссипативных сил. Действительно, пусть F – интеграл энергии обратимой системы. Его индекс в положении равновесия будет, очевидно, нечетным. Он не изменится при добавлении гироскопических сил. Так как после добавления диссипативных сил $F^{\cdot} \leqslant 0$, то неустойчивость равновесия вытекает из следствия теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Положим $\Phi = -F$ и пусть $x = 0$ – невырожденная критическая точка функции Φ. В ее окрестности

$$\Phi = \Phi(0) + (Bx, x)/2 + o(|x|^2)$$

Так как $\Phi^{\cdot} \geqslant 0$, то квадратичная форма (x, BAx) неотрицательна. Положим $D = (BA + A^{\mathrm{T}}B)/2$. Следовательно, симметричная матрица D также неотрицательна. Положим $C = BA$. Так как, по предположению, матрицы A и B невырождены, то $|C| \neq 0$. Поскольку $(C + C^{\mathrm{T}})/2 = D$, то

$$C = D + J,$$

где J – кососимметричная матрица.

Справедлива следующая алгебраическая

Лемма 2. Если $D \geqslant 0$, то $|D + J| \geqslant 0$, для любой кососимметрической матрицы J.

Для простоты изложения рассмотрим случай $n = 3$. Найдется невырожденная матрица K, такая, что $K^{\mathrm{T}}DK$ будет иметь диагональный вид. Так как $|KK^{\mathrm{T}}| > 0$, то знак определителя

$$|K^{\mathrm{T}}DK + K^{\mathrm{T}}JK| = |K^{\mathrm{T}}K||D + J|$$

будет совпадать со знаком $|D + J|$. Поскольку матрица $K^{\mathrm{T}}JK$ кососимметрическая, то можно считать, что матрица D уже приведена к диагональной форме. Далее

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & b \\ -a & \mu & c \\ -b & -c & \nu \end{vmatrix} = \lambda\mu\nu + \lambda c^2 + \mu b^2 + \nu a^2 \geqslant 0$$

если числа λ, μ, ν неотрицательны. Что и требовалось.

Итак, согласно лемме 2, $|C| > 0$. Значит, $\operatorname{sign}|-A|\operatorname{sign}|-B| > 0$.

Ясно, что $\operatorname{sing}|-B| = (-1)^{\operatorname{ind} F}$.

Следовательно, по лемме 1, $\deg(0) \equiv \frac{1}{2}[1-(-1)^{\operatorname{ind} F}] \bmod 2$.

Если индекс F четный, то $\deg(0) \equiv 0(\bmod 2)$, если же нечетный, то $\deg(0) \equiv$ $\equiv 1(\bmod 2)$. Теорема доказана.

3. Некоторые обобщения. Пусть N – связное компактное приводимое m-мерное инвариантное многообразие динамической системы (1.1), ограничение которой на N обладает инвариантной мерой с плотностью $\rho > 0$. В окрестности N уравнения (1.1) имеют вид (1.2). Ограничение системы (1.1) на N задается уравнением

$$y^{\cdot} = u(y), \quad y \in N \tag{3.1}$$

Пусть

$$F(y, z) = F_0(y) + (z, h(y)) + (B(y)z, z)/2 + \ldots$$

– гладкая функция, заданная в окрестности N, причем $F^{\cdot} \leqslant 0$. Ясно, что F_0 – гладкая функция на N – производная от которой в силу системы (3.1) неположительна.

Лемма 3. Если система (3.1) эргодична, то $F_0 = \mathrm{const}$.

Простейший пример эргодической системы – условно-периодическое движение по m-мерному тору $N = \mathbf{T}^m = \{y_1, \ldots, y_m \bmod 2\pi\}$:

$$y_1^{\cdot} = \omega_1, \ldots, \quad y_m^{\cdot} = \omega_m; \quad \omega_j = \mathrm{const} \tag{3.2}$$

В типичном случае, когда частоты $\omega_1, \ldots, \omega_n$ несоизмеримы, эта система эргодична. В частности, сюда относятся периодические траектории ($m = 1$).

Доказательство леммы 3. Положим $F_0^{\cdot} = \Phi \leqslant 0$. Тогда

$$\frac{1}{T}[F_0(y(T)) - F_0(y(0))] = \frac{1}{T}\int_0^T \Phi(y(t))dt \tag{3.3}$$

Так как F_0 – непрерывная функция на компакте N, то она ограниченна. Следовательно, предел левой части равенства (3.3) при $T \to \infty$ равен нулю. С другой стороны, по эргодической теореме Биркгофа [8], предел правой части (3.3) равен

$$\frac{1}{\operatorname{mes} N}\int_N \rho\Phi d^m y, \qquad \operatorname{mes} N = \int_N \rho d^m y$$

Так как $\rho > 0$, $\Phi \leqslant 0$ и этот интеграл обращается в нуль, то $\Phi = 0$. Следовательно, F_0 – интеграл системы (3.1). Ввиду ее эргодичности, $F_0 = \mathrm{const}$. Лемма доказана.

Линейные слагаемые по z в выражении для $F^{\cdot}$ имеют вид

$$(Az, h) + (z, h^{\cdot}) \tag{3.4}$$

где $h^{\cdot}$ – производная ковекторного поля h в силу системы (3.1). Так как $F^{\cdot} \leqslant 0$, то сумма (3.4) равна нулю. Отсюда получаем уравнение

$$(\partial h/\partial y, u) = -A^{\mathrm{T}} h \tag{3.5}$$

Инвариантное многообразие N назовем *сильно невырожденным*, если уравнение (3.5) может иметь только нулевое решение. Из сильной невырожденности вытекает обычная невырожденность N, определенная в разд. 1 (в противном случае уравнение (3.5) допускает нетривиальное решение h = const). Для инвариантного многообразия (3.2) условие сильной невырожденности означает, что матрица A не имеет собственных чисел вида $i(k_1\omega_1 + \ldots + k_m\omega_m)$, $k_j \in \mathbf{Z}$. Для периодических траекторий ($m = 1$) оно эквивалентно условию, что мультипликаторы отличны от единицы.

Итак, при сделанных предположениях ряд Тейлора функции F в окрестности N начинается с квадратичной формы по z. Усредним эту форму по инвариантному многообразию N:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}\int\limits_N (B(y)z, z)\rho(y)d^m y \tag{3.6}$$

Теорема 2. Пусть связное компактное инвариантное многообразие N приводимо, эргодично и сильно невырождено. Если квадратичная форма (3.6) невырождена, то $\deg N \equiv \operatorname{ind}\Phi(\operatorname{mod} 2)$.

Следствие. Если выполнены все условия теоремы 2 и форма Φ имеет нечетный индекс, то многообразие N неустойчиво.

Это утверждение можно рассматривать как частичное обращение теоремы об устойчивости инвариантных многообразий, установленной в [5]. Если F – интеграл системы (1.1), то заключение о неустойчивости установлено в [7]. Теорема 2 доказывается точно так же, как теорема 1. При этом используется схема, изложенная в [7].

4. Некоторые приложения. В качестве примера рассмотрим плоскую задачу гидродинамики о падении тяжелого цилиндрического твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости, совершающей плоскопараллельное безвихревое движение и покоящейся на бесконечности. Предполагается, что образующие цилиндрического тела ортогональны плоскости потока. По теореме Томсона циркуляция жидкости Γ вокруг цилиндра постоянна.

В некоторой связанной с телом системе отсчета $O\xi\eta\zeta$ (ось $O\zeta$ ортогональна плоскости потока) кинетическая энергия системы "тело плюс жидкость" имеет следующий вид:

$$(a_1u^2 + a_2\upsilon^2 + b\dot\varphi^2)/2$$

где u, υ – проекции скорости точки O на оси $O\xi$, $O\eta$, φ – угол поворота тела. Коэффициенты a_1, a_2 и b включают в себя присоединенные массы и присоединенный момент инерции.

Уравнения движения тяжелого твердого тела в жидкости можно представить в виде уравнений Кирхгофа ([9], разд. 134а)

$$a_1\dot u + a_2\upsilon\dot\varphi + \lambda\upsilon = -p\cos\varphi, \qquad a_2\dot\upsilon - a_1u\dot\varphi - \lambda u = -p\sin\varphi$$

$$b\ddot\varphi + (a_1 - a_2)u\upsilon = p(\xi\sin\varphi - \eta\cos\varphi) \tag{4.1}$$

Здесь $\lambda = \rho\Gamma$, ρ – плотность жидкости, p – вес тела минус сила Архимеда, для плоского однородного тела ξ, η – декартовы координаты его центра масс. Будем считать, что $a_2 > a_1$, и $\lambda \neq 0$.

Задача о стационарных движениях тела и их устойчивости изучалась в [10]. Положения равновесия системы (4.1) определяются равенствами

$$\lambda u = p\sin\varphi, \quad \lambda\upsilon = -p\cos\varphi, \quad \varphi = \varphi_* \tag{4.2}$$

где φ_* – корень уравнения

$$g(\varphi) = \alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$$\alpha = -\xi\lambda^2/[p(a_2 - a_1)], \quad \beta = \eta\lambda^2/[p(a_2 - a_1)]$$

Уравнения (4.1) допускают интеграл

$$F = \frac{a_1}{2}\left(u - \frac{p}{\lambda}\sin\varphi\right)^2 + \frac{a_2}{2}\left(\upsilon + \frac{p}{\lambda}\cos\varphi\right)^2 + \frac{b}{2}\dot\varphi^2 + \frac{p^2(a_2 - a_1)}{\lambda^2}G(\varphi)$$

где G – первообразная функция g. Если $\varphi = \varphi_*$ – строгий локальный минимум функции G, то стационарное движение (4.2) устойчиво по теореме Ляпунова. Если же в этой точке функция G имеет локальный максимум, то равновесие (4.2) будет невырожденным и индекс функции F в этой точке равен единице. Следовательно, по теореме 1, равновесие (4.2) неустойчиво. Отметим, что F не совпадает с полной механической энергией рассматриваемой системы.

Невырожденные минимумы и максимумы функции G чередуются. Отсюда вытекает перемежаемость значений угла φ, отвечающих устойчивым и неустойчивым движениям. Это явление, отмеченное в [10], является частным случаем закона смены устойчивости из предложения 1.

В правую часть третьего уравнения системы (4.1) можно добавить диссипативное слагаемое $-\mu\dot\varphi$, где μ – положительный коэффициент, который может зависеть от положения твердого тела. При этом стационарные решения (4.2) не изменяются. Так как $\dot F \leq 0$, то сохраняют силу сформулированные выше заключения об устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–013–16244).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.
2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев: Наук. думка. 1969. 247 с.
3. *Трещев Д.В.* О сохранении инвариантных многообразий гамильтоновых систем при возмущении // Мат. заметки. 1991. Т. 50. Вып. 4. С. 123–131.
4. *Четаев Н.Г.* Характеристики Кронекера // Учен. зап. Казан. ун-та. 1938. Т. 98. Кн. 9. Математика. Вып. 3. С. 1–41.
5. *Karapetyan A.V.* The Routh theorem and its extensions // Colloq. Math. Societ. Janos Bolyai. 53. Qualitative theory of differential equations. Szeged (1988); Amsterdam; New York; North Holland, 1990. P. 271–290.
6. *Рубановский В.Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений. // Теор. и прилож. механика. 1974. Т. 5. № 1. С. 67–79.
7. *Козлов В.В.* Линейные системы с квадратичным интегралом // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 900–906.
8. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с.
9. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
10. *Козлов В.В.* О падении тяжелого цилиндрического твердого тела в жидкости с ненулевой циркуляцией // МТТ. 1993. № 4. С. 113-117.

Москва

Поступила в редакцию
18.II.1993