Математические заметки

том 53 выпуск 4 апрель 1993

ЛИУВИЛЛЕВОСТЬ ИНВАРИАНТНЫХ МЕР ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ И УРАВНЕНИЕ МОНЖА–АМПЕРА

В.В. Козлов

1. Лиувиллевы инвариантные меры. Пусть M^{2n} – $2n$-мерное многообразие, v – гладкое векторное поле, порождающее динамическую систему

$$\dot{x} = v(x), \qquad x \in M. \tag{1}$$

Напомним, что эта система называется *гамильтоновой*, если найдется замкнутая вырожденная 2-форма Ω на M и функция $H\colon M \to R$ такие, что

$$\Omega(v, \cdot) = -dH. \tag{2}$$

Форма Ω обычно называется *симплектической структурой*, а функция H-*гамильтонианом*. Отметим, что одну и ту же динамическую систему можно разными способами представить в гамильтоновом виде. По *теореме Лиувилля*, $2n$-форма

$$\Omega^n = \Omega \wedge \cdots \wedge \Omega$$

инвариантна относительно фазового потока системы (1).

Определение. Инвариантная $2n$-форма μ системы (1) называется *лиувиллевой*, если $\mu = \Omega^n$, где Ω – симплектическая структура из равенства (2).

Задача о лиувиллевости заданной инвариантной меры включает задачу о распознавании гамильтоновости динамической системы и поэтому в общем случае представляется безнадежно сложной. Однако, для некоторых классов динамических систем она допускает конструктивное решение. Сюда относятся *вполне интегрируемые системы*, задаваемые уравнениями

$$\dot{I}_1 = \cdots = \dot{I}_n = 0, \qquad \dot{\varphi}_1 = \omega_1, \dots, \dot{\varphi}_n = \omega_n. \tag{3}$$

Здесь $I = (I_1, \ldots, I_n)$ – координаты в некоторой области $D \subset R^n$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ – набор угловых координат, нумерующих точки n-мерного тора $\mathbb{T}^n$, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ – функции от I. Движение в системе (3) происходит по n-мерным торам $I = \mathrm{const}$ условно-периодически с частотами $\omega_1, \ldots, \omega_n$. В дальнейшем рассматривается *невырожденный* случай, когда

$$\frac{\partial(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{\partial(I_1, \ldots, I_n)} \neq 0. \tag{4}$$

Наш основной результат состоит в том, что любая инвариантная мера уравнений (3) с непрерывной положительной плотностью является лиувиллевой. Его доказательство сводится к разрешимости многомерного аналога *уравнения Монжа–Ампера.*

Если не оговорено противное, то все объекты, встречающиеся ниже, считаются бесконечно дифференцируемыми.

2. Гамильтоновость вполне интегрируемых систем. Сначала рассмотрим задачу о представимости уравнений (3) в виде уравнений Гамильтона. Для простоты область D будем считать малой окрестностью некоторой точки, в которой выполнено неравенство (4).

Теорема 1. *Система* (3) *всегда гамильтонова, причем*

$$\Omega = d\sigma, \qquad \sigma = \sum a_k(I)dI_k + \sum \frac{\partial K}{\partial \omega_k} d\varphi_k, \tag{5}$$

$$H = \sum \omega_k \frac{\partial K}{\partial \omega_k} - K + \mathrm{const}, \tag{6}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ *– произвольные гладкие функции в* D, K *– функция от* $\omega_1, \ldots, \omega_n$ *и*

$$\det \left\| \frac{\partial^2 K}{\partial I_i \partial \omega_j} \right\| \neq 0. \tag{7}$$

Условие (7) гарантирует невырожденность 2-формы Ω. Функции a_k на самом деле не участвуют в представлении уравнений (3) в виде уравнений Гамильтона (поскольку $\dot{I} = 0$). Таким образом, различных гамильтоновых представлений уравнений (3) ровно столько, сколько имеется функций $K(\omega)$, удовлетворяющих условию (7).

Функция K имеет прозрачный смысл: это – лагранжиан рассматриваемой системы. Действительно, K – функция от скоростей $\dot{\varphi}_k = \omega_k$. Производные $\dfrac{\partial K}{\partial \omega_k} = \mathcal{I}_k$ $(1 \leq k \leq n)$ – канонические импульсы, сопряженные с координатами φ_k. В переменных $\mathcal{I}, \varphi$ симплектическая структура (5) имеет канонический вид (существующий по теореме Дарбу)

$$d\Big(\sum \frac{\partial K}{\partial \omega_k} d\varphi_k\Big) = d\sum \mathcal{I} d\varphi_k = \sum d\mathcal{I} \wedge d\varphi_k.$$

Наконец, формула (6) определяет гамильтониан H в соответствии с преобразованием Лежандра. Необходимое условие осуществимости преобразования Лежандра

$$\det \left\| \frac{\partial^2 K}{\partial \omega^2} \right\| \neq 0$$

автоматически выполнено в силу (4) и (7).

Доказательство. Для краткости изложения доказательство теоремы 1 будет проведено при $n = 2$. Положим

$$\Omega = \alpha dI_1 \wedge dI_2 + \beta dI_1 \wedge d\varphi_1 + \gamma dI_1 \wedge d\varphi_2 + \delta dI_2 \wedge d\varphi_1 + \varepsilon dI_2 \wedge d\varphi_2 + \zeta d\varphi_1 \wedge d\varphi_2.$$

Коэффициенты $\alpha, \beta, \ldots, \zeta$ – гладкие функции в $D \times \mathbb{T}^2$. Условие замкнутости формы Ω эквивалентно четырем уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial \beta}{\partial I_2} + \frac{\partial \delta}{\partial I_1} = 0, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial \gamma}{\partial I_2} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial I_1} = 0, \\ &\frac{\partial \beta}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \zeta}{\partial I_1} = 0, \qquad \frac{\partial \delta}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial \zeta}{\partial I_2} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Равенство (2) дает нам еще четыре уравнения:

$$\begin{aligned} \beta\omega_1 + \gamma\omega_2 &= \frac{\partial H}{\partial I_1}, \qquad \delta\omega_1 + \varepsilon\omega_2 = \frac{\partial H}{\partial I_2}, \\ \zeta\omega_2 &= \frac{\partial H}{\partial \varphi_1}, \qquad\qquad \zeta\omega_1 = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Функция H должна быть 2π-периодической по φ_1 и φ_2.

Из двух последних уравнений (9) получаем равенство

$$\omega_1 \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} + \omega_2 \frac{\partial H}{\partial \varphi_2} = 0. \tag{10}$$

Представим гамильтониан в виде ряда Фурье:

$$H = \sum H_{mn}(I) e_{mn}, \qquad e_{mn} = \exp[i(m\varphi_1 + n\varphi_2)].$$

Тогда из (10) получим бесконечное число соотношений

$$(m\omega_1 + n\omega_2) H_{mn} = 0.$$

Ввиду предположений о невырожденности (4), равенство $m\omega_1 + n\omega_2 = 0$ не может быть выполнено в целой окрестности любой точки из D. Следовательно, $H_{mn} = 0$ при всех $m^2 + n^2 \neq 0$. Это означает, что гамильтониан не зависит от углов φ_1 и φ_2.

Поскольку $\omega_1^2 + \omega_2^2 \neq 0$ на всюду плотном множестве из D, то из (9) вытекает, что $\zeta = 0$.

Теперь применим метод Фурье к двум последним уравнениям (8):

$$n\beta_{mn} = m\gamma_{mn}, \qquad n\delta_{mn} = m\varepsilon_{mn}. \tag{11}$$

Здесь $\beta_{mn}, \ldots$ – коэффициенты Фурье функций $\beta, \ldots$. Из (11) вытекает, что при $m^2 + n^2 \neq 0$

$$\begin{aligned} \beta_{mn} &= mA_{mn}, \qquad \gamma_{mn} = nA_{mn}; \\ \delta_{mn} &= mB_{mn}, \qquad \varepsilon_{mn} = nB_{mn}. \end{aligned}$$

Применяя метод Фурье к первым двум уравнениям (9), получаем соотношения

$$(m\omega_1 + n\omega_2)A_{mn} = 0, \qquad (m\omega_1 + n\omega_2)B_{mn} = 0.$$

Ввиду предположения о невырожденности, $A_{mn} = B_{mn} = 0$ для всех $m^2 + n^2 \neq 0$. Следовательно, коэффициенты $\beta, \gamma, \varepsilon, \delta$ не зависят от углов φ_1 и φ_2. Из первых двух уравнений (8) вытекает, что тогда и коэффициент α также не зависит от φ_1, φ_2.

Уравнения (8) теперь принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \beta}{\partial I_2} = \frac{\partial \delta}{\partial I_1}, \qquad \frac{\partial \gamma}{\partial I_2} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial I_1}.$$

Следовательно,

$$\beta = \frac{\partial F}{\partial I_1}, \qquad \delta = \frac{\partial F}{\partial I_2}, \qquad \gamma = \frac{\partial \Phi}{\partial I_1}, \qquad \varepsilon = \frac{\partial \Phi}{\partial I_1}, \tag{12}$$

где F, Φ – некоторые функции, определенные в D. Подставляя полученные соотношения в (9), получим два уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial I_1}\omega_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial I_1}\omega_2 = \frac{\partial H}{\partial I_1}, \qquad \frac{\partial F}{\partial I_2}\omega_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial I_2}\omega_2 = \frac{\partial H}{\partial I_2}. \tag{13}$$

Приравнивая смешанные производные функции H, придем к уравнению, связывающему функции F и Φ:

$$\frac{\partial F}{\partial I_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial I_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial I_1}\frac{\partial \omega_2}{\partial I_2} = \frac{\partial F}{\partial I_2}\frac{\partial \omega_1}{\partial I_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial I_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial I_1}. \tag{14}$$

Ввиду невырожденности (4), в малой окрестности D в качестве независимых переменных можно принять ω_1 и ω_2. Поэтому F и Φ будем считать функциями от ω. Тогда (14) примет следующий вид:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \omega_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1}\right)\frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(I_1, I_2)} = 0.$$

Следовательно, найдется функция $K(\omega_1, \omega_2)$ такая, что

$$F = \frac{\partial K}{\partial \omega_1}, \qquad \Phi = \frac{\partial K}{\partial \omega_2}.$$

Этот вывод вместе с формулами (12) приводит к заключению (5).

Найдем теперь функцию Гамильтона. С учетом (13) имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial I_k} &= \omega_1 \frac{\partial}{\partial I_k}\frac{\partial K}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial I_k}\frac{\partial K}{\partial \omega_2} \\ &= \frac{\partial}{\partial I_k}\left(\omega_1 \frac{\partial K}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial K}{\partial \omega_2} - K\right);\end{aligned}$$

$k = 1, 2$. Отсюда вытекает формула (6).

Теорема доказана.

3. Уравнение Монжа–Ампера. Пусть

$$f(I,\varphi)dI_1 \wedge d\varphi_1 \wedge dI_2 \wedge d\varphi_2 \tag{15}$$

– инвариантная мера уравнений (3) с дифференцируемой плотностью f. Эта функция удовлетворяет *уравнению Лиувилля*

$$\operatorname{div}(fv) = \omega_1 \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} + \omega_2 \frac{\partial f}{\partial \varphi_2} = 0.$$

Ввиду невырожденности, f не зависит от φ_2 и φ_2. На самом деле этот вывод справедлив и для меры (15) с непрерывной плотностью f.

С другой стороны, по формуле (5),

$$\Omega \wedge \Omega = \det \left\| \frac{\partial^2 K}{\partial I_i \partial \omega_j} \right\| dI_1 \wedge d\varphi_1 \wedge dI_2 \wedge d\varphi_2.$$

Следовательно, задача о лиувиллевости инвариантной меры (15) сводится к разрешимости относительно функции K уравнения

$$\det \left\| \frac{\partial^2 K}{\partial I_i \partial \omega_j} \right\| = f(I). \tag{16}$$

Как уже отмечалось в п. 2, в качестве локальных координат I_1, I_2 можно взять ω_1, ω_2. Тогда уравнение (16) примет вид уравнения Монжа–Ампера

$$\frac{\partial^2 K}{\partial I_1^2} \frac{\partial^2 K}{\partial I_2^2} - \left(\frac{\partial^2 K}{\partial I_1 \partial I_2} \right)^2 = f(I). \tag{17}$$

Как известно, это уравнение всегда разрешимо для любой непрерывной положительной функции f. Более того, оно имеет много различных решений: они параметризуются функциями на окружности. Действительно, согласно [1], задача Дирихле для уравнения (17) разрешима, если краевые условия для функции K заданы на выпуклой кривой в области D. С другой стороны, согласно старому результату Реллиха, если $f > 0$. то задача Дирихле для уравнения Монжа–Ампера имеет не более двух различных решений.

При $n > 2$ обобщенное уравнение Монжа–Ампера (16) также имеет решения для всех непрерывных положительных функций f. Строгие формулировки и соответствующие ссылки относительно задачи Дирихле для уравнения (16) имеются в книге [2].

Итак, доказана

Теорема 2. *Все инвариантные меры невырожденной вполне интегрируемой системы лиувиллевы.*

4. Замены времени в интегрируемых системах. Выполним в (3) замену времени $t \to \tau$ по формуле

$$d\tau = F(I, \varphi) dt, \tag{18}$$

где F – гладкая положительная функция в $D \times \mathbb{T}^n$. Тогда уравнения (3) примут следующий вид

$$I'_k = 0, \qquad \varphi'_k = \omega_k F; \qquad 1 \le k \le n. \tag{19}$$

Штрихом обозначено дифференцирование по τ.

Естественно поставить вопрос об условиях гамильтоновости системы (19). Эта задача рассматривалась в работе [3]. В классической динамике известны примеры нетривиальных замен времени, после которых вполне интегрируемая гамильтонова система остается гамильтоновой, но уже по отношению к новой симплектической структуре. В [3] введены так называемые *лиувиллевы* замены времени (18), когда можно найти новые угловые координаты $\psi_1, \ldots, \psi_n$, гладко зависящие от I и φ, в которых уравнения (19) принимают вид

$$\psi'_k = \chi_k(I). \tag{20}$$

Ясно, что лиувиллевы замены времени оставляют систему гамильтоновой и что не все замены вида (18) лиувиллевы (см. [3]).

Теорема 3. *Если система* (19) *гамильтонова и не имеет положений равновесия, то замена времени* (18) *лиувиллева.*

Таким образом, лиувиллевы замены времени исчерпывают все замены, при которых система остается гамильтоновой. Для краткости, мы рассмотрим случай $n = 2$.

Условия замкнутости 2-формы Ω снова имеют вид (8), а уравнения (9) перейдут в уравнения

$$\begin{aligned} \beta\omega_1 + \gamma\omega_2 &= G\frac{\partial H}{\partial I_1}, \qquad & \delta\omega_1 + \varepsilon\omega_2 &= G\frac{\partial H}{\partial I_2}, \\ \zeta\omega_2 &= G\frac{\partial H}{\partial \varphi_1}, \qquad & \zeta\omega_1 &= -G\frac{\partial H}{\partial \varphi_2}, \end{aligned} \tag{21}$$

где $G = F^{-1}$. Из двух последних уравнений (21) вытекает, что

$$\omega_1 \frac{\partial H}{\partial \varphi_1} + \omega_2 \frac{\partial H}{\partial \varphi_2} = 0.$$

Следовательно, из-за невырожденности, гамильтониан зависит лишь от I_1, I_2. В частности, $\zeta = 0$ (см. (21)) и для коэффициентов Фурье функций β, γ, δ, ε справедливы соотношения (11). Поэтому снова можно положить

$$\beta_{mn} = mA_{mn}, \ldots, \varepsilon_{mn} = nB_{mn}.$$

Из первых двух уравнений системы (21) вытекают равенства

$$\begin{aligned}(m\omega_1+n\omega_2)A_{mn}&=\frac{\partial H}{\partial I_1}G_{mn},\\(m\omega_1+n\omega_2)B_{mn}&=\frac{\partial H}{\partial I_2}G_{mn},\end{aligned}\tag{22}$$

справедливые при $m^2+n^2\neq 0$. Здесь G_{mn} – коэффициенты Фурье функции G.

Поскольку, согласно предположению, система (3) не имеет равновесий, то $dH\neq 0$ в области D. В противном случае поле v где-то обращается в нуль (ввиду невырожденности Ω). Следовательно, из (22) вытекают равенства

$$G_{mn}=\Lambda_{mn}(m\omega_1+n\omega_2),\qquad m^2+n^2\neq 0.$$

Введем функцию

$$R=-i\sum\Lambda_{mn}e_{mn}.$$

Она очевидно 2π-периодична по φ_1, φ_2 и бесконечно дифференцируема. Функция R удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial R}{\partial\varphi_1}\omega_1+\frac{\partial R}{\partial\varphi_2}\omega_2=G-\langle G\rangle,\tag{23}$$

где

$$\langle G\rangle=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}G\,d\varphi_1\,d\varphi_2.$$

Однако, как установлено в [4, гл. VII], если уравнение (23) допускает гладкое однозначное решение, то можно указать явные формулы перехода к новым угловым координатам ψ_1, ψ_2, переводящие уравнения (19) для φ_1,φ_2 к виду (20). Эта замена гладко зависит от координат I_1, I_2 как от параметров. Следовательно, замена времени (18) лиувиллева.

Отметим в заключение, что задача о периодических решениях уравнения (23) тесно связана с классической проблемой малых знаменателей. Условия приводимости уравнений (19) к виду (20) при $n=2$ изучены впервые А. Н. Колмогоровым в работе [5]. Они связаны с наличием периодических решений "гомологического уравнения" – дискретного аналога уравнения (23).

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
17.11.92

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969.
[2] Крылов Н. В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. М.: Наука, 1985.
[3] Веселов А. П. О замене времени в интегрируемых системах // Вестник МГУ. Сер.1, Математика, механика. 1987. №5. С. 25–29.
[4] Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1980.
[5] Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // ДАН СССР. 1953. Т. 93. №5. С. 763–766.

æ