ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1993. № 2

УДК 531.01

В. В. Козлов, В. А. Ярощук

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ МЕРАХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА—ПУАНКАРЕ НА УНИМОДУЛЯРНЫХ ГРУППАХ

1. Пусть G — группа Ли, g — ее алгебра, T — левоинвариантная метрика на группе G (кинетическая энергия механической системы с пространством положений G). Если $\omega=(\omega^1,...,\omega^n)\in g$ — скорость системы, то

$$T=I_{ij}\omega^i\omega^j/2.$$

Здесь и всюду ниже по повторяющимся индексам производится суммирование. Ввиду предположения о левоинвариантности $I_{ij}=\mathrm{const}$. Тензор $I=\|I_{ji}\|$ можно назвать тензором инерции системы.

Введем еще кинетический момент $m=(m_1,...,m_n)$, полагая $m_k=I_{ki}\omega^i$. Теорема об изменении момента приводит к уравнениям Эйлера — Пуанкаре [1]

$$\dot{m}_k=c^l_{ik}\omega^i m_l, \tag{1}$$

где c^l_{ik}—структурные постоянные алгебры g.

Уравнения (1) следует дополнить кинематическими соотношениями

$$\dot{x}^l=v^l_i\omega^i,\quad 1\leqslant l\leqslant n. \tag{2}$$

Здесь $x^1,...,x^n$ — локальные координаты на группе $G, v_k=(v^1_k,\ ...,\ v^n_k)$— левоинвариантные поля G, для которых справедливы коммутационные соотношения

$$[v_i,\ v_j]=c^k_{ij}v_k.$$

Система (1)—(2) эквивалентна обычным уравнениям Лагранжа с лагранжианом T.

Пусть $w_1,...,w_n$ — правоинвариантные векторные поля на группе G. Их фазовые потоки представляют семейства левых сдвигов. Поскольку лагранжиан T левоинвариантен, то уравнения (1)—(2) допускают n независимых нетеровых интегралов

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} w^i = c_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

С использованием этих соотношений скорости ω можно представить в виде однозначных функций на группе G (при фиксированных значениях $c_1, \ldots, c_n$). В результате получаем динамическую систему на группе G

$$\dot{x}^l = v_i^l (x) \omega^i (x, c), \tag{3}$$

которую будем называть приведенной системой уравнений Эйлера—Пуанкаре. Наш основной результат составляет

Теорема 1. *Если группа G унимодулярна, то фазовый поток приведенной системы* (3) *сохраняет меру Хаара на G.*

Для группы SO (3) этот факт установлен ранее в работе [2]. Напомним, что на каждой группе имеется единственная (с точностью до постоянного множителя) мера, инвариантная при всех левых (правых) сдвигах. В случае унимодулярной группы эта мера (называемая мерой Хаара) биинвариантна. В частности, все компактные группы унимодулярны.

Теорема 1 является следствием одного более общего результата, представляющего самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Фазовый поток приведенной системы* (3) *сохраняет правоинвариантную меру на G.*

Ниже приводится доказательство теоремы 2.

2. Система уравнений (1)—(2) гамильтонова. Следовательно, по теореме Лиувилля фазовый поток этой системы, представленной в канонических переменных

$$x, \ y = \partial T / \partial \dot{x},$$

сохраняет стандартную меру. Поэтому плотность инвариантной меры системы (1)—(2) можно определить как якобиан преобразования

$$x, \ y \to x, \ \omega.$$

Положим

$$V = \| v_j^i \|, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \left\| \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right\|.$$

Так как

$$y^s = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^s} = \frac{\partial T}{\partial \omega^i} \frac{\partial \omega^i}{\partial \dot{x}^s} = m_i \frac{\partial \omega^i}{\partial \dot{x}^s},$$

то

$$\frac{\partial y}{\partial m} = \frac{\partial \omega}{\partial \dot{x}}.$$

Следовательно, плотность инвариантной меры системы уравнений (1)—(2) равна

$$M = \det \frac{\partial y}{\partial \omega} = \det \left(\frac{\partial y}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial \omega} \right) = (\det V)^{-1} \det I. \tag{4}$$

Пусть $w_i=(w_i^1, \ldots, w_i^n)$, $1\leqslant i\leqslant n$, — правоинвариантные векторные поля на G из п. 1. По аналогии с (2) положим

$$\dot{x}^l=w_i^l s^i, \quad 1\leqslant l\leqslant n. \tag{5}$$

Здесь $s=(s^1,\ldots,s^n)\in g$ — скорость рассматриваемой системы. Запишем в явном виде интегралы Нетер:

$$f_j=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^l}\frac{\partial \dot{x}^l}{\partial s^j}=m_k\frac{\partial \omega^k}{\partial \dot{x}^l}w_j^l=c_j, \quad 1\leqslant j\leqslant n. \tag{6}$$

Систему уравнений (1)—(2) можно заменить системой (3), добавив к ней тривиальные соотношения $\dot{c}_1=\ldots=\dot{c}_n=0$. Плотность меры Лиувилля в переменных x, c равна

$$M_1=M\left(\det\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)^{-1}.$$

Эта функция, очевидно, дает плотность интегрального инварианта для приведенной системы (3).

Полагая $w=\|w_j{}^i\|$ и учитывая формулы (4), (6), получим

$$M_1=(\det V)^{-1}\det\left(\frac{\partial f}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial \omega}\right)^{-1}=(\det WI)^{-1}. \tag{7}$$

3. Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^l=v_i^l\omega^i, \tag{8}$$

в которую величины $\omega^1,\ldots,\omega^n$ входят как постоянные параметры. При всех значениях ω фазовый поток системы (8) представляет семейство правых сдвигов на группе G.

Лемма 1. *Функция* $\det W^{-1}$ — *плотность интегрального инварианта системы* (8).

Следствие. Плотность правоинвариантной меры на группе G равна $c\,\det W^{-1}$, $c=\text{const}\neq 0$.

Действительно, каждый правый сдвиг на группе G является сдвигом по траекториям системы (8) при некоторых значениях $\omega^1,\ldots,\omega^n$.

Доказательство леммы 1. Предположим, что в некотором состоянии положение системы определяется координатами $x_0^1, \ldots, x_0^n$, а правоинвариантные поля представляются векторами $w_1^0, \ldots, w_n^0$. Положим

$$W^0=\|(w_j^0)^i\|.$$

При правом сдвиге на G координаты $x_0^1, \ldots, x_0^n$ переходят в координаты $x^1,\ldots,x_n$, а векторы $w_1^0, \ldots, w_n^0$ — в векторы $w,\ldots,w_n$. Как известно,

$$W=JW^0, \; dx^1\ldots dx^n=\det J\, dx_0^1\ldots dx_0^n, \tag{9}$$

где J — матрица Якоби преобразования $x_0\to x$.

Из соотношения (9) получаем равенство

$$\det W^{-1}\,dx^1\ldots dx^n=\det(W^0)^{-1}\,dx_0^1\ldots dx_0^n.$$

Это означает, что фазовый поток системы (8) имеет интегральный инвариант с плотностью $\det W^{-1}$. Лемма доказана.

Применяя следствие из леммы 1 и учитывая равенство (7), приходим к заключению теоремы 2.

4. Небезынтересно привести прямое доказательство теоремы 1, использующее аналитический критерий унимодулярности [3]:

$$c_{ik}^{k}=0, \quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{10}$$

Лемма 2. *В предположении* (10) *для всех значений* ω *уравнения* (8) *имеют интегральный инвариант с плотностью* $\det V^{-1}$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$K=\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}V-\dot{V}, \tag{11}$$

где $\dot{V}$ — производная в силу системы (8). Легко проверить, что j-й столбец матрицы K равен

$$v_k c_{ij}^{k}\omega^i,$$

а элемент матрицы $V^{-1}K$ с номером k, j равен

$$c_{ij}^{k}\omega^i.$$

Умножим равенство (11) на V^{-1} слева и вычислим след правой и левой частей полученного матричного равенства:

$$\operatorname{tr} V^{-1}K=\operatorname{tr} V^{-1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}V-\operatorname{tr} V^{-1}\dot{V}.$$

Ввиду предположения (10) $\operatorname{tr}V^{-1}K=0$. Далее,

$$\operatorname{tr} V^{-1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}V=\operatorname{tr}\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}$$

— это дивергенция правой части системы (8). Наконец,

$$\operatorname{tr} V^{-1}\dot{V}=\frac{d}{dt}\ln\det V.$$

В результате приходим к тождеству

$$\operatorname{tr}\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}+\frac{d}{dt}\ln(\det V)^{-1}=0,$$

которое по теореме Лиувилля определяет $(\det V)^{-1}$ как плотность интегрального инварианта системы (8). Лемма доказана.

Аналогичный результат справедлив и для системы дифференциальных уравнений (5), в которую $s^1,\ldots,s^n$ входят как параметры и которая определяет левые сдвиги на группе G. Функция $(\det W)^{-1}$ — плотность ее интегрального инварианта при всех значениях s. Следовательно, для унимодулярной группы плотность меры Хаара равна $a(\det W)^{-1}$, $a=\mathrm{const}\neq 0$. Учитывая соотношение (7), приходим к выводу, что мера Хаара инвариантна относительно фазового потока приведенной системы на унимодулярной группе G.

Что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Poincaré A. Sur une forme nouvelle des équations de la méchanique//C. r. Acad. Sci. Paris. 1901. **132.** 369—371.

2. К о з л о в В. В. Вихревая теория волчка//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1990. № 4. 56—62.
3. Б у р б а к и Н. Интегрирование. М., 1970.

Поступила в редакцию
10.09.92