ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА. 1992. № 5

УДК 531.01

В. В. Козлов, А. Ю. Хмелевская

ОБ ИМПУЛЬСНОМ ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ УПРАВЛЕНИИ

1. Пусть M^n — компактное конфигурационное пространство механической системы с n степенями свободы, $x=(x^1, ..., x^n)$ — лагранжевы координаты,

$$T=\frac{1}{2}\Sigma g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j \qquad (1)$$

— кинетическая энергия. Предположим, что система находится в потенциальном силовом поле; пусть $V(x)$ — потенциальная энергия.

Управление осуществляется импульсными (ударными) воздействиями, которые меняют направление скорости $\dot{x}$, не изменяя ее величины (во внутренней метрике (1)), так что полная энергия $h=T+V$ сохраняется, а управляющие силы являются гироскопическими.

Рассмотрим следующую задачу: перевести систему из положения x_1 в положение x_2 при заданном значении полной энергии h с помощью конечного числа импульсных воздействий. Если $h>\max_M V$, то эта задача имеет тривиальное решение: по теореме Хопфа—Ринова (см. [1]) любые две точки на M можно соединить кратчайшей геодезической метрики Якоби

$$2(h-V(x))\Sigma g_{ij}dx^i dx^j,$$

которая является траекторией механической системы с энергией h. В этом случае не требуется никаких управляющих воздействий. При

$$h<\max_M V \tag{2}$$

ситуация иная: всегда найдутся пары точек x_1, x_2, не соединимые никакой траекторией с энергией h. В дальнейшем рассматривается случай, когда справедливо неравенство (2).

2. Зафиксируем значение полной энергии h и введем область возможности движения

$$B=\{x\in M: V(x)\leqslant h\}.$$

Область B предполагается связной. В противном случае краевая задача импульсного управления неразрешима по очевидным соображениям.

Теорема. 1. *Если на границе области B нет положений равновесия, то систему можно перевести из любого положения $x_1\in B$ в любое заданное положение $x_2\in B$ с помощью конечного числа импульсных воздействий.*

Условие отсутствия равновесий существенно: если $x_0\in\partial B$ — равновесие, то скорость в этом положении равна нулю и систему нельзя вывести из него никаким изоэнергетическим импульсным воздействием.

Доказательство теоремы 1 использует два известных результата. Пусть x — внутренняя точка области B. Тогда траектории системы с фиксированной энергией h, проходящие через точку x, целиком заполнят некоторую ее окрестность (см. [1]). Далее, совокупность траекторий, начинающихся на границе ∂B, заполняет окрестность границы [2].

Пусть $k(x_1, x_2)$ — наименьшее число импульсных воздействий, необходимых для того, чтобы перевести систему из положения x_1 в положение x_2. Ввиду обратимости $k(x_1, x_2)=k(x_2, x_1)$. Положим

$$K=\max_{x_1,x_2\in B} k(x_1, x_2).$$

В силу компактности M^n величина K всегда конечна. Число K является важной характеристикой механической системы; оно, разумеется, зависит от энергии h.

Теорема 2 (принцип максимума). *Если $dV\neq0$ на ∂B, то*

$$K=\max_{x_1,x_2\in\partial B} k(x_1, x_2). \tag{3}$$

Другими словами, K равно максимальному числу переключений, необходимому для перевода системы из любого положения x_1 на границе ∂B в любое положение $x_2\in\partial B$. Теорема 2 просто выводится из теоремы о попадании на границу [2]: через каждую точку $x\in B$ проходит хотя бы одна траектория, пересекающаяся с ∂B.

В качестве простого примера рассмотрим полигармонический осциллятор, описываемый системой линейных уравнений

$$\ddot{x}_1+\omega_1^2x_1=0, \ldots , \ddot{x}_n+\omega_n^2x_n=0;\ \omega_k=\text{const}>0. \tag{4}$$

В этой задаче граница области возможности движения (для положительных значений полной энергии) является $(n-1)$-мерным эллипсоидом. При $n=2$, очевидно, $K=1$ (так как любые две траектории, выходящие с границы, всегда пересекаются). В многомерном случае $K>1$. Однако если частоты $\omega_1, ..., \omega_n$ несоизмеримы, то $K=2$. При этом предположении траектории системы (4) подходят сколь угодно близко друг к другу.

3. Рассмотрим более общий случай, когда на систему наложены линейные неголономные связи

$$a_1(x)\cdot\dot{x}=0, \ldots , a_m(x)\cdot\dot{x}=0. \tag{5}$$

Ковекторы $a_1, ..., a_m$ предполагаются линейно независимыми. Связи (5) называются вполне неголономными, если любые две точки x_1, $x_2 \in M^n$ соединимы хотя бы одним кусочно гладким допустимым путем (т. е. существует кусочно гладкая функция $x(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, такая, что

а) $x(t_1)=x_1$, $x(t_2)=x_2$;

б) $x(t)$ удовлетворяет (5) для почти всех t).

Аналитические условия полной неголономности можно найти, например, в [3]. Примерами могут служить сани Чаплыгина и шар, катящийся без проскальзывания.

Теорема. 3. *Предположим, что связи* (5) *вполне неголономны и на границе ∂B нет положений равновесия неголономной системы. Тогда справедливо заключение теоремы 1.*

Если связи интегрируемы или на границе имеются положения равновесия, то заключение теоремы, очевидно, несправедливо. Доказательство теоремы 3 основывается на следующих двух утверждениях вспомогательного характера.

Лемма 1. *Если на границе ∂B нет положений равновесия, то совокупность всех траекторий, начинающихся в точках ∂B, целиком заполняет некоторую окрестность ∂B.*

Доказательство использует теорему о неявных функциях.

Векторное поле $v(x)$ на M^n называется допустимым, если $a_1\cdot v=...=a_m\cdot v=0$.

Лемма 2 (теорема Рашевского—Чжоу [3]). Пусть v_1, ..., v_{n-m} — *линейно независимые допустимые поля. Тогда любые две близкие точки x_1 и x_2 на M^n могут быть соединены допустимым кусочно гладким путем, составленным из интегральных кривых векторных полей $v_1, ..., v_{n-m}$.*

В нашем случае допустимые поля можно выбрать таким образом, чтобы их интегральные кривые были траекториями рассматриваемой неголономной системы с заданной энергией.

Можно показать, что и в этом случае число K будет конечным.

4. В заключение сформулируем некоторые нерешенные задачи.

а) Может ли число K принимать сколь угодно большие значения?

б) Справедливо ли для неголономных систем соотношение (3)?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Милнор Дж. Теория Морса. М., 1965.
2. Козлов В. В. О геометрии областей возможных движений с краем // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1977. № 5. 118—120.
3. Рашевский П. К. О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Уч. зап. Моск. пед. ин-та им. К. Либкнехта. Сер. физ.-матем. 1938. № 2. 83—95.

Поступила в редакцию
24.03.92