Математические заметки

том 51 выпуск 2 февраль 1992

ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ КВАЗИОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД КОВАЛЕВСКОЙ — ЛЯПУНОВА

В. В. Козлов

1. Квазиоднородные системы, тензорные законы сохранения. Система n дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^i = v^i(x^1, \ldots, x^n),\quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{1}$$

называется *квазиоднородной* с показателями квазиоднородности $g_1, \ldots, g_n$, если

$$v^i(\alpha^{g_1}x^1, \ldots, \alpha^{g_n}x^n) = \alpha^{g_i+1}v^i(x^1, \ldots, x^n) \tag{2}$$

при всех значениях x и $\alpha > 0$. Другими словами, уравнения (1) инварианты при подстановке

$$x^i \to \alpha^{g_i}x^i,\quad t \to t/\alpha.$$

Примером служит система с однородными квадратичными правыми частями: здесь $g_1 = \ldots = g_n = 1$. В частности, в этот класс попадают уравнения Эйлера — Пуанкаре, описывающие геодезические на группах Ли с инвариантной метрикой. Популярный пример из динамики — задача Кирхгофа о движении твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости. Другие примеры квазиоднородных систем дают уравнения задачи многих гравитирующих тел, а также уравнения Эйлера — Пуассона, описывающие вращение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Эти замечания показывают целесообразность рассмотрения квазиоднородных систем с точки зрения приложений.

Напомним, что тензорное поле $T(x)$ является *инвариантом* («законом сохранения») для системы (1), если $L_vT = 0$, где L_v — производная Ли вдоль векторного поля v. Приведем явное выражение для производной Ли для тензорного поля типа (p, q):

$$L_vT^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = v^s\frac{\partial}{\partial x^s}T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + T^{i_1\ldots i_p}_{kj_2\ldots j_q}\frac{\partial v^k}{\partial x^{j_1}} + \ldots + T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{q-1}k}\frac{\partial v^k}{\partial x^{j_q}} - T^{li_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\frac{\partial v^{i_1}}{\partial x^l} - \ldots - T^{i_1\ldots i_{p-1}l}_{j_1\ldots j_q}\frac{\partial v^{i_p}}{\partial x^l}. \tag{3}$$

Скалярные инварианты являются интегралами системы (1), инвариантные векторные поля — полями симметрий (они коммутируют с полем v), а инвариантные внешние формы порождают интегральные инварианты этой системы.

Тензорное поле T типа (p, q) назовем *квазиоднородным* степени m с показателями квазиоднородности $g_1, \ldots, g_n$, если

$$T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}(\lambda^{g_1}x^1, \ldots, \lambda^{g_n}x^n) = \lambda^{m-g_{j_1}-\ldots-g_{j_q}+g_{i_1}+\ldots+g_{i_n}} T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}(x). \qquad (4)$$

Эквивалентное определение:

$$T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\frac{x^{j_1}\ldots x^{j_q}}{x^{i_1}\ldots x^{i_p}}$$

— квазиоднородные функции от $x^1, \ldots, x^n$ степени m.

Целесообразность введения квазиоднородных тензорных полей диктуется следующим обстоятельством: все слагаемые в выражении для производной Ли (3) являются квазиоднородными функциями одной и той же степени. В частности, при решении задачи об инвариантных тензорных полях квазиоднородных систем мы можем ограничиться рассмотрением квазиоднородных тензоров: разложим компоненты инвариантного тензора в ряд по квазиоднородным формам; тогда слагаемые одной и той же степени дают, очевидно, квазиоднородное инвариантное тензорное поле.

2. Метод Ковалевской — Ляпунова. В классической работе Ковалевской [1] решена задача об условиях мероморфности полного решения уравнений вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Метод Ковалевской развит в работе Ляпунова [2], что позволило решить более общую задачу об однозначности общего решения как функции комплексного времени. Следуя [3], применим метод Ковалевской — Ляпунова для квазиоднородных систем (1). Попутно будут введены объекты, необходимые для дальнейшего рассмотрения.

Уравнения (1) имеют частные решения следующего вида:

$$x^1 = c_1 t^{-g_1}, \ \ldots, \ x^n = c_n t^{-g_n}. \qquad (5)$$

Постоянные коэффициенты (в общем случае комплексные) c_i удовлетворяют алгебраической системе уравнений

$$v^i(c_1, \ldots, c_n) = -g_i c_i.$$

Эта система, как правило, имеет нетривиальные решения.

Выпишем уравнения в вариациях для частного решения (5):

$$\dot\xi^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}(c_1 t^{-g_1}, \ldots, c_n t^{-g_n})\,\xi^j. \qquad (6)$$

Дифференцируя тождество (2) по x^j, получим равенство

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^j}(\alpha^{g_1}x^1, \ldots, \alpha^{g_n}x^n) = \alpha^{g_i-g_j+1}\frac{\partial v^i}{\partial x^j}(x^1, \ldots, x^n). \qquad (7)$$

Подставляя $\alpha = 1/t$ в (7), перепишем уравнения (6):

$$\xi^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}(c)\, t^{g_j - g_i - 1}\xi^j, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Эта линейная система имеет частные решения

$$\xi^1 = \varphi^1 t^{\rho - g_1}, \ldots, \xi^n = \varphi^n t^{\rho - g_n},$$

где ρ — собственное значение, а φ — собственный вектор матрицы $K = \| K_j^i \|$, где

$$K_j^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}(c) + \delta_j^i g_i.$$

Здесь δ_j^i — символ Кронекера.

Матрица K впервые появилась в работе [1]. Поэтому она называется *матрицей Ковалевской*, а ее собственные значения — *показателями Ковалевской* (см. [3]).

Предположим, что все g_i — целые положительные числа. Можно показать (см. [3]), что если общее решение системы (1) представляется однозначными (мероморфными) функциями комплексного времени, то показатели Ковалевской ρ_j являются целыми (соответственно целыми неотрицательными) числами.

В работе Иошиды [3] рассмотрена задача о наличии квазиоднородных интегралов системы (1) (инвариантных тензоров типа (0, 0)) и доказана следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть f — квазиоднородный интеграл степени m с показателями квазиоднородности $g_1, \ldots, g_n$ и $\mathrm{d}f(c) \neq 0$. Тогда $\rho = m$ — показатель Ковалевской.*

Этот результат устанавливает замечательную связь между свойством мероморфности общего решения и наличием непостоянных интегралов. Отметим, что если имеется k квазиоднородных интегралов $f_1, \ldots, f_k$ одной и той же степени m, причем их дифференциалы $\mathrm{d}f_1, \ldots, \mathrm{d}f_k$ линейно независимы в точке $x = c$, то $\rho = m$ — показатель Ковалевской кратности $\geqslant k$.

3. Основная теорема. Наша цель — распространить результат Иошиды на тензорные инварианты произвольного типа. Мы будем рассматривать тензорные поля типа (p, q), $p + q \geqslant 1$.

ТЕОРЕМА. *Предположим, что система* (1) *допускает квазиоднородный тензорный инвариант степени m, причем $T(c) \neq 0$. Тогда найдутся целые числа $1 \leqslant i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \leqslant n$ такие, что*

$$\rho_{i_1} + \ldots + \rho_{i_p} - \rho_{j_1} - \ldots - \rho_{j_q} + m = 0. \qquad (8)$$

Из этого результата можно вывести ряд следствий. Сначала получим теорему Иошиды из п. 2. Пусть f — квазиоднородный интеграл степени m, причем точка $x = c$ не является для него критической. Рассмотрим тензорное поле типа (0, 1):

$$T_i = \partial f / \partial x^i.$$

В силу определения п.1 оно квазиоднородное и его степень равна m. Так как производная Ли коммутирует с операцией дифференцирования, то тензорное поле T_i является инвариантом для системы (1). Остается применить основную теорему и воспользоваться соотношением (8).

Рассмотрим теперь векторное поле $u = \{u^i\}$, коммутирующее с исходным полем $v = \{v^i\}$. Это тензорное поле типа (1, 0), являющееся инвариантом для системы (1).

Следствие 1. *Предположим, что система* (1) *допускает квазиоднородное поле симметрий степени* m, *причем* $u(c) \neq 0$. *Тогда* $\rho = -m$ — *показатель Ковалевской.*

Это утверждение показывает любопытную связь между условием однозначности общего решения квазиоднородной системы и наличием нетривиальных симметрий (см. п. 2). Если система (1) допускает k квазиоднородных полей симметрий $u_1, \ldots, u_k$ одной и той же степени m, линейно независимых в точке $x = c$, то $\rho = -m$ — показатель Ковалевской кратности $\geqslant k$.

Следствие 2. *Если* $c \neq 0$, *то* $\rho = -1$ — *показатель Ковалевской.*

Действительно, $u \equiv v$ — квазиоднородное поле симметрий степени $m = 1$. Остается заметить, что $v^i(c) = -g_i c_i$ и $g_i \neq 0$.

Этот результат можно получить иначе. Ввиду автономности система (1) имеет семейство решений

$$x^i(t, a) = c_i/(t+a)^{g_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

где a — вещественный параметр. Производные

$$\left.\frac{\partial x^i}{\partial a}\right|_{a=0} = -\frac{c_i g_i}{t^{g_i+1}}$$

удовлетворяют уравнениям в вариациях (6). Следовательно, $\rho = -1$ — собственное значение матрицы K с собственным вектором $(-c_1 g_1, \ldots, -c_n g_n) \neq 0$.

4. Доказательство основной теоремы. Приравняем нулю правую часть (3) и подставим в полученное тождество вместо x решение (5). Тогда

$$v^s \left.\frac{\partial T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}}{\partial x^s}\right|_{x=ct^{-g}} = -\frac{1}{t}\sum_s g_s \frac{c_s}{t^{g_s}} \frac{\partial T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}}{\partial x^s}(ct^{-g}) =$$

$$= -\frac{1}{t} g_s x^s \left.\frac{\partial T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}}{\partial x^s}\right|_{x=ct^{-g}} =$$

$$= -\frac{1}{t}(m - g_{j_1} - \ldots - g_{j_q} + g_{i_1} + \ldots + g_{i_n}) T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\left(\frac{c}{t^g}\right) =$$

$$= -\frac{m - g_{j_1} - \ldots - g_{j_q} + g_{i_1} + \ldots + g_{i_n}}{t^{m-g_{j_1}-\ldots-g_{j_q}+g_{i_1}+\ldots+g_{i_n}+1}} T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}(c).$$

Здесь использована формула Эйлера для квазиоднородных функций (надо продифференцировать тождество (4) по λ и положить затем $\lambda = 1$). С помощью тождества (7) преобразуем остальные слагаемые в правой части (3):

$$T^{i_1\ldots i_p}_{kj_2\ldots j_q}\left(\frac{c}{t^g}\right)\frac{\partial v^k}{\partial x^{j_1}}\bigg|_{ct^{-g}} = \frac{T^{i_1\ldots i_p}_{kj_2\ldots j_q}(c)\dfrac{\partial v^k}{\partial x^{j_1}}(c)}{t^{m-g_k-g_{j_2}-\ldots-g_{j_q}+g_{i_1}+\ldots+g_{i_n}g_k-g_{j_1}+1}}, \ldots$$

В результате приходим к равенству

$$-(m-g_{j_1}-\ldots-g_{j_q}+g_{i_1}+\ldots+g_{i_n})T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}+$$
$$+T^{i_1\ldots i_p}_{kj_2\ldots j_q}\frac{\partial v^k}{\partial x^{j_1}}+\ldots+T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{q-1}k}\frac{\partial v^k}{\partial x^{j_q}}-$$
$$-T^{li_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\frac{\partial v^{i_1}}{\partial x^l}-\ldots-T^{i_1\ldots i_{p-1}l}_{j_1\ldots j_q}\frac{\partial v^{i_p}}{\partial x^l}=0.$$

Вспоминая определение матрицы Ковалевской, получаем окончательно

$$-mT^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}+T^{i_1\ldots i_p}_{kj_2\ldots j_q}K^k_{j_1}+\ldots+T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{q-1}k}K^k_{j_q}-$$
$$-T^{li_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}K^{i_1}_l-\ldots-T^{i_1\ldots i_{p-1}l}_{j_1\ldots j_q}K^{i_p}_l=0. \tag{9}$$

Без ущерба общности можно считать, что матрица K приведена к треугольному виду. Упорядочим элементы тензора T по возрастающим значениям индексов i и убывающим значениям j. Систему (9) естественно рассматривать как линейную алгебраическую систему уравнений относительно элементов T. В силу принятых соглашений матрица левой части этой системы будет иметь треугольный вид с диагональными элементами вида

$$-m+\rho_{j_1}+\ldots+\rho_{j_q}-\rho_{i_1}-\ldots-\rho_{i_p}, \tag{10}$$

где ρ_μ — показатели Ковалевской. Ее определитель равен, очевидно, произведению чисел (10). Поскольку предполагается, что в точке $x = c$ тензор T отличен от нуля, то хотя бы одно из этих чисел обращается в нуль.

Отметим, что в типичном случае приводимости матрицы Ковалевской к диагональному виду $\operatorname{diag}[\rho_1, \ldots, \rho_n]$ соотношения (9) можно упростить:

$$(-m+\rho_{j_1}+\ldots+\rho_{j_q}-\rho_{i_1}-\ldots-\rho_{i_p})T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}(c)=0.$$

Так как хотя бы один из элементов тензора T отличен от нуля, то снова получаем заключение основной теоремы.

5. **Квазиоднородные уравнения Гамильтона.** Применим теперь изложенные выше соображения к уравнениям Гамильтона

$$\dot{x}_k = \partial H/\partial y_k,\ \dot{y}_k = -\partial H/\partial x_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{11}$$

с квазиоднородным гамильтонианом степени h

$$H(\alpha^{g_1}x_1, \alpha^{f_1}y_1, \ldots, \alpha^{g_n}x_n, \alpha^{f_n}y_n) = \alpha^h H(x, y). \tag{12}$$

Здесь g_k, f_k — набор показателей квазиоднородности. Нетрудно убедиться в том, что уравнения (11) будут квазиоднородными в смысле определения п. 1, если

$$f_k + g_k = 1$$

для всех $k = 1, \ldots, n$. В этом случае среди показателей Ковалевской всегда будут числа $\rho_1 = h$ и $\rho_2 = -1$.

Предположим, что уравнения (11) допускают частные решения

$$x_k = u_k t^{-g_k}, \quad y_k = v_k t^{-f_k}, \ 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{13}$$

причем $\sum (|u_k| + |v_k|) \neq 0$.

Предложение. *Пусть $\Phi(x, y)$ — квазиоднородный интеграл степени m уравнений* (11), *независимый с гамильтонианом* (12) *в точке $(x, y) = (u, v)$: ранг матрицы Якоби функций H и Φ равен двум. Тогда $\rho_1 = m$ и $\rho_2 = h - m - 1$ — показатели Ковалевской.*

Доказательство. Так как Φ — квазиоднородный интеграл уравнений (11), то $\rho = m$ — показатель Ковалевской (теорема Иошиды). Гамильтонова система уравнений

$$x_k' = \partial\Phi/\partial y_k, \ y_k' = -\partial\Phi/\partial x_k, \ 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{14}$$

будет квазиоднородной системой степени $m + 1 - f_k - g_k = m + 1 - h$. Так как функции H и Φ находятся в инволюции, то гамильтоново поле (14) является полем симметрий для системы (11). Так как функции H и Φ независимы в точке $(x, y) = (u, v)$, то поля (11) и (14) также независимы в этой точке. Остается применить следствие 1 из п. 3.

Замечание. Если $m \neq h$, то условие независимости функций H и Φ можно, очевидно, заменить более слабым: $d\Phi \neq 0$ при $x = u$, $y = v$.

Отметим, что сумма $\rho_1 + \rho_2 = h - 1$ не зависит от степени интеграла. Оказывается, это наблюдение не случайно: показатели Ковалевской для квазиоднородных гамильтоновых систем разбиваются на пары, сумма которых равна $h - 1$. Это утверждение — аналог известной теоремы Пуанкаре — Ляпунова о возвратности характеристического уравнения для мультипликаторов периодического решения уравнений Гамильтона. Доказательство основано на простом замечании, что уравнения в вариациях (6) в рассматриваемом случае будут гамильтоновыми:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \sum \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial x_k}\xi_k + \sum \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_k}\eta_k, \\ \dot{\eta}_i &= -\sum \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k}\xi_k - \sum \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial y_k}\eta_k, \qquad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь в выражения для вторых производных гамильтониана H надо подставить формулы (13). Пусть (ξ, η) и (ξ^*, η^*) — два решения уравнений (15). Легко проверить, что сумма

$$\sum (\xi_k \eta_k^* - \xi_k^* \eta_k) \tag{16}$$

будет постоянной. Положим

$$\xi_k = \frac{\varphi_k}{t^{\rho_1 - g_k}} \qquad \eta_k = \frac{\psi_k}{t^{\rho_1 - f_k}}, \qquad \xi_k^* = \frac{\varphi_k^*}{t^{\rho_2 - g_k}}, \qquad \eta_k^* = \frac{\psi_k^*}{t^{\rho_2 - f_k}}.$$

Тогда (16) примет вид

$$t^{f_k + g_k - \rho_1 - \rho_2} \sum (\varphi_k \psi_k^* - \varphi_k^* \varphi_k).$$

Эта сумма не зависит от времени в двух случаях: 1) $\rho_1 + \rho_2 = f_k + g_k = h - 1$; 2) сумма

$$\sum (\varphi_k \psi_k^* - \varphi_k^* \psi_k) = 0. \tag{17}$$

Во втором случае векторы

$$\mu = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_n), \quad \mu^* = (\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*, \psi_1^*, \ldots, \psi_n^*)$$

«косоортогональны». Предположим, что вектор μ косоортогонален всем собственным векторам матрицы K. Поскольку эти векторы образуют базис в $\mathbf{C}^{2n}$, то μ косоортогонален всем векторам из $\mathbf{C}^{2n}$. Но тогда $\mu = 0$. Итак, всегда найдется вектор μ^* такой, что сумма (17) отлична от нуля. Что и требовалось доказать.

Предположим, что степени гамильтониана и дополнительного интеграла являются целыми числами. Тогда среди показателей Ковалевской появляется дополнительная пара целых чисел. Одно из них — степень нового интеграла, а другое — взятая с обратным знаком степень гамильтонова поля симметрий, порождаемого этим интегралом.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
08.10.91

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ковалевская С. В. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки // Научные работы. М.: Наука, 1948. С. 153—220.
[2] Ляпунов А. М. Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Собр. соч. Т. I. М.: Изд-во АН СССР, 1954. С. 402—417.
[3] Yoshida H. Necessary condition for the existance of algebrais first integrals // Celestial Mechanics. 1983. V. 31. P. 363—399.