УДК 531.36

В. В. Козлов

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ И МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА *

Несмотря на ту высокую степень развития, до которой доведены науки математические трудами великих геометров трех последних столетий, практика обнаруживает ясно неполноту их во многих отношениях: она предлагает вопросы существенно новые для науки и таким образом вызывает на изыскание совершенно новых метод.

П. Л. Чебышев

1. Общеизвестны выдающиеся достижения П. Л. Чебышева в аналитической теории чисел и теории вероятностей. Хорошо известен и его постоянный интерес к прикладным задачам, в частности к механике [1]. Более того, ряд теоретических результатов П. Л. Чебышева возник как раз в связи с конкретными прикладными задачами механики. Яркий пример — открытие ортогональных многочленов, «наименее уклоняющихся от нуля», для конструирования приближенных «прямил». Напомним, что при $|z|\leqslant 1$ многочлены Чебышева $T_n(z)$, $n=1$, $2, \ldots$, определяются как $\cos(n \arccos z)$.

В настоящей работе обсуждаются некоторые задачи, связанные с устойчивостью движения механических систем. Сам П. Л. Чебышев специально не занимался этой проблемой. Однако он стимулировал интерес своего ученика А. М. Ляпунова к проблеме устойчивости, поставив перед ним задачу о формах равновесия вращающейся массы жидкости, отличных от эллипсоидов.

Как известно, для обратимых консервативных систем положения равновесия совпадают с критическими точками потенциальной энергии. Согласно классической теореме Лагранжа—Дирихле равновесие устойчиво, если в этой точке потенциальная энергия V имеет строгий локальный минимум. Пусть система зависит от параметра ε, и при переходе через значение ε_* функция V уже не будет иметь минимума. Тогда, как правило, при $\varepsilon=\varepsilon_*$ происходит бифуркация положений равновесия. В задаче Чебышева присутствуют гироскопические силы, и из-за этого проблема устойчивости становится более сложной.

2. Согласно гипотезе Ляпунова [2] для обратимых аналитических систем справедлив энергетический критерий устойчивости положений равновесия: устойчивость имеет место тогда и только тогда, когда в этом положении потенциальная энергия принимает строгий локальный минимум. К сожалению, до настоящего времени эта гипотеза в полном объеме пока не доказана, несмотря на усилия многих авторов (см., например, обзор [3]). Отметим, что в бесконечно дифференцируемом случае энергетический критерий уже не справедлив (контрпример Пенлеве—Уинтнера [4]). В. П. Паламодов доказал гипотезу Ляпунова для систем с двумя степенями свободы [5] (в одномерном случае это лег-

* Эта статья написана по материалам выступления автора на Чебышевских чтениях 25 октября 1990 г.

кое упражнение). Укажем некоторые недавние результаты в этом направлении.

Итак, пусть $x=0$ — критическая точка гладкой потенциальной энергии $V(x)$. Сопоставим функции V ее ряд Маклорена

$$V_m+V_{m+1}+\ldots,\quad m\geqslant 2, \tag{1}$$

где V_k — однородная форма переменных x степени k, $V_m\not\equiv 0$. В приложениях обычно $m=2$. В [6, 7] установлено, что если первая нетривиальная форма V_m в (1) не имеет в точке $x=0$ минимума, то равновесие неустойчиво. Этот результат позволяет, в частности, дать полное и строгое доказательство фундаментальной теоремы Ирншоу о неустойчивости равновесия свободной системы зарядов в любом электростатическом поле [8]. Здесь V (следовательно, и V_m) — гармоническая функция, и по теореме о среднем V_m не может принимать в точке $x=0$ минимального значения. Ранее теорема Ирншоу была доказана лишь при $m=2$. Отметим, что тем же способом можно доказать неустойчивость равновесия заряда в стационарном электрическом поле в релятивистской постановке.

В [9] получено более сильное утверждение: если $V=V_2+V_m+\ldots$ и сумма V_2+V_m не имеет в точке $x=0$ локального минимума, то равновесие $x=0$ неустойчиво. Доказательство результатов [6—9] использует построение асимптотических решений в форме рядов определенного вида. При $m=2$ это результат Ляпунова [2].

Усложним задачу, введя дополнительные диссипативные силы с полной диссипацией. При этом положения равновесия не изменятся. Хорошо известно, что точки локального минимума функции V снова отвечают устойчивым положениям равновесия. В [10] доказано, что если аналитическая функция V не имеет минимума, то это равновесие неустойчиво. Казалось бы, наличие диссипации может только укрепить устойчивость равновесия, однако в этом случае возможно дать несложное доказательство энергетического критерия.

Рассмотрим еще один класс систем, для которых удается продвинуться в исследовании устойчивости. Это системы с нестационарными потенциалами вида $p(t)V(x)$, где $p>0$. Здесь снова критические точки функции V и только они отвечают положениям равновесия. Системы с такими потенциалами часто встречаются в приложениях. Примером служит уравнение Чаплыгина

$$\ddot{x}=kt^2\sin x,\quad k=\text{const}\neq 0, \tag{2}$$

описывающее вращение тяжелой пластинки в идеальной жидкости [11].

Пусть выполнены следующие условия:

$$1)\ \dot{p}\geqslant 0,\ \ 2)\ \lim_{t\to+\infty}p(t)=+\infty,\ \ 3)\ \ddot{p}p\leqslant(3/2)\dot{p}^2 \tag{3}$$

и функция V аналитична по x в окрестности точки $x=0$. Тогда, если V имеет при $x=0$ строгий локальный минимум, то равновесие $x=0$ асимптотически устойчиво по отношению к координатам x ($x(t)\to 0$ при $t\to+\infty$). Если же функция V не имеет в точке $x=0$ локального минимума, то равновесие $x=0$ неустойчиво [12]. Отметим, что условия (3) заведомо справедливы для уравнения (2).

3. В физической литературе можно встретить высказывания об устойчивости равновесия в непотенциальном поле в предположении, что поле сил направлено к положению равновесия (ср. с [13]). Понимаемое буквально, это утверждение легко опровергается примером «квазипотенциального» поля:

$$\ddot{x}_i = -p\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i=1, \ldots, n. \tag{4}$$

Здесь p — гладкая положительная функция от x. Если $x=0$ — точка локального минимума V, то силовое поле направлено как раз к точке $x=0$ и тем самым стремится «вернуть» систему к равновесию $x=0$.

Положим $n=2$, $p=1+x_1$, $V=x_1^2/2+x_2^2$. Можно показать, что в этом примере равновесие $x_1=x_2=0$ неустойчиво. Доказательство использует явление параметрического резонанса для уравнения Матье.

Более того, неустойчивость равновесия, по-видимому, может иметь место и в случае центральных непотенциальных сил, когда V — аналитическая положительно определенная функция от $|x|^2$.

4. Метод работ [6, 7, 9] позволяет продвинуться в задаче Ляпунова об устойчивости по отношению к заданным функциям состояния (см. [2]). Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с гладкими правыми частями:

$$\dot{x} = v(x), \quad v(0)=0. \tag{5}$$

Точка $x=0$ — состояние равновесия. Исследуем его устойчивость по отношению к гладкой функции $Q(x)$ $(Q(0)=0)$. Отметим, что эта задача не сводится к задаче об устойчивости по части переменных (см. [3]): если $dQ(0)=0$, то функцию Q нельзя включить в число независимых переменных в окрестности точки $x=0$.

Наряду с системой (5) рассмотрим систему

$$\dot{x} = -v(x), \tag{6}$$

полученную из (5) обращением времени.

Лемма. *Пусть система* (6) *допускает решение* $x(t)$, *такое, что*

1) $x(t)\to 0$ *при* $t\to+\infty$,

2) $q(t)=Q(x(t))\not\equiv 0$.

Тогда равновесие $x=0$ *системы* (5) *неустойчиво по отношению к функции* Q.

Асимптотические решения системы (6) можно искать в виде специальных рядов (например, по степеням $\exp(-\mu t)$, $\mu>0$, как это сделано в [2]). Рассмотрим вырожденный случай одного нулевого корня (когда ряды Ляпунова неприменимы). В типичной ситуации уравнения (6) приводятся к следующему виду:

$$\dot{z}=az^2+f(z, y)+O(|x|^3), \quad \dot{y}=By+O(|x|^2),$$

$$z\in\mathbf{R}, \quad y\in\mathbf{R}^{n-1}; \quad x=(z, y). \tag{7}$$

Здесь $a\neq 0$, B — невырожденная матрица, f — квадратичный многочлен, не содержащий z^2.

При сделанных предположениях уравнения (7) имеют асимптотическое решение в виде рядов

$$z=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{(k)}(\ln t)}{t^k}, \quad y=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{y^{(m)}(\ln t)}{t^m}, \tag{8}$$

где $z^{(k)}(\cdot)$, $y^{(m)}(\cdot)$ — некоторые многочлены, причем $z^{(1)}=-1/a$. Ряды (8), как правило, расходятся. Однако уравнения (7) и в этом случае имеют решения, для которых ряды (8) будут их асимптотическими разложениями (см. [14]).

Приведем простой пример расходимости рядов (8). Система

$$\dot{z}=z^2, \quad \dot{y}=y-z^2 \tag{9}$$

вида (7) допускает формальное решение

$$z=-1/t, \ y=\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k(k-1)!/t^k. \tag{10}$$

Ряд для $y(t)$ расходится при всех $t>0$. Однако система (9) имеет асимптотическое решение

$$z(t)=-\frac{1}{t}, \quad y(t)=e^t\int\limits_t^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u^2}\,du. \tag{11}$$

Проводя последовательное интегрирование по частям, получим асимптотический ряд (10).

Вернемся к задаче об устойчивости равновесия по отношению к функции $Q(x)=Q(z, y)$. Разлагая эту функцию в ряд Маклорена и подставляя вместо z, y ряды (8), получим для $q(t)$ асимптотическое представление

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{(k)}(\ln t)/t^k,$$

где $q^{(k)}(\cdot)$ — некоторые многочлены. Если хотя бы один из коэффициентов этого ряда отличен от нуля, то равновесие $x=0$ неустойчиво по отношению к функции Q.

5. Переход от (10) к (11) можно трактовать как суммирование расходящегося ряда. Например, при $t=1$ ряд

$$1!-2!+3!-\cdots$$

имеет сумму

$$e\int\limits_1^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u^2}\,du=0{,}4037\ldots.$$

Точно такой же результат в свое время был получен Эйлером несколькими различными способами (см. [15]).

Эти наблюдения можно обобщить. Предположим, что нам надо найти сумму ряда (возможно, расходящегося)

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k. \tag{12}$$

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n\geqslant 1} X_n/t^n, \quad X_n=x_n+(n-1)\,x_{n-1},$$

и предположим, что он сходится при всех $t>1$ к функции $X(t)$. Тогда в качестве суммы ряда (12) можно принять

$$\sum x_n = \lim_{t\to 1-0} e^t \int_t^{+\infty} e^{-u} X(u)\, du,$$

если предел существует. Этот метод суммирования по существу восходит к Эйлеру; поэтому назовем его E-методом (ср. с [15]). Несложно показать, что E-метод линеен и регулярен.

E-методом можно просуммировать целый класс расходящихся рядов, но, конечно, не все ряды. Отметим, что с помощью леммы Цорна несложно доказать существование некоторого «универсального» метода суммирования рядов, линейного и регулярного, который позволяет указать сумму любого расходящегося ряда. По существу эта проблема сводится к продолжению линейного функционала, заданного на линейном подпространстве сходящихся рядов и сопоставляющего каждому сходящемуся ряду его сумму (вспомните доказательство теоремы Хана—Банаха). Этот результат, однако, малосодержателен: практически невозможно вычислить сумму конкретного ряда.

В анализе, начиная с Эйлера, развивается другой подход к проблеме суммирования. Он состоит в использовании алгоритмов аналитического продолжения функций, заданных первоначально локальными степенными рядами. Такой подход позволяет свести задачу суммирования расходящегося ряда к конкретной алгоритмической задаче анализа.

П. Л. Чебышев активно развивал алгоритмический подход Эйлера. Кстати сказать, он входил в комиссию по изданию трудов Эйлера, организованную Петербургской Академией наук.

В связи с результатами п. 4 возникает интересная задача о возможности суммирования расходящихся рядов (8) E-методом. Сходятся ли эти ряды (разумеется, в обобщенном смысле) к решениям уравнений (7)?

6. Перейдем теперь к задаче иного типа: рассмотрим движение материальной точки по инерции внутри плоской области с регулярной выпуклой границей. Предполагается, что удар о границу является упругим: величина скорости не меняется и угол падения равен углу отражения. Эта динамическая система с ударами называется биллиардом Биркгофа [16]. Нас будут интересовать движения с замкнутыми траекториями; они будут периодическими.

Параметризуем границу угловой координатой $\varphi \bmod 2\pi$, где φ — длина дуги, умноженная на $2\pi/L$, L — длина границы. Траектория точки задается последовательностью точек удара о границу $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \ldots$. Ясно, что прямолинейный отрезок $[\varphi_1, \varphi_2]$ полностью определяет всю траекторию. Пусть f — отображение тора $\mathbf{T}^2$ на себя, заданное формулой $(\varphi_1, \varphi_2) \to (\varphi_2, \varphi_3)$. Если траектория — замкнутая n-звенная ломаная, то n-я итерация отображения f оставляет точку $(\varphi_1^0, \varphi_2^0) \in \mathbf{T}^2$ на месте.

Эта периодическая траектория устойчива, если последовательность точек $f^{nk}(\varphi_1, \varphi_2)$, $k=1, 2, \ldots$, остается вблизи точки $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$, когда (φ_1, φ_2) и $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$ достаточно близки. Для исследования устойчивости полезно ввести матрицу Пуанкаре P: это якобиан преобразования f^n в точке $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$. Можно показать, что $\det P=1$. Следовательно, λ и λ^{-1} одновременно являются собственными числами матрицы P (мультипликаторы периодической траектории). Имеются две возможности: 1) числа λ и λ^{-1} вещественны и отличны от 1 и -1; 2) λ и λ^{-1} лежат на единичной окружности. В первом случае периодическая траектория называется гиперболической. Она заведомо неустойчива. Во втором случае траектория называется эллиптической, если дополнительно $\lambda \neq \neq 1$ и $\lambda \neq -1$; она устойчива в линейном приближении. Случай $\lambda = -1$ отвечает параболической траектории. При $\lambda = 1$ имеем вырождение: при возмущении такая траектория может исчезнуть. Эллиптический случай отвечает неравенству $|\lambda + \lambda^{-1}| < 2$. В гиперболическом случае $|\lambda + \lambda^{-1}| > 2$.

Явное вычисление собственных чисел матрицы Пуанкаре — трудная задача, разрешимая лишь в исключительных случаях. К ним относится n-звенная траектория, переходящая в себя при повороте плоскости на угол $2\pi/n$. При этом граница биллиарда тоже должна оставаться на месте. Все звенья ломаной траектории имеют одинаковую длину l. Пусть ϑ — углы падения (или отражения), R — радиус кривизны границы в точках удара. Положим $s = 2l/(R \sin \vartheta)$.

Автором и Д. В. Трещевым доказана

Т е о р е м а. *Справедливо соотношение*

$$\lambda + \lambda^{-1} = Q_n(s) = 2T_n(s/2 - 1), \tag{13}$$

где T_n — многочлен Чебышева.

Появление в этой формуле многочленов Чебышева выглядит загадочным. Доказательство теоремы основывается на результатах работы [17].

При $n = 2, 3, 4$ имеем

$$Q_2 = s^2 - 4s + 2, \quad Q_3 = s^3 - 6s^2 + 9s - 2, \quad Q_4 = s^4 - 8s^3 + 20s^2 - 16s + 2.$$

Известно, что $|T_n(z)| \leqslant 1$ для $|z| \leqslant 1$, причем $|T_n(z)| = 1$ лишь для

$$z = \cos(k\pi/n), \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{14}$$

При $|z| > 1$ справедливо неравенство $|T_n(z)| > 1$. Следовательно, $|Q_n(s)| > 2$ при $s > 4$ и $|Q_n(s)| < 2$ при $0 < s < 4$. Из (13) и (14) следует, что $|\lambda| = 1$ тогда и только тогда, когда

$$l/(R \sin \vartheta) = 1 + \cos(k\pi/n), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

При четном k эта траектория вырождена, а при нечетных k она имеет параболический тип.

Было бы интересным распространить эти результаты на биллиарды Биркгофа на поверхностях постоянной кривизны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ч е б ы ш е в П. Л. Теория механизмов, известных под названием параллелограммов//Собр. соч. Т. II. М.; Л., 1947. 23—51.
2. Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.
3. К а р а п е т я н А. В., Р у м я н ц е в В. В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем. М., 1983.
4. У и н т н е р А. Аналитические основы небесной механики. М., 1967.
5. П а л а м о д о в В. П. Об устойчивости равновесия в потенциальном поле//Функц. анализ и его прилож. 1977. **11**, № 4. 42—55.
6. К о з л о в В. В. Асимптотические решения уравнений классической механики//Прикл. матем. и механ. 1982. **46**, № 4. 573—577.
7. К о з л о в В. В., П а л а м о д о в В. П. Об асимптотических решениях уравнений классической механики//Докл. АН СССР. 1982. **263**, № 2. 285—289.
8. Т а м м И. Е. Основы теории электричества. М., 1966.
9. К о з л о в В. В. Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа—Дирихле//Прикл. матем. и механ. 1986. **50**, вып. 6. 928—937.

10. Козлов В. В. Неустойчивость равновесия в потенциальном поле с учетом сил вязкого трения//Прикл. матем. и механ. 1981. **45**, вып. 3. 570—572.
11. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости//Полн. собр. соч. Т. I. Л., 1933. 133—150.
12. Козлов В. В. Об устойчивости положений равновесия в нестационарном силовом поле//Прикл. матем. и механ. 1991. **55**, вып. 1. 12—19.
13. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 5: Электричество и магнетизм. М., 1966.
14. Кузнецов А. Н. О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением//Функц. анализ и его прилож. 1989. **23**, вып. 4. 63—74.
15. Харди Г. Расходящиеся ряды. М., 1951.
16. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.; Л., 1941.
17. Трещев Д. В. К вопросу об устойчивости периодических траекторий бильярда Биркгофа//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1988. № 2. 44—50.

Поступила в редакцию
14.01.91