Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 5, 1991

УДК 531.36

В.В. Козлов, И.И. Чигур

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО БИЛЛИАРДА

Исследуется устойчивость периодических траекторий материальной точки, движущейся между двумя выпуклыми стенками с упругими отражениями. Эта задача тесно связана с теорией распространения волн в коротковолновом приближении [1]. Простейшая периодическая траектория — отрезок прямой, ортогональный стенкам в своих концевых точках. Задача об устойчивости двузвенной траектории была решена [1] для плоского случая. Ниже она решается в трехмерном пространстве при помощи метода, развитого в [2].

1. Постановка задачи. Исследуем устойчивость двузвенной периодической траектории биллиарда Биркгофа с тремя степенями свободы (фиг. 1): материальная точка постоянно движется по отрезку длины l, периодически упруго отражаясь от граничной поверхности Σ. Пусть O_1, O_2 — концевые точки двузвенной траектории. Введем декартовы координаты x, y, z; ось z направим вдоль отрезка O_1O_2. В окрестности точек O_1, O_2 уравнение поверхности Σ имеет вид

$$z = f_1(x, y) = a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + o(x^2 + y^2)$$
$$z = f_2(x, y) = l - a_2x^2 - b_2xy - c_2y^2 + o(x^2 + y^2)$$

В качестве параметра рассматриваемого периодического движения можно взять скорость точки v. Следуя [2], заменим односторонние связи полем упругих сил с потенциалом

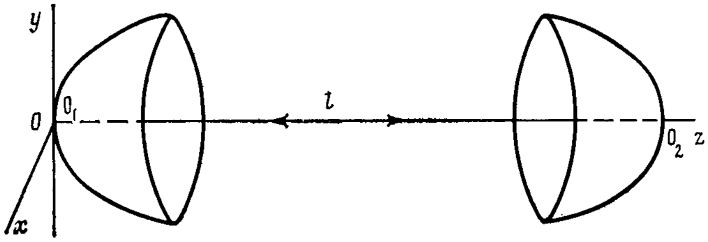
$$V_N = \begin{cases} 0, & f_1 \leqslant z \leqslant f_2 \\ N(z - f_i)^2/2, & z \leqslant f_1 \text{ и } z \geqslant f_2; \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

Здесь N — положительный параметр, который затем будет устремлен к $+\infty$. Задача о движении точки m в поле с потенциалом V_N имеет семейство периодических решений периода $2T$:

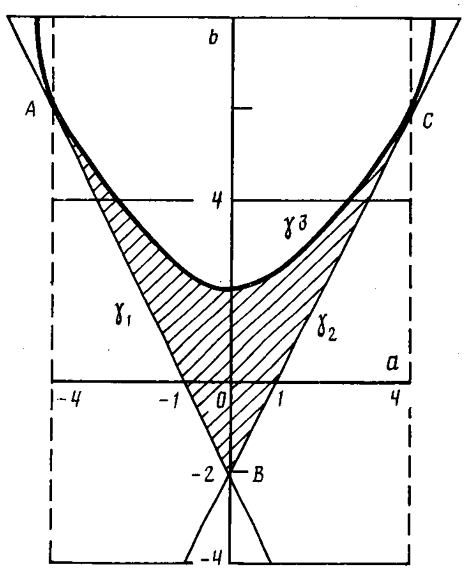
$$x_0(t) \equiv 0, \ y_0(t) \equiv 0, \ 0 \leqslant t \leqslant 2T$$
$$z_0(t) = \begin{cases} vN^{-1/2} \sin N^{-1/2} t, & 0 \leqslant t \leqslant \tau \\ v(t - \tau), & \tau \leqslant t \leqslant T \\ vN^{-1/2} \sin N^{-1/2}(t + T), & T \leqslant t \leqslant T + \tau \\ v(t - T - \tau), & T + \tau \leqslant t \leqslant 2T \end{cases} \tag{1.1}$$
$$\tau = \pi N^{-1/2}, \ T = \tau + l/v$$

Используя метод Ляпунова [3], исследуем устойчивость в линейном приближении периодического движения (1.1) для достаточно больших значений N. Как доказано в [2], при $N \to +\infty$ условия устойчивости решения (1.1) перейдут в условия устойчивости двузвенной траектории биллиарда Биркгофа.

2. Обобщенный метод Ляпунова. Уравнения в вариациях для периодического решения (1.1) представим в виде линейной системы дифферен-



Фиг. 1



Фиг. 2

циальных уравнений первого порядка

$$(\delta z)^{\cdot} = A(t)\,\delta z, \quad A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2a_i p_i(t) & 0 & -b_i p_i(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -b_i p_i(t) & 0 & -2c_i p_i(t) & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.1}$$

$p_i(t) = (-1)^i vN^{-1/2} \sin N^{-1/2} t$ при $t \in (0, \tau)$, $i = 1$ и $t \in (T, T + \tau)$, $i = 2$, $p_i(t) \equiv 0$ при остальных значениях t.

Пусть $X(t)$ — фундаментальная матрица системы (2.1): $X^{\cdot} = AX$, $X(0) = E$. Мультипликаторы периодического решения (1.1) — корни характеристического уравнения $|X(2T) - \rho E| = 0$. Так как движение точки в поле с потенциалом V_N описывается уравнениями Гамильтона, то это характеристическое уравнение возвратное [3]:

$$\rho^4 + a\rho^3 + b\rho^2 + a\rho + 1 = 0, \quad a, b \in \mathbf{R} \tag{2.2}$$

Разложим левую часть (2.2) на множители:

$$\begin{gathered} (\rho^2 + d_+\rho + 1)(\rho^2 + d_-\rho + 1) = 0 \\ d_\pm = [a \pm (a^2 - 4b + 8)^{1/2}]/2 \end{gathered} \tag{2.3}$$

В общем случае коэффициенты $d_\pm$ могут быть комплексными числами.

Необходимое условие устойчивости решения (1.1) заключается в том, чтобы все корни уравнения (2.2) лежали на единичной окружности. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда $d_\pm$ вещественны и $|d_\pm| \leqslant 2$. При учете (2.3) получаем систему неравенств, связывающих вещественные коэффициенты a, b:

$$|a| \leqslant 4, \ 2a - b \leqslant 2, \ 2a + b \geqslant -2, \ b \leqslant a^2/4 + 2 \qquad (2.4)$$

Кусочно-гладкая граница соответствующей области в плоскости параметров a, b состоит из трех кривых γ_i (фиг. 2).

Если точка (a, b) лежит на граничном отрезке γ_1, то периодическое решение вырождено: одна из пар мультипликаторов совпадает с точкой $\rho = 1$, при этом другая пара расположена на единичной окружности. Если $(a, b) \in \gamma_2$, то одна из пар мультипликаторов совпадает с точкой $\rho = -1$, а другая пара также лежит на единичной окружности. Наконец, если $(a, b) \in \gamma_3$, то совпадают две пары комплексно-сопряженных мультипликаторов. Угловым точкам A, B на фиг. 2 отвечают случаи, когда $\rho = 1$ и $\rho = -1$ — четырехкратные корни характеристического уравнения (2.2), а точке C соответствуют двукратные корни $\rho = 1$ и $\rho = -1$.

Для определения коэффициентов α, b воспользуемся методом Ляпунова (см. [3]). Для этого введем в уравнение (2.1) параметр μ:

$$(\delta z)^{\cdot} = \mu A(t)\, \delta z$$

Тогда решения можно представить в виде рядов по степеням μ, сходящихся при всех $|\mu| \leqslant 1$. Полагая затем $\mu = 1$, получим выражения для элементов матрицы монодромии в виде сходящихся рядов. Устремим параметр N к бесконечности. Оказывается, в пределе ряды сводятся к конечным суммам, и поэтому условия устойчивости можно представить в явном виде (ср. с [2]). Опуская вычисления, приведем окончательные формулы для коэффициентов a и b:

$$\begin{gathered} a = -4 + 8\sigma l - (h_a + h_c)\, l^2, \quad b = 6 + k_1 l + k_2 l^2 + k_3 l^3 + k_4 l^4 \\ k_1 = -16\sigma, \quad k_2 = h_a + h_c + 64\,(a_1 + a_2)(c_1 + c_2) + \\ + 16\,(a_1 a_2 + c_1 c_2) - 16 b_1^2 - 24 b_1 b_2 - 16 b_2^2 \\ k_3 = -8\,(c_1 + c_2)\, h_a - 8\,(a_1 + a_2)\, h_c + 8\,(b_1 + b_2)\, H \qquad (2.5) \\ k_4 = h_a h_c - H^2, \quad \sigma = a_1 + a_2 + c_1 + c_2 \\ h_q = 4\,[(4q_1^2 + b_1^2)(4q_2^2 + b_2^2)]^{1/2}, \quad q = a, c \\ H = 8\,[b_1 b_2 (a_1 + c_1)(a_2 + c_2)]^{1/2} \end{gathered}$$

3. Условия устойчивости. Проанализируем неравенства (2.4) с учетом соотношений (2.5). Рассмотрим сначала частный случай, когда $b_1 = b_2 = 0$. Считая поверхность Σ выпуклой и полагая для определенности $0 < a_1 \leqslant a_2$, $0 < c_1 \leqslant c_2$, из (2.4) получим условия устойчивости в линейном приближении:

$$\begin{gathered} l \leqslant {}^1/_2 a_2 \ \text{ или } \ {}^1/_2 a_1 \leqslant l \leqslant {}^1/_2 a_1 + {}^1/_2 a_2 \\ l \leqslant {}^1/_2 c_2 \ \text{ или } \ {}^1/_2 c_1 \leqslant l \leqslant {}^1/_2 c_1 + {}^1/_2 c_2 \end{gathered} \qquad (3.1)$$

В этом случае уравнения (2.1) распадаются на два независимых уравнения Хилла и неравенства (3.1) дают условия устойчивости двузвенной периодической траектории плоского биллиарда Биркгофа (когда $y \equiv 0$ или $x \equiv 0$ соответственно) [1].

Обратимся к анализу общего случая. Поворотом осей x, y можно добиться обращения в нуль коэффициента b_1.

Последнее неравенство в системе (2.4) всегда выполнено.

Действительно, его можно представить в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{gathered} [l\,(\Lambda_a + \Lambda_c) - (a_1 + a_2 - c_1 - c_2)]^2 + {}^1/_2\,(\Lambda_a - 2a_1 a_2) + \\ + {}^1/_2\,(\Lambda_c - 2c_1 c_2) + b_2^2 \geqslant 0, \quad \Lambda_q = q_1\,(4q_2^2 + b_2^2)^{1/2}, \quad q = a, c \end{gathered} \qquad (3.2)$$

Это неравенство превращается в равенство лишь при $b_2 = 0$. Но тогда условия устойчивости имеют вид (3.1). Если $b_2 \neq 0$, то в (3.2) имеем строгое неравенство, и поэтому пары комплексно сопряженных мультипликаторов не совпадают (см. разд. 2).

Итак, условия устойчивости в типичном случае (когда $b_2 \neq 0$) имеют вид

$$|a| \leqslant 4, \quad 2a + b \geqslant -2, \quad 2a - b \leqslant 2$$

где a, b определяются из (2.5). Зафиксируем значения параметров a_i, b c_i и будем изменять расстояние между стенками l от нуля до бесконечности. Исследуем динамику мультипликаторов на комплексной плоскости при увеличении l.

Если $l \to 0$, то, согласно (2.5), $a \to -4$, $b \to 6$. Будем увеличивать l. Соотношения (2.5) задают на плоскости $\mathbf{R}^2 = \{a, b\}$ некоторую кривую, вид которой позволяет судить об устойчивости двузвенной траектории. Если $\sigma < 0$, то, согласно (2.5), $a < -4$ при всех $l > 0$ и поэтому рассматриваемая периодическая траектория неустойчива. В дальнейшем предполагается, что $\sigma > 0$. Тогда при увеличении l параметр a возрастает и достигает максимума при

$$l = l_a = \sigma / [2(\Lambda_a + \Lambda_c)]$$

При малых l точка $(a(l), b(l))$ находится в заштрихованной на фиг. 2 области, если справедливо неравенство $2a(l) + b(l) > -2$. Последнее эквивалентно условию

$$\Delta \geqslant 0, \quad \Delta = 8(a_1 + a_2)(c_1 + c_2) + 2(a_1 a_2 + c_1 c_2) - 2b_2{}^2 - \Lambda_a - \Lambda_c \tag{3.4}$$

Покажем, что это неравенство заведомо имеет место для выпуклой поверхности Σ (когда $a_i, c_i > 0$ и $4a_2 c_2 \geqslant b_2{}^2$). Действительно, воспользуемся оценками

$$(4a_2{}^2 + b_2{}^2)^{1/2} \leqslant 2a_2 + c_2, \quad (4c_2{}^2 + b_2{}^2)^{1/2} \leqslant 2c_2 + a_2$$

Тогда левая часть неравенства (3.4) не меньше суммы $8a_1 c_1 + 7(a_2 c_1 + a_1 c_2)$, которая всегда положительна. Итак, если поверхность Σ выпукла то при малых значениях l двузвенная траектория устойчива.

Будем увеличивать расстояние l. Точка (a, b) окажется на прямой, содержащей граничный отрезок γ_1, если l — корень квадратного уравнения

$$8\Lambda_a \Lambda_c l^2 - 8l[(c_1 + c_2)\Lambda_a + (a_1 + a_2)\Lambda_c] + \Delta = 0 \tag{3.5}$$

Можно показать, что уравнение (3.5) всегда имеет два вещественных корня, причем, если выполнено неравенство (3.4), то оба корня положительны, в противном случае один из них отрицателен. Кроме того, если l совпадает с наибольшим из положительных корней (3.5), то $a(l) < -4$. Таким образом, если точка $(a(l), b(l))$, выйдя из угловой точки A, попала в полуплоскость $2a + b < -2$, то при всех $l > 0$ точка (a, b) будет расположена вне заштрихованной области на фиг. 2. Здесь используются соображения непрерывности и тот факт, что кривая (2.5) не пересекает параболу $b = a^2/4 + 2$, если $b_2 \neq 0$. Итак, для устойчивости двузвенной траектории необходимо выполнение неравенства (3.4).

Находясь в заштрихованной области, точка $(a(l), b(l))$ может достичь границы γ_2 при выполнении условия $2a - b = 2$ или, в явном виде:

$$4\Lambda_a \Lambda_c l^4 - 4l^3((c_1 + c_2)\Lambda_a + (a_1 + a_2)\Lambda_c) + l^2(\Delta/2 + 2\Lambda_a + 2\Lambda_c) - \\ - 2\sigma l + 1 = 0 \tag{3.6}$$

Здесь возможны три случая: уравнение (3.6) имеет четыре положительных корня (считая кратности), имеет два положительных корня или вовсе не имеет корней $l > 0$. Первый случай заведомо реализуется при $b_2 \to 0$. Если уравнение (3.6) не имеет положительных корней, то при $l > l_1$ (l_1 — наименьший положительный корень (3.5)) точка (a, b) выходит из заштрихованной области, движется затем в полуплоскости $2a + b < -2$, которую она покидает за пределами вертикальной полосы $|a| \leqslant 4$.

Предположим теперь, что уравнение (3.6) имеет два положительных корня l_2 и l_3, причем $l_2 < l_3$. Тогда точка $(a(l), b(l))$ достигнет границы γ_2 и выйдет из заштрихованной области в полуплоскость $2a - b > 2$, если $l_2 < l_1$. В противном случае она пересекает прямую $2a - b = 2$ вне отрезка γ_2.

Если уравнение (3.6) имеет четыре положительных корня $l_2 < l_3 < l_4 < l_5$, то в зависимости от величины l_1 точка $(a(l), b(l))$ сначала пересекает либо прямую $2a - b = 2$ либо прямую $2a + b = -2$. При дальнейшем увеличении $l > l_5$ точка (a, b) пересекает прямую $2a + b = -2$ за пределеми полуплоскости $a > -4$ и постоянно находится при достаточно больших значениях l в области $2a + b > -2$, $a^2 - 4b + 8 > 0$.

В качестве еще одного применения полученных выше условий устойчивости рассмотрим случай, когда выпуклая граница Σ состоит из двух одинаковых цилиндрических поверхностей, повернутых друг относительно друга на угол φ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$. Тогда в уравнениях (2.6) надо положить

$$a_1 = a > 0, \quad b_1 = c_1 = 0; \quad a_2 = a\cos^2\varphi, \quad b_2 = a\sin 2\varphi, \quad c_2 = a\sin^2\varphi$$

Если $\varphi = 0$, то двузвенная траектория будет вырожденной: одна пара мультипликаторов равна единице, а другая пара лежит на единичной окружности при условии, что $\xi = al \leqslant 1$ (ср. с (3.1)). Значениям $\xi = 1/2$, $\xi = 1$ отвечает двукратный мультипликатор $\rho = -1$, $\rho = 1$. При $\varphi = \pi/2$ обе пары мультипликаторов лежат на окружности $|\rho| = 1$, причем значению $\xi = 1/2$ отвечает пара мультипликаторов, равная -1. Необходимые условия устойчивости в промежуточных случаях сводятся к двум неравенствам:

$$\xi < (4 - \cos\varphi - 3\cos^2\varphi)(8\sin^2\varphi\cos\varphi)^{-1}$$

$$8\sin^2\varphi\cos\varphi\,\xi^3 - (4 + 3\cos\varphi - 3\cos^2\varphi)\,\xi^2 + 4\xi - 1 < 0$$

Из этих неравенств вытекает, что для малых значений угла поворота φ условия устойчивости в линейном приближении сводятся к одному неравенству $\xi < 7/16$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
2. *Козлов В. В.* Конструктивный метод обоснования теории систем с неудерживающими связями // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 883—894.
3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 472 с.

Москва

Поступила в редакцию 28.II.1990