Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 4, 1991

УДК 531.36

В. А. Вуйичич, В. В. Козлов

К ЗАДАЧЕ ЛЯПУНОВА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ОТНОШЕНИЮ К ЗАДАННЫМ ФУНКЦИЯМ СОСТОЯНИЯ

Общая постановка задачи об устойчивости движения по отношению к заранее заданным функциям от координат и скоростей дана Ляпуновым [1]. Ее частный случай — задача об устойчивости по части переменных [2—4]. В настоящей работе применительно к общей задаче об устойчивости равновесий обратимых систем развиваются некоторые идеи первого метода Ляпунова. Исследование основывается на изучении траекторий, асимптотических к положению равновесия: если равновесие устойчиво по отношению к функции Q, то эта функция постоянна на асимптотических траекториях. Для отыскания асимптотических решений используются ряды специального вида. В качестве приложения доказан релятивистский вариант теоремы Ирншоу о неустойчивости равновесия заряда в стационарном электрическом поле.

1. Асимптотические решения обратимых систем. Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)$ — лагранжевы координаты механической системы,

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,x_i^{\cdot}x_j^{\cdot}$$

— кинетическая энергия, $X(x)=(X_1,\ldots,X_n)$ — поле обобщенных сил. Всюду ниже предполагается, что a_{ij}, X_k $(i,j,k=1,\ldots,n)$ — бесконечно-дифференцируемые функции от x. Если на систему не наложены дополнительные связи, то ее движение описывается уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i^{\cdot}}-\frac{\partial T}{\partial x_i}=X_i\quad(i=1,\ldots,n)\qquad(1.1)$$

Предположим, что $X(0)=0$. Тогда $x=0$ — положение равновесия. Разложим функции $X_i(x)$ в ряды по однородным формам переменных x: $X_i=X_i^{(m)}+X_i^{(m+1)}+\ldots$. Как правило, $m=1$. Однако возможны случаи вырождения, когда $m\geqslant 2$. Положим $X^{(m)}=(X_1^{(m)},\ldots,X_n^{(m)})$. Без ущерба общности можно считать, что матрица $\|a_{ij}(x)\|$ при $x=0$ единичная.

Теорема 1. Предположим, что найдется вектор e, $|e|=1$, такой, что $X^{(m)}(e)=\varkappa e$, $\varkappa>0$. Тогда уравнения (1.1) допускают решение $x(t)$, для которого ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{(k)}(t)e^{-\mu kt},\quad \mu=\varkappa^{1/2}>0,\quad \text{если } m=1\qquad(1.2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{(k)}(\ln t)}{t^{k\mu}},\quad \mu=\frac{2}{(m-1)}>0,\quad \text{если } m>1\qquad(1.3)$$

является асимптотическим разложением при $t\to+\infty$.

В формулах (1.2), (1.3) $x^{(k)}(z)$ — некоторые полиномы от z, причем $x^{(1)}=\lambda e$, $\lambda=\mathrm{const}>0$. В частности, $x(t)\to 0$ при $t\to+\infty$.

Идея доказательства теоремы 1 состоит в следующем. Сначала ищутся ряды вида (1.2), (1.3), формально удовлетворяющие уравнениям (1.1).

Их коэффициенты $x^{(k)}$ находятся последовательно по индукции (см. [5]). Ряды (1.2), (1.3) могут расходиться. Однако, согласно [6], и в этом случае уравнения (1.1) имеют решение $x(t)$, для которого ряд (1.2) (или (1.3)) является его асимптотическим представлением. Например, для ряда (1.3) это означает, что

$$x(t) - \sum_{k=1}^{N} \frac{x^{(k)}(\ln t)}{t^{k\mu}} = o\left(\frac{\ln^{l} t}{t^{N\mu}}\right)$$

при $t \to +\infty$. Здесь l — степень векторного полинома $x^{(N)}$. Отметим, что ряды вида (1.2) впервые применены Ляпуновым при решении задачи об устойчивости движения [1].

Замечание. Пусть $x = 0$ — изолированный нуль однородного векторного поля $X^{(m)}(x)$. Из топологии известно, что при нечетных n всегда найдется такой вектор e, $|e| = 1$, что $X^{(m)}(e) = \varkappa e$. Правда, при этом множитель $\varkappa$ может быть отрицательным.

Пусть $Q(x^{\cdot}, x)$ — гладкая функция в фазовом пространстве; будем считать, что $Q(0, 0) = 0$. Исследуем вопрос об устойчивости равновесия $x = 0$ по отношению к функции Q. Пусть $x(t)$ — асимптотическое решение системы (1.1), о котором идет речь в теореме 1: $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Ввиду обратимости, уравнения (1.1) допускают решение $x' = x(-t)$, которое стремится к нулю при $t \to -\infty$. Рассмотрим функцию времени

$$q'(t) = Q(x'^{\cdot}(t), x'(t))$$

Если $q'(t) \to 0$, когда $t \to -\infty$ и $q'(t) \not\equiv 0$, то равновесие $x = 0$, очевидно, неустойчиво по отношению к функции Q. Это условие эквивалентно следующему:

$$q(t) = Q(-x^{\cdot}(t), \quad x(t)) \to 0$$

когда $t \to +\infty$. После подстановки ряда (1.2) (или (1.3)) в разложение Маклорена функции $Q(-x^{\cdot}, x)$ получим ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{(k)}(t)\, e^{-\mu k t} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{(k)}(\ln t)}{t^{k\mu}}\right) \tag{1.4}$$

Здесь $q^{(k)}(z)$ — некоторые многочлены от z с постоянными коэффициентами. Ясно, что ряд (1.4) — асимптотическое представление функции $q(t)$ при $t \to +\infty$. Итак, доказана

Теорема 2. Если хотя бы один коэффициент формального ряда (1.4) отличен от нуля, то положение равновесия $x = 0$ неустойчиво по отношению к функции Q.

Например, пусть силы потенциальны и разложение потенциальной энергии в ряд Маклорена начинается с нетривиальной однородной формы V_{m+1} степени $m + 1$. Тогда, очевидно, $X^{(m)} = -\partial V_{m+1}/\partial x$. Можно показать, что если форма V_{m+1} не имеет в точке $x = 0$ минимума, то равновесие неустойчиво, например, по отношению к функции Лагранжа. Здесь в качестве вектора e из теоремы 1 следует взять точку минимума функции V_{m+1} на единичной сфере $|x| = 1$ (см. [7]).

Теоремы 1, 2 допускают обобщение на неголономные системы со стационарными однородными связями

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij}(x)\, x_i^{\cdot} = 0, \quad j = 1, \ldots, m < n \tag{1.5}$$

Уравнения (1.1) заменяются более общими:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_i^{\cdot}}-\frac{\partial T}{\partial x_i}=X_i+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j b_{ij} \tag{1.6}$$

Уравнения (1.5), (1.6) следует рассматривать совместно. Пусть $X_*^{(m)}$ — ортогональная проекция однородного поля $X^{(m)}$ на плоскость П, заданную уравнениями

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i=0, \quad j=1,\ldots,m$$

Теорема 3. Предположим, что $X_*^{(m)}(e)=\varkappa e$, где e — единичный вектор, лежащий в П, $\varkappa=\mathrm{const}>0$. Тогда система уравнений (1.5), (1.6) допускает решения с асимптотическими рядами (1.2), (1.3). В частности, равновесие $x=0$ неустойчиво.

Это утверждение распространяет на непотенциальные поля результаты [8].

2. Релятивистский вариант теоремы Ирншоу. Релятивистское уравнение движения заряженной частицы, как известно, имеет вид

$$[mx^{\cdot}(1-x^{\cdot 2}/c^2)^{-1/2}]^{\cdot}=F, \quad x\in\mathbf{R}^3 \tag{2.1}$$

где $F=q(E+x^{\cdot}\times H)$ — сила Лоренца. Здесь m — масса, q — заряд частицы, c — скорость света, $E\,(H)$ — напряженность электрического (магнитного) поля. Уравнение (2.1) можно переписать в виде «уравнения Ньютона» (ср. с [9])

$$mx^{\cdot\cdot}=[F-(x^{\cdot}/c^2)(F,x^{\cdot})](1-x^{\cdot 2}/c^2)^{1/2} \tag{2.2}$$

Пусть $H\equiv 0$, а поле E не зависит явно от времени. Тогда уравнение (2.2) обратимо.

Теорема 4. Равновесие заряда в стационарном электрическом поле всегда неустойчиво.

Это утверждение распространяет фундаментальную теорему Ирншоу [10] на релятивистский случай. Стационарное электрическое поле потенциально, причем потенциал — гармоническая функция. Любая однородная форма ряда Маклорена гармонической функции — также гармоническая функция. В частности, по теореме о среднем, первая нетривиальная форма не имеет в положении равновесия локального минимума. Используя метод п. 1, можно доказать наличие асимптотических решений в виде рядов (1.2), (1.3) (ср. с [11]). Ввиду обратимости уравнений (2.2) равновесие неустойчиво.

Конечно, линеаризация (2.2) приводит к обычному нерелятивистскому уравнению, и для доказательства неустойчивости здесь можно воспользоваться классической теоремой Ирншоу. Однако в вырожденных случаях заключение об устойчивости уже нельзя вывести из анализа линеаризованных уравнений.

Ясно, что равновесие заряда неустойчиво по отношению к компонентам электрического поля и его потенциалу.

3. Некоторые обобщения. Рассмотрим автономную систему уравнений

$$x^{\cdot}=v(x), \quad x\in\mathbf{R}^n \tag{3.1}$$

Пусть $v(0)=0$. Тогда $x=0$ — равновесие системы (3.1). Исследуем его устойчивость по отношению к гладкой функции $Q(x)$. Будем считать, что $Q(0)=0$.

Введем новую систему уравнений

$$\dot{x} = -v(x) \tag{3.2}$$

полученную из (3.1) обращением времени.

Лемма. Пусть система (3.2) допускает решение $x(t)$, такое, что

1) $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, 2) $q(t) = Q(x(t)) \not\equiv 0$.

Тогда равновесие $x = 0$ системы (3.1) неустойчиво по отношению к функции Q.

Асимптотические решения уравнений (3.2) можно искать в виде рядов определенного типа. Разлагая компоненты векторного поля v в ряды Маклорена, запишем систему (3.2) в виде уравнений

$$\dot{x} = Ax + \ldots \tag{3.3}$$

Пусть e — собственный вектор матрицы A с вещественным собственным значением $-\mu < 0$. Тогда уравнения (3.3) имеют частное решение в виде ряда (1.2), причем $x^{(1)} = e$. Подставляя этот ряд в разложение Маклорена функции Q, снова получим ряд по степеням $\exp(-\mu t)$, коэффициенты которого — многочлены от t. Если хотя бы один из коэффициентов этого ряда отличен от нуля, то равновесие системы (3.1) неустойчиво по отношению к функции Q.

Это наблюдение можно обобщить. Были указаны [1] представления для асимптотических решений в виде кратных рядов по экспонентам, пригодные и в случае комплексных собственных значений матрицы A. Необходимое условие устойчивости равновесия $x = 0$ для системы (3.1) по отношению к функции Q заключается в постоянстве этой функции на центральном многообразии системы (3.2). Последнее свойство проверяется конструктивно с помощью итерационного метода построения рядов Ляпунова.

В вырожденных случаях асимптотические решения можно искать в форме рядов (1.3).

В качестве примера рассмотрим критический случай одного нулевого корня [1]. В типичной ситуации уравнения (3.2) приводятся к следующему виду:

$$\begin{gathered} \dot{z} = az^2 + f(z, y) + O(|x|^3), \quad \dot{y} = By + O(|x|^2) \\ z \in \mathbf{R}, \quad y \in \mathbf{R}^{n-1}; \quad x = (z, y) \end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь $a = \text{const} \neq 0$, B — невырожденная матрица, f — квадратичный многочлен, не содержащий z^2.

Теорема 5. При сделанных предположениях уравнения (3.4) имеют асимптотическое решение в виде рядов

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{(k)}(\ln t)}{t^k}, \qquad y = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{y^{(m)}(\ln t)}{t^m} \tag{3.5}$$

где $z^{(k)}(\cdot)$, $y^{(m)}(\cdot)$ — некоторые многочлены, причем $z^{(1)} = -1/a = \text{const}$.

Доказательство. Подставляя ряды (3.5) в уравнения (3.4) и приравнивая члены при одинаковых степенях $1/t^{k+1}$, получим бесконечную цепочку уравнений для последовательного нахождения коэффициентов $z^{(k)}$ и $y^{(k+1)}$:

$$z^{(k)\prime} = (k-2)\, z^{(k)} + g_k, \quad By^{(k+1)} = G_{k+1}, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{3.6}$$

Здесь g_k, G_{k+1} — некоторые уже известные многочлены от $\ln t$, штрих означает дифференцирование по $\ln t$. Согласно (3.6), коэффициенты $z^{(k)}$ и $y^{(k+1)}$ находятся как многочлены от $\ln t$. Ряды (3.5), как правило, расходятся, однако уравнения (3.4) и в этом случае имеют решения, для которых ряды (3.5) будут их асимптотическими разложениями [6].

Приведем пример, показывающий, что даже в аналитическом случае ряды (3.5) могут расходиться. Система

$$z^{\cdot} = z^2, \quad y^{\cdot} = y - z^2 \tag{3.7}$$

вида (3.4) допускает формальное решение

$$z = -\frac{1}{t}, \quad y = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k (k-1)!}{t^k} \tag{3.8}$$

Ряд для $y(t)$ расходится при всех $t > 0$. Однако система (3.7) имеет асимптотическое решение

$$z(t) = -\frac{1}{t}, \quad y(t) = e^t \int_t^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2} du \tag{3.9}$$

Проводя последовательное интегрирование по частям, получим асимптотический ряд (3.8). Переход от (3.8) к (3.9) можно трактовать как суммирование расходящегося ряда [12].

Наличие асимптотических решений в виде рядов (3.5) позволяет указать простые достаточные условия неустойчивости равновесия $x = 0$ системы (3.4) по отношению к заданным гладким функциям от переменных $x = (y, z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1950. 471 с.
2. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Математики, механики, астрономии, химии, 1957. № 4. С. 9 — 16.
3. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
4. *Воротников В. И.* Об устойчивости движения относительно части переменных // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 372—385.
5. *Вуйичич В. А., Козлов В. В.* Об устойчивости равновесия в непотенциальном силовом поле // Teorijska i Primenjena Mehanika. 1989. V. 15. P. 139—145.
6. *Кузнецов А. Н.* О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением // Функциональный анализ и его приложения. 1989. Т. 23. Вып. 4. С. 63—74.
7. *Козлов В. В.* Асимптотические решения уравнений классической механики // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 573—577.
8. *Козлов В. В.* Об устойчивости равновесия неголономных систем // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. № 2. С. 289—291.
9. *Седов Л. И.* Об ускорении силы тяжести в пространстве Минковского // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 331—332.
10. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М.: Наука. 1966. 624 с.
11. *Козлов В. В.* Об одной задаче Кельвина // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 165—167.
12. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.

Белград,
Москва

Поступила в редакцию
16.XI.1990