Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 1, 1991

УДК 531.36

В. В. Козлов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В НЕСТАЦИОНАРНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Исследуется устойчивость положений равновесия механических систем в силовом поле с потенциалом вида $p(t)V$, где V — функция обобщенных координат. Системы такого вида часто встречаются в приложениях. Показано, что если множитель $p(t)$ монотонно возрастает к $+\infty$ при $t \to +\infty$, то условия устойчивости положений равновесия можно сформулировать в виде экстремальных свойств функции V. Результаты общего характера применены к задаче о движении тяжелого твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости.

1. Введение. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — обобщенные координаты механической системы с n степенями свободы, T — кинетическая энергия, $-p(t)V(x)$ — силовая функция. Движение описывается уравнениями Лагранжа

$$(\partial T/\partial x^{\cdot})^{\cdot} - \partial T/\partial x = -p\partial V/\partial x \tag{1.1}$$

Всюду ниже предполагается, что $p(t) > 0$ для всех значений t.

Уравнения вида (1.1) часто встречаются в приложениях. Приведем пример, представляющий самостоятельный интерес. Для этого рассмотрим задачу о движении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости, покоящейся на бесконечности и совершающей безвихревое движение [1]. Предположим для простоты, что твердое тело имеет три взаимно ортогональные плоскости симметрии. В этом случае кинетическая энергия системы «тело плюс жидкость» принимает вид

$$T = (A\omega,\ \omega)/2 + (Cv,\ v)/2$$

где ω — угловая скорость твердого тела, v — скорость точки O пересечения плоскостей симметрии, A и C — симметричные положительно определенные матрицы. В силу предположения о симметрии тела равнодействующая силы тяжести и сила Архимеда приложены к точке O. Пусть P — величина суммы этих сил.

Движение твердого тела можно представить в виде системы уравнений Кирхгофа [1]

$$(\partial T/\partial v)^{\cdot} + \omega \times (\partial T/\partial v) = -P\gamma, \quad (\partial T/\partial \omega)^{\cdot} + \omega \times (\partial T/\partial \omega) + v \times (\partial T/\partial v) = 0 \tag{1.2}$$

(γ — единичный вектор вертикали). Уравнения (1.2) следует дополнить геометрическими уравнениями Пуассона

$$\alpha^{\cdot} + \omega \times \alpha = \beta^{\cdot} + \omega \times \beta = \gamma^{\cdot} + \omega \times \gamma = 0 \tag{1.3}$$

где α и β — неподвижные единичные векторы, ортогональные вектору γ.

Уравнения движения допускают три интеграла количества движения:

$$(\partial T/\partial v,\ \alpha) = c_1 \quad (\partial T/\partial v,\ \beta) = c_2 \quad (\partial T/\partial v,\ \gamma) = c_3 - Pt \tag{1.4}$$

Из (1.4) вытекает равенство $Cv = c_1\alpha + c_2\beta + (c_3 - Pt)\gamma$.

С учетом этого соотношения второе уравнение (1.2) можно представить в виде уравнения Эйлера

$$A\omega^{\cdot} + \omega \times A\omega = \alpha \times \partial W/\partial\alpha + \beta \times \partial W/\partial\beta + \gamma \times \partial W/\partial\gamma$$
$$W = (z,\ C^{-1}z)/2,\ z = c_1\alpha + c_2\beta + (c_3 - Pt)\,\gamma \qquad (1.5)$$

Уравнения (1.3) и (1.5) описывают вращение твердого тела вокруг неподвижной точки в нестационарном силовом поле с силовой функцией $-W$. Особенно просто эти уравнения выглядят при $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

$$A\omega^{\cdot} + \omega \times A\omega = P^2t^2\,(\gamma \times \partial V/\partial\gamma),\ \gamma^{\cdot} + \omega \times \gamma = 0 \qquad (1.6)$$
$$V = (C^{-1}\gamma,\ \gamma)/2$$

Они совпадают с уравнениями вращения твердого тела в осесимметричном силовом поле с потенциальной энергией P^2t^2V. В общем случае $W = P^2t^2V + tW_1 + W_2$, где W_1, W_2 зависят лишь от положения тела.

Положения равновесия системы (1.1) совпадают с критическими точками функции V. Оказывается, для определенного класса функций p устойчивость равновесия определяется исключительно экстремальными свойствами функции V.

Пусть $dV(0) = 0$ и $V(0) = 0$.

2. Условия устойчивости. *Теорема* 1. Пусть $x = 0$ — локальный максимум гладкой функции V. Тогда равновесие $x = 0$ неустойчиво.

Теорема 1 обобщает классический результат Ляпунова о неустойчивости равновесия в стационарном поле ($p = \mathrm{const}$), когда $V = V_m + \ldots$ и однородная форма V_m достигает в точке $x = 0$ строгого максимума. Доказательство основано на применении результатов [2].

Когда функция V — однородная форма степени $m \geqslant 2$, теорему 1 можно доказать методом Ляпунова — Четаева.

В качестве иллюстрации рассмотрим случай постоянной матрицы

$$\|\partial^2T/\partial x_i^{\cdot}\partial x_j^{\cdot}\| = \|g_{ij}\| = G$$

Для момента инерции $I = (Gx,\ x)$ справедливо вириальное тождество

$$I^{\cdot\cdot} = 4T - 2pmV$$

Так как по предположению $V(x) \leqslant 0$, то $I^{\cdot\cdot} \geqslant 0$. Если в начальный момент времени $I^{\cdot} = 2\,(Gx, x^{\cdot}) > 0$, то $I(t) \to \infty$ при $t \to +\infty$. Следовательно, равновесие $x = 0$ неустойчиво.

В уравнениях (1.1) выполним замену времени

$$\tau = g(t),\ g^{\cdot} = p^{1/2}$$

Ясно, что g — монотонная функция t. Обозначая штрихом дифференцирование по τ, получим

$$(\partial T^*/\partial x')' - \partial T^*/\partial x = -\partial V/\partial x - Gx'k\,(\tau) \qquad (2.1)$$
$$T^* = \sum g_{ij}\,(x)\,x_i'x_j'/2,\ k = p^{\cdot}/(2p^{3/2})$$

Применяя к уравнениям (2.1) теорему об изменении энергии, получим равенство

$$(T^* + V)' = -k\,(Gx',\ x') = -2kT^* \qquad (2.2)$$

Из (2.2) сразу вытекает

Предложение 1. Пусть $p^{\cdot} \geqslant 0$ и функция V имеет в точке $x = 0$ строгий локальный минимум. Тогда равновесие $x = 0$ устойчиво по отношению к координатам $x_1, \ldots, x_n$.

Как будет показано ниже, устойчивости по скоростям $x^{\cdot}$ может и не быть.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

$$1) \qquad p^{\cdot} \geqslant 0, \;\; 2) \lim_{t\to+\infty} p(t) = +\infty, \;\; 3) \; p^{\cdot\cdot}p \leqslant {}^3/_2 p^{\cdot 2} \qquad (2.3)$$

и функция V аналитична по $x_1, \ldots, x_n$ в окрестности точки $x = 0$. Тогда, если V имеет в точке $x = 0$ строгий локальный минимум, то равновесие $x = 0$ асимптотически устойчиво по отношению к координатам $x_1, \ldots, x_n$ ($x_i \to 0$ при $t \to +\infty$). Если же функция V не имеет в точке $x = 0$ локального минимума, то равновесие $x = 0$ неустойчиво по отношению к $x_1, \ldots, x_n$.

Условие 3 эквивалентно предположению о монотонном убывании функции $k(\tau)$ при $\tau \to +\infty$. Оно заведомо выполнено для функций $p(t)$ вида ct^{α}, $c \exp(\alpha t)$, $c \ln(\alpha t)$ $(c, \alpha > 0)$.

Отметим, что теорема 2 несправедлива в случае, когда функция V бесконечно дифференцируема, но не аналитична. Вот простой пример: $V(0) = 0$, $V(x) = \exp(-x^{-2}) \cos x^{-2}$, когда $x \neq 0$. Положение равновесия $x = 0$ не есть локальный минимум функции V. Однако, если выполнены условия (2.3), то это равновесие устойчиво по отношению к координате x.

Для доказательства теоремы 2 введем функцию $H(x', x) = T^* + V$. Так как по предположению $p^{\cdot} \geqslant 0$, то ввиду тождества (2.2) функция H монотонно убывает. Следовательно, при $\tau \to \infty$ либо $H(\tau) \to -\infty$, либо $H(\tau) \to c$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (2.3) и траектория движения $x(t)$ ограничена. Тогда c — критическое значение функции H.

Теорема 2 вытекает из теоремы 3 и результата об изолированности критических значений аналитической функции V [3]. Отметим, что критическими точками функции H являются пары ($x = x_0$, $x' = 0$), где x_0 — критическая точка функции V. Так что $c = V(x_0)$.

Предположим, что $H(\tau) \to c$, когда $\tau \to +\infty$. В силу (2.2)

$$\int_{\tau_0}^{\infty} k(\tau)\, T^*(\tau)\, d\tau < \infty \qquad (2.4)$$

Покажем, что $c \leqslant \sup V$. Действительно, пусть $c > \sup V$. Так как $T^* + V \geqslant c$, то $T^* \geqslant c - V \geqslant c_1 > 0$. Но тогда

$$\int_{\tau_0}^{\infty} kT^*\, d\tau \geqslant c_1 \int_{\tau_0}^{\infty} k\, d\tau = c_1 \int_{t_0}^{\infty} \frac{p^{\cdot}}{2p}\, dt = \frac{c_1}{2} \ln p \Big|_{t_0}^{\infty} = \infty$$

поскольку $p(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ (условие 2). Получили противоречие. Подчеркнем, что здесь не использовалось условие 3 о монотонности функции $k(\tau)$.

В общем случае, в доказательстве теоремы 3 используется та же идея. Однако если $c < \sup V$, то функция $T^*(\tau)$ может принимать сколь угодно малые положительные значения и даже обращаться в нуль. Предположим, что c не является критическим значением функции H и, следовательно, функции V. Если при достаточно большом значении τ измененная кинетическая энергия $T^*(\tau)$ мала, то значение $V(x(\tau))$ мало отличается от c. Однако вблизи гиперповерхности $\{V(x) = c\}$ нет положений равновесия и поэтому через время $\Delta\tau \leqslant \varepsilon$ кинетическая энергия $T^* \geqslant \varkappa > 0$ (строгое доказательство проводится методом [4]). Так как по предположению теоремы 3 траектория движения $x(\tau)$ ограничена, то ε и $\varkappa$ — некоторые положительные постоянные, фиксированные для данной траектории. Далее, в течение времени $\Delta\tau \geqslant \delta = \text{const} > 0$ энергия $T^*(\tau) \geqslant \varkappa$.

Итак, найдется последовательность моментов нового времени τ_0, τ_1, $\tau_2, \ldots$, такая, что $T^*(\tau) \leqslant \varkappa$ при $\tau \in [\tau_{2n}, \tau_{2n+1}]$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и $T^*(\tau) \geqslant \varkappa$ при $\tau \in [\tau_{2n-1}, \tau_{2n}]$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Как уже отмечалось, $\tau_{2n+1} - \tau_{2n} \leqslant \varepsilon$, $\tau_{2n} - \tau_{2n-1} \geqslant \delta$ при всех значениях n. Если последовательность τ_n ограничена, то $T^*(\tau) \geqslant \varkappa$ для всех $\tau \geqslant \max \tau_n$ и поэтому интеграл (2.4) расходится.

Наибольший интерес представляет случай бесконечной последовательности τ_n.

Лемма. Предположим, что положительная функция $f(\tau)$ монотонно убывает и

$$\int_{\tau_0}^{\infty} f(\tau)\, d\tau = \infty$$

Тогда для каждой монотонной последовательности τ_n, такой, что $\tau_{2n+1} - \tau_{2n} \leqslant \varepsilon$, $\tau_{2n} - \tau_{2n-1} \geqslant \delta$, справедливо равенство

$$\sum \int_{\tau_{2n-1}}^{\tau_{2n}} f(\tau)\, d\tau = \infty \tag{2.5}$$

(суммирование ведется по n от 1 до ∞).

Доказательство. Вставляя, если нужно, в последовательность интервалов $[\tau_{2n}, \tau_{2n+1}]$ новые интервалы нулевой длины, можно добиться, чтобы $\tau_k \leqslant k\mu + \sigma$ при некоторых положительных μ, σ. Ввиду монотонности функции f справедливо неравенство

$$\int_{\tau_{2n-1}}^{\tau_{2n}} f(\tau)\, d\tau \geqslant f(\tau_{2n})(\tau_{2n} - \tau_{2n-1}) \geqslant \delta f(\tau_{2n})$$

Следовательно, сумма (2.5) не меньше $\delta \sum f(\tau_{2n})$. Так как $\tau_{2n} \leqslant 2\mu n + \sigma$ и f монотонно убывает, то сумма ряда (2.5) не меньше $\delta \sum f(2\mu n + \sigma)$. Однако этот ряд расходится к $+\infty$ по интегральному признаку Коши — Маклорена.

В интервалах $[\tau_{2n-1}, \tau_{2n}]$ справедливо неравенство $T^* \geqslant \varkappa$. Следовательно,

$$\int_{\tau_0}^{\infty} kT^* d\tau \geqslant \varkappa \sum \int_{\tau_{2n-1}}^{\tau_{2n}} k(\tau)\, d\tau$$

Однако ввиду леммы последняя сумма равна ∞. Получили противоречие с предположением о сходимости интеграла (2.4). Теорема 3 (а вместе с ней и теорема 2) доказана.

3. Приложение к задаче о падении твердого тела в идеальной жидкости. Уравнения (1.6) имеют интеграл площадей $(A\omega, \gamma) = c$. При фиксированном значении c можно понизить число степеней свободы с трех до двух. Если $c = 0$, то приведенная система будет натуральной. Пространством положений будет сфера Пуассона $S^2 = \{(\gamma, \gamma) = 1\}$, а потенциальная энергия совпадает с ограничением функции $P^2 t^2 (C^{-1}\gamma, \gamma)/2$ на сферу S^2. Эта функция имеет шесть критических точек — положений равновесия приведенной системы. Они соответствуют единичным собственным векторам симметричного оператора C. Обозначим их $\pm e_1$, $\pm e_2$, $\pm e_3$. Пусть $(C^{-1}e_1, e_1) \geqslant (C^{-1}e_2, e_2) \geqslant (C^{-1}e_3, e_3)$, так что в точках $\gamma = \pm e_3$ функция V принимает минимальные значения. Если этот минимум строгий, то положения равновесия асимптотически устойчивы по отношению к координатам на S^2, а остальные четыре равновесия неустойчивы. Можно доказать, что для почти всех движений $\gamma(t) \to \pm e_3$ при $t \to \infty$.

Для того чтобы дать механическую интерпретацию этому результату, рассмотрим поступательное движение твердого тела с единичной скоростью v. Кинетическая энергия такого движения, равная $(Cv, v)/2$, максимальна, если $v = \pm e_3$. Следовательно, если тело движется в направлении, задаваемом вектором $\pm e_3$, то его присоединенная масса принимает максимальное значение. В частности, если твердое тело имеет форму пластинки, то вектор $\pm e_3$ ортогонален ее плоскости. Итак, при сделанных предположениях в свободном падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости тело асимптотически стремится занять такое положение, при котором ось с наибольшей присоединенной массой вертикальна. Если твердое тело плоское, то эта плоскость стремится занять горизонтальное положение.

В общем случае, когда постоянные c_1, c_2 интегралов количества движения (1.4) отличны от нуля, движение описывается уравнениями (1.3) и (1.5). В локальных координатах на группе SO (3) их можно представить в виде уравнений (2.1)

$$(\partial T^*/\partial x')' - \partial T^*/\partial x = -\partial W^*/\partial x - Gx'/(2\tau)$$
$$(\tau = t^2/2,\ W^* = P^2V + W_1/(2\tau)^{1/2} + W_2/(2\tau))$$

Введем функцию $H = T^* + W^*$ и изучим ее поведение при $\tau \to \infty$ Так как $H' = -\partial H/\partial\tau - T^*/\tau$, то

$$H' = W_1/(2\tau)^{3/2} + W_2/(2\tau^2) - T^*/\tau \tag{3.1}$$

Предположим, что траектория движения x (t) ограничена. Это условие заведомо выполняется в задаче о движении твердого тела ввиду компактности группы SO (3). Следовательно, функции W_1 $(x\ (\tau))$ и W_2 $(x\ (\tau))$ ограничены. Поэтому несобственные интегралы

$$\int\limits_{\tau_0}^{\infty} \frac{W_1}{(2\tau)^{3/2}}\,d\tau,\ \int\limits_{\tau_0}^{\infty} \frac{W_2}{2\tau^2}\,d\tau$$

сходятся. Учитывая еще ограниченность функции H (τ) из (3.1), получаем сходимость интеграла

$$\int\limits_{\tau_0}^{\infty} \frac{T^*}{\tau}\,d\tau \tag{3.2}$$

Но тогда из (3.1) вытекает, что существует

$$\lim_{\tau\to\infty} H\ (\tau) = c$$

Применяя рассуждения из разд. 2 и используя результат о сходимости интеграла (3.2), можно доказать, что постоянная c совпадает с критическим значением функции V. В частности, если точка $x = 0$ — строгий локальный минимум аналитической функции V, то движения x (t) с малыми начальными данными x (0) и $x^{\cdot}$ (0) стремятся к точке $x = 0$ при $t \to \infty$.

В рассматриваемой задаче функция V не имеет изолированного минимума: она принимает минимальные значения на двух окружностях, задаваемых уравнениями $\gamma = \pm e_3$. Поэтому при $t \to \infty$ падающее тело в общем случае стремится занять такое положение, при котором его ось с наибольшей присоединенной массой вертикальна. Если c_1, c_2 отличны от нуля, то тело еще может совершать вращение вокруг этой оси.

Обратимся вновь к общей задаче о движении механической системы с потенциальной энергией $W = t^2V + tW_1 + W_2$. Если критические точки функций V, W_1, W_2 не совпадают, то уравнения движения не имеют положений равновесия. Однако при некоторых общих предположениях найдутся заменяющие их замечательные частные решения уравнений движения.

Предложение 2. Если $x = 0$ — невырожденная критическая точка функции V, то уравнения движения имеют решение $x(t)$, представимое асимптотическим разложением

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{(m)}}{t^m}, \quad x^{(m)} \in R^n \tag{3.3}$$

Последнее означает, что при $t \to \infty$

$$x(t) - \sum_{m=1}^{N} \frac{x^{(m)}}{t^m} = O\left(\frac{1}{t^{N+1}}\right)$$

В частности, $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Доказательство. Уравнения движения имеют единственное формальное решение в виде степенного ряда (3.3). Коэффициент $x^{(1)}$ определяется из равенства

$$Cx^{(1)} + a = 0,\ C = \partial^2 V/\partial x^2\,(0),\ a = \partial W_1/\partial x\,(0)$$

а остальные коэффициенты находятся по индукции. Радиус сходимости ряда (3.3), как правило, равен нулю. Однако, согласно [5], уравнения движения обязательно имеют решение, для которого ряд (3.3) — его асимптотическое разложение при $t \to \infty$.

В общей задаче о падении твердого тела все критические точки функции V вырождены. Однако предложение 2 можно применить для частного случая движения твердого тела, когда плоскость симметрии занимает вертикальное положение.

4. Асимптотика малых колебаний. Рассмотрим задачу о движении системы (1.1) в окрестности устойчивого положения равновесия $x = 0$. Будем считать выполненными условия предложения 1. Линеаризованные уравнения движения имеют вид

$$Ax^{\cdot\cdot} + p(t)\,Cx = 0 \tag{4.1}$$

$$(A = \| g_{ij}(0) \|,\ C = \partial^2 V/\partial x^2\,(0))$$

Линейным преобразованием координат x матрицу A можно привести к единичной, а C — к диагональной: $\operatorname{diag}[\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2]$.

Будем рассматривать типичный случай, когда все $\omega_k > 0$. В новых координатах $x_1, \ldots, x_n$ уравнения (3.1) разделяются:

$$x_k^{\cdot\cdot} + p\omega_k^2 x_k = 0,\ k = 1, \ldots, n \tag{4.2}$$

Изучим поведение решений этого линейного уравнения при $t \to \infty$ (индекс k опустим).

Заменяя время $t \to \tau$ по формуле $\tau^{\cdot} = p^{1/2}$ и совершая подстановку $x = zp^{-1/4}$, уравнение (4.2) приводим к виду

$$z'' + q(\tau)\,z = 0,\ q = \omega^2 - k'/2 - k^2/4 \tag{4.3}$$

Если выполнены условия

$$1)\quad q > 0 \text{ при } \tau > \tau_0,\ 2)\ \lim_{\tau\to\infty} q(\tau) > 0,\ 3)\ \int_{\tau_0}^{\infty} |\, q'(\tau)\,|\, d\tau < \infty \tag{4.4}$$

то справедливо следующее представление для решений (4.3):

$$z = c_1 \sin \int_{\tau_0}^{\tau} (q(u))^{1/2}\, du + c_2 \cos \int_{\tau_0}^{\tau} (q(u))^{1/2}\, du + \xi(\tau)$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, ξ, $\xi' \to 0$ при $\tau \to \infty$ [(6], гл. V). Например, для $p = \alpha^2 t^{2\beta}$ (α, $\beta = \mathrm{const}$) значение $q(\tau)$ равно $\omega^2 + c/\tau^2$ ($c = \mathrm{const}$) и потому все условия (4.4) заведомо выполнены.

Так как $x = zp^{-1/4}$, то координата x совершает колебания, амплитуда которых убывает как $(p(t))^{-1/4}$, а частота неограниченно возрастает со временем. Например, для степенной зависимости p от времени частота представима в виде суммы

$$\omega \int\limits_{t_0}^{t} (p(u))^{1/2}\, du + \eta(t)$$

где функция $\eta(t)$ ограничена.

Координаты $x_1, \ldots, x_n$ можно назвать нормальными, а движения, описываемые линейными уравнениями (4.2), нормальными колебаниями. Общее решение системы (4.1) есть сумма нормальных колебаний, амплитуда которых неограниченно убывает со временем. Например, в задаче о падении твердого тела в жидкости амплитуда убывает как $t^{-1/2}$, а частота увеличивается как t.

5. **Влияние гироскопических сил.** Добавим в правую часть уравнения (1.1) слагаемое $\Gamma \dot{x}$, где Γ — кососимметрическая матрица. Наличие гироскопических сил, конечно, не меняет положений равновесия и оставляет справедливым тождество (2.2). Поэтому предложение 1 верно и в более общем случае. Однако асимптотика малых колебаний будет уже другой.

В качестве примера рассмотрим линейную систему уравнений

$$\ddot{x} + \omega \dot{y} = -p(t)\, x, \quad \ddot{y} - \omega \dot{x} = -p(t)\, y, \quad \omega = \mathrm{const} \qquad (5.1)$$

Эти уравнения допускают интеграл $\dot{x} y - x\dot{y} + \omega(x^2 + y^2)/2 = c$, который в полярных координатах r, φ принимает вид $r^2\dot{\varphi} = -\omega r^2/2 + c$.

Исследуем частные решения, отвечающие случаю $c = 0$. Так как $\dot{\varphi} = -\omega/2 = \mathrm{const}$, то точка движется по прямой, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг начала координат. Из теоремы об изменении кинетической энергии получаем равенство

$$(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)^{\cdot} + p\,(r^2)^{\cdot} = 0 \qquad (5.2)$$

С учетом соотношения $\dot{\varphi} = -\omega/2$ из (5.2) выводится уравнение

$$\ddot{r} + (p + \omega^2/4)\, r = 0$$

Если p монотонно возрастает до бесконечности, то, согласно разд. 4, переменная r совершает колебания, амплитуда которых неограниченно убывает как $(p(t) + \omega^2/4)^{-1/4}$. В частности, $x^2 + y^2 \to 0$ при $t \to \infty$.

Последнее обстоятельство не случайно. Оказывается, если выполнены условия (2.3) и точка $x = 0$ — строгий локальный минимум аналитической функции V, то при наличии гироскопических сил равновесие $x = 0$ асимптотически устойчиво по отношению к координатам $x_1, \ldots, x_n$.

Гироскопические силы появляются, как известно, при понижении порядка системы с группой симметрии. В качестве примера вновь обратимся к уравнениям (1.6), допускающим нетеров интеграл $(A\omega, \gamma) = c$. При фиксированном значении c вращение твердого тела описывается динамической системой с двумя степенями свободы, находящейся под действием гироскопических сил и дополнительных потенциальных сил с потенциалом $c^2/[2(A\gamma, \gamma)]$. Наличие добавочного потенциала в данном случае не меняет положений равновесия приведенной системы. Эти частные движения можно трактовать как относительные равновесия: одно из собственных направлений оператора C (определяемых векторами e_1, e_2, e_3 из разд. 3) вертикально и тело вращается вокруг этой оси с постоянной скоростью. Их всего шесть, причем, в общем случае (когда собственные значения оператора C различны), два из них асимптотически устойчивы по отношению к координатам γ, а четыре оставшихся неустойчивы.

В общем случае после понижения порядка приведенный потенциал вида $t^2V(x) + W(x)$ может не иметь критических точек — относительных равновесий. Однако и в этом случае можно установить существование заменяющих их частных решений вида (3.3) при условии, что критические точки функции V невырождены.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полное собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. С. 133—150.
2. *Болотин С. В., Козлов В. В.* Об асимптотических решениях уравнений динамики // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика-механика. 1980. № 4. С. 84—89.
3. *Souček J., Souček V.* Morse — Sard theorem for real — analytic functions // Comment. Math. Univ. Carol. 1973. V. 13. № 1. P. 45—51.
4. *Козлов В. В.* О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 5. С. 10—17.
5. *Кузнецов А. Н.* Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений // Функциональный анализ и его приложения. 1972. Т. 6. Вып. 2. С. 41—51.
6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.I.1990