4

О стохастизации плоскопараллельных течений идеальной жидкости[1]

В. В. Козлов

1. Плоскопараллельные течения однородной идеальной жидкости в потенциальном силовом поле описываются следующей системой уравнений [3]:

$$\begin{gathered} u_t + u_x u + u_y v + P_x = v_t + v_x v + P_y = 0, \\ u_x + v_y = 0. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь u, v — компоненты скорости частиц жидкости: $P = p/\rho + V$, p — давление, ρ — постоянная плотность, V — потенциальная энергия внешних массовых сил.

Из уравнения несжимаемости вытекает наличие «функции тока» $H(x, y, t)$:

$$u = H_y, \quad v = -H_x. \tag{1.2}$$

Будем искать течения (1.2) с функцией тока H в виде суммы $\Psi + \varepsilon\Phi$, где Ψ — функция только от x, y, а $\Phi = -x\cos\lambda t, \lambda = \mathrm{const}$. В этом случае

$$.u = \Psi_y, \quad v = -\Psi_x + \varepsilon\cos\lambda t. \tag{1.3}$$

При малых значениях ε будем иметь малое возмущение стационарного течения.

Подставим соотношения (1.3) в (1.1) и положим $P = \varepsilon\xi\sin\lambda t + \varepsilon\eta\cos\lambda t + \zeta$, где ξ, η, ζ — пока неизвестные функции от x и y. Приравнивая коэффициенты при $\sin\lambda t$ и $\cos\lambda t$, получим систему уравнений для отыскания Ψ, ξ, η, ζ:

[1]Модифицированный вариант статьи, опубликованной в Вестнике Московского университета, сер. 1. Математика, механика, 1991, № 1, с. 72–75.

$$\Psi_{xy}\Psi_y - \Psi_{yy}\Psi_x - \zeta_x = -\Psi_{xx}\Psi_y + \Psi_{xy}\Psi_x + \zeta_y = 0, \tag{1.4}$$

$$\xi_x - \xi_y - \lambda = 0, \tag{1.5}$$

$$\Psi_{yy} + \eta_x = -\Psi_{xy} + \eta_y = 0. \tag{1.6}$$

Пусть Ψ — гармоническая функция $\Delta\Psi = 0$. Тогда при $\varepsilon = 0$ будем иметь стационарное безвихревое течение. Покажем, что уравнения (1.4) – (1.6) разрешимы относительно ξ, η, ζ.

Уравнения (1.5) имеют очевидное решение: $\xi = \lambda y + \mathrm{const}$. В силу предположения о гармоничности функции Ψ уравнения (1.4) и (1.6) решаются в явном виде:

$$2\zeta = \Psi_x^2 + \Psi_y^2 + \mathrm{const}, \quad \eta = \Psi_x + \mathrm{const}.$$

Итак, уравнения движения (1.1) допускают безвихревое течение (1.3). Оно имеет прозрачный механический смысл: на стационарное поле скоростей налагается малое синусоидальное возмущение постоянного направления.

Замечание. Система уравнений (1.4)-(1.6) разрешима при более общем предположении $\Delta\Psi = \mathrm{const}$. Более того, уравнения (1.1) при наличии вязкости также допускают решения вида (1.3), где $\Delta\Psi = \mathrm{const}$.

2. Соотношениям (1.3) отвечают гамильтоновы уравнения движения частиц жидкости

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = -H_x; \quad H = \Psi + \varepsilon\Phi. \tag{2.7}$$

При $\varepsilon = 0$ эта система автономна и поэтому вполне интегрируема. Предположим, что имеются две критические точки функции Ψ, соединенные сепаратрисой Λ_0. Эта кривая является траекторией семейства двоякоасимптотических решений невозмущенной задачи:

$$x = x_a(t - \mu), \quad y = y_a(t - \mu), \tag{2.8}$$

где μ — вещественный параметр. Функции $x_a(\cdot), y_a(\cdot)$ голоморфны в некоторой полосе комплексной плоскости, содержащей вещественную ось.

Так как система (2.7) $2\pi/\lambda$ – периодична по t, то будем следить за положениями частиц жидкости в моменты времени, кратные $2\pi/\lambda$. Совокупность перемещений частиц за время $2\pi/\lambda$ порождает отображение f_a плоскости $R^2 = (x, y)$ на себя, называемое отображение за период. Сепаратриса, задаваемая параметрически соотношениями (2.8), инвариантна при отображении f_0.

При малых значениях $\varepsilon \neq 0$ неподвижные точки отображения f_0 с координатами

$$x^{\pm} = \lim_{\tau\to\pm\infty} x_a(\tau), \quad y^{\pm} = \lim_{\tau\to\pm\infty} y_a(\tau)$$

не исчезнут, а лишь слегка сместятся. Они сохранят гиперболический тип. В частности, эти точки будут иметь устойчивые и неустойчивые сепаратрисы Λ_ε^+ и Λ_ε^-, инвариантные при отображении f_ε. Ясно, что $\Lambda_0^+ = \Lambda_0^- = \Lambda_0$. Однако, как заметил впервые Пуанкаре [4], в общем случае «возмущенные» сепаратрисы Λ_ε^+ и Λ_ε^- уже, как правило, не совпадают. Их пересечение образует довольно запутанную сеть, и траектории частиц становятся похожими на случайные (см. [2]). При увеличении ε зоны квазислучайного поведения траекторий гамильтоновой системы обычно увеличиваются.

Отыскание условий расщепления сепаратрис $\Lambda_\varepsilon^\pm$ сводится к анализу интеграла

$$J(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \{\Psi, \Phi\}(x_a, y_a)\, dt. \tag{2.9}$$

Здесь $\{,\}$ — обычная скобка Пуассона. Интеграл (2.9) имеет следующий вид:

$$J(\mu) = c_1 \cos\lambda\mu + c_2 \sin\lambda\mu,$$

$$c_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}_a(t)\cos\lambda t\, dt, \quad c_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}_a(t)\sin\lambda t\, dt.$$

Ясно, что функция $c_2(\lambda) + ic_1(\lambda)$ является преобразованием Фурье функции $\dot{x}_a(t)$. Так как $\dot{x}_a(t)$ экспоненциально быстро убывает с ростом $|t|$, то $c_2 + ic_1$ аналитически зависит от λ (см. [1])

Известно (см., например, [2]), что если $J(\mu)$ имеет простые нули, то при малых значениях $\varepsilon \neq 0$ сепаратрисы $\Lambda_\varepsilon^\pm$ трансверсально пересекаются. В рассматриваемом случае среднее значение $2\pi/\lambda$- периодической функции J равно нулю, поэтому у нее всегда имеются нули. Эти нули простые, если $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

Покажем, что когда $\dot{x}_a \not\equiv 0$, то для почти всех λ сумма $c_1^2 + c_2^2$ отлична от нуля. Действительно, $c_1^2 + c_2^2 \not\equiv 0$, так как в противном случае по теореме об обращении преобразования Фурье $\dot{x}_a = 0$. Поскольку c_1 и c_2 аналитичны, то $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ почти всюду.

Итак, если невозмущенная сепаратриса Λ_0 не лежит на прямой, то почти любое синусоидальное возмущение приводит к хаотизации течения вблизи Λ_0. Аналогичный случай справедлив и для прямолинейной сепаратрисы; нужно только дополнительное условие о непараллельности возмущающего поля и прямой, содержащей Λ_0.

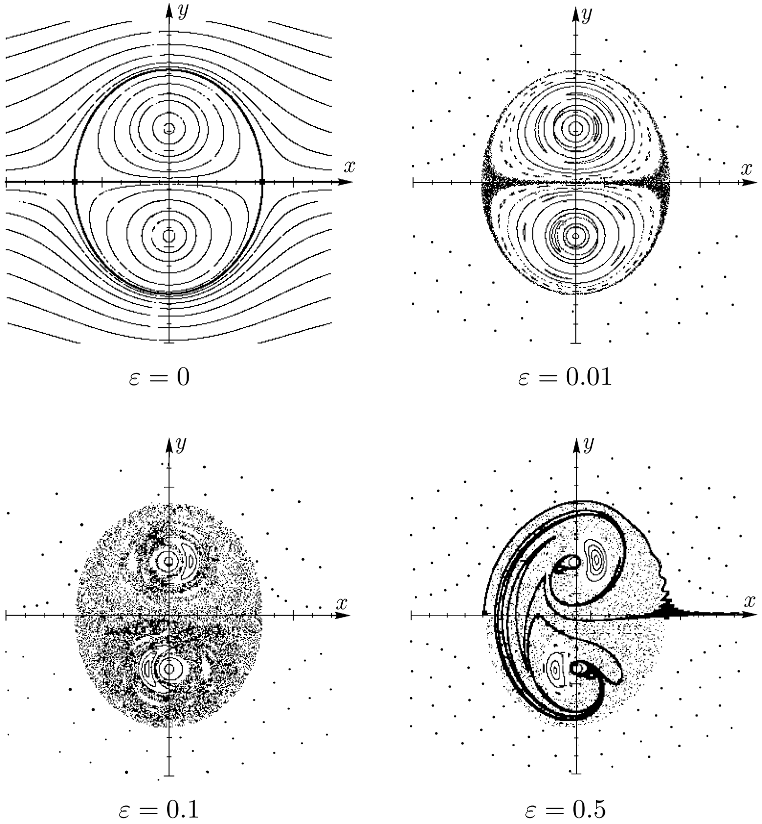

Рис. 1

3. В качестве приложения рассмотрим задачу о паре вихрей противоположной интенсивности (см. [1, $\S$ 155]). В некоторой равномерно движущейся системе отсчета движение частиц жидкости описывается уравнениями Гамильтона (1.2) с гамильтонианом

$$\Psi = \frac{\Gamma}{2\pi}\left(\frac{y}{2a} + \ln\left[\frac{x^2+(y-a)^2}{x^2+(y+a)^2}\right]^{1/2}\right).$$

Вихри с интенсивностями $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma \neq 0$ расположены в точках с координатами $(0, \pm a)$.

Ясно, что невозмущенное стационарное поле скоростей имеет две гиперболические особые точки $(\pm\sqrt{3}a, 0)$, соединенные тремя парами сдвоенных сепаратрис (фазовый портрет системы изображен на рис. а). Согласно результатам п. 2 эти пары сепаратрис расщепляются при добавлении малого возмущения вида (1.3) для почти всех значений λ. Для малых значений ε вблизи расщепленных сепаратрис будем иметь «острова» с хаотическим поведением траекторий частиц жидкости.

На рис. 1 этот результат проиллюстрирован для единичных значений Γ, a, λ на уровне $H = 1$. Явление расщепления сепаратрис и образование стохастических слоев хорошо видны на рисунках. На последнем рисунке показана отдельная сепаратриса для значения $\varepsilon = 0.5$.

Как показывают численные расчеты, в более простой задаче о возмущении поля скоростей изолированного вихря также наблюдается рождение стохастических слоев.

Автор благодарен А. В. Борисову, И. С. Мамаеву за помощь в проведении численных расчетов.

Замечание. Близкая задача о расщеплении сапаратрис и стохастизации периодически возмущенного течения для свободной вихревой пары рассмотрена в работе [5].

Литература

[1] Винер Н., Пэли Р. *Преобразование Фурье в комплексной области.* М. 1964.

[2] Козлов В. В. *Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике.* Успехи матем. наук. 1983, 38, вып. 1, с. 3–67.

[3] Ламб Г. *Гидродинамика.* М. 1947.

[4] Пуанкаре А. *Новые методы небесной механики.* Избранные труды, т. 1. М. 1971.

[5] Rom-Kedar V., Leonard A., Wiggins S. *An analytical study of transport, mixing and chaos in an unsteady vortical flow.* J. Fluid. Mech. 1990, v. 214, p. 347–394.