Математические заметки

том 48 выпуск 5 ноябрь 1990

О ГРУППАХ СИММЕТРИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ НА ЗАМКНУТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

В. В. Козлов

1. Введение. Основной результат. Пусть M — компактное двумерное риманово многообразие. Риманова метрика

$$ds^2 = \frac{1}{2} \sum g_{ij}(q)\, dq_i\, dq_j \tag{1}$$

порождает гамильтонову систему в кокасательном пучке T^*M с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} \sum g^{ij} p_i p_j, \tag{2}$$

где $\| g^{ij} \|$ — матрица, обратная к $\| g_{ij} \|$. При естественном проектировании $T^*M \to M$ фазовые траектории системы с гамильтонианом (2) переходят в геодезические линии метрики (1). Ограничение гамильтоновой системы на инвариантную поверхность $H = 1$ обычно называется геодезическим потоком на римановой поверхности (M, ds).

С точки зрения классической динамики система с функцией Гамильтона (2) описывает движение механической системы по инерции; M — конфигурационное пространство, а

$$T = \frac{1}{2} \sum g_{ij} \dot q_i \dot q_j$$

— кинетическая энергия.

Пусть v — гамильтоново векторное поле на T^*M, отвечающее функции Гамильтона (2). Векторное поле u (определенное на T^*M) называется полем симметрий гамильтоновой системы, если $[u, v] \equiv 0$, где $[\cdot, \cdot]$ — коммутатор векторных полей. Эквивалентное определение: фазовый поток динамической системы, порождаемой полем u, переводит решения гамильтоновой системы в решения той же системы.

Ясно, что всегда имеется тривиальное поле симметрий $u = \alpha v$, $\alpha = \mathrm{const}$. Более общо, если $u = \lambda v$ — поле симметрий, то функция $\lambda(p, q)$ — интеграл гамильтоновой системы с гамильтонианом (2).

Согласно теореме о выпрямлении, в малой окрестности каждой неособой точки в T^*M (когда $p \neq 0$) гамильтонова система всегда имеет трехпараметрическое семейство нетривиальных полей симметрий. С этой точки зрения задача о наличии полей симметрий является содержательной, когда поля определены всюду на T^*M.

Пусть F — функция на T^*M, v_F — гамильтоново векторное поле с гамильтонианом F. Так как

$$[v_H, v_F] = v_{\{H, F\}}$$

($\{\cdot, \cdot\}$ — скобка Пуассона), то каждому интегралу F уравнений Гамильтона с гамильтонианом H отвечает поле симметрий $u = v_F$. Поля v_H и v_F независимы, если независимы функции H и F. Поэтому задача о наличии нетривиальных полей симметрий содержит как частный случай задачу о наличии дополнительных интегралов, независимых с функцией H.

Пусть M имеет структуру вещественного аналитического многообразия и коэффициенты римановой метрики (1) являются локальными аналитическими функциями на M. В работе [1] доказано, что если эйлерова характеристика M отрицательна, то гамильтонова система с гамильтонианом (2) не имеет интеграла, аналитического на T^*M и независимого от функции H. Оказывается, аналогичный результат имеет место и в более общей задаче о группах симметрий. Будем предполагать, что поле симметрий u непрерывно дифференцируемо по $(p, q) \in T^*M$ и аналитично по p. Более точно, оператор дифференцирования L_u вдоль поля u переводит аналитические функции, заданные в T^*M, в функции класса C^1, аналитически зависящие от импульсов p_1, p_2.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $\chi(M) < 0$. *Тогда* $u = \lambda v$, *где* λ — *аналитическая функция от* H.

Этот результат содержит как частный случай основную теорему работы [1]. Имеются многочисленные примеры интегрируемых систем, когда $\chi(M) \geqslant 0$.

Предположим, что кривизна двумерного риманова многообразия (M, ds) всюду отрицательна. Тогда геодезический поток будет У-системой [2]. В этом случае можно утверждать больше: геодезический поток не допускает нетривиальных полей симметрий класса C^1 (см. [3]). Доказательство этого факта использует всюду плотность множества гиперболических долгопериодических замкнутых траекторий. Отметим, что эргодические системы не допускают непостоянных интегралов, однако нетривиальные группы симметрий могут существовать.

З а м е ч а н и е. Следует иметь в виду, что аналитические динамические системы могут иметь поля симметрий конечной гладкости. Примером служит система дифференциальных уравнений на двумерном торе $\mathbf{T}^2 = \{x_1, x_2 \bmod 2\pi\}$ следующего вида:

$$\dot{x}_1 = X, \quad \dot{x}_2 = \gamma X, \tag{3}$$

где $\gamma \in \mathbf{R}$, X — аналитическая положительная функция на $\mathbf{T}^2$. Можно показать, что при подходящем выборе функции X числовая ось $\mathbf{R} = \{\gamma\}$ разбивается на непересекающиеся множества $m_\omega, m_\infty, \ldots, m_k, \ldots$ так, что при $\gamma \in m_\omega$ система (3) имеет нетривиальное аналитическое поле симметрий, при $\gamma \in m_\infty$ система (3) допускает бесконечно дифференцируемое поле симметрий, но не имеет аналитических симметрий, ..., при $\gamma \in m_k$ имеется поле симметрий класса C^k, но нет нетривиальных полей симметрий класса гладкости C^{k+1}, ... Все множества m_ω, m_∞, ..., m_k, ... всюду плотны на числовой прямой и имеют мощность континуума; мера множества $\mathbf{R} \setminus m_\omega$ равна нулю.

А. Н. Колмогоров показал [4], что к виду (3) приводятся системы на двумерном торе, не имеющие особых точек и допускающие интегральный инвариант.

2. Доказательство теоремы. Будем считать, что M ориентируемо; в противном случае можно перейти к регулярному двулистному накрытию. Снабдим M комплексно-аналитической структурой. Для этого покроем M картами с локальными изотермическими координатами q_1, q_2; переход от карты к карте задается локальной голоморфной функцией комплексного переменного $q_1 + iq_2$. В этих координатах функция Гамильтона (2) принимает вид

$$H = \Lambda(q_1, q_2)(p_1^2 + p_2^2)/2. \tag{4}$$

Комплексно-аналитическая структура на M использовалась еще Биркгофом для решения задачи об условиях существования полиномиальных по импульсам интегралов не выше второй степени [5]. Метод Биркгофа лежит в основе найденного В. Н. Колокольцовым нового доказательства теоремы об отсутствии дополнительного аналитического интеграла при условии, что $\chi(M) < 0$ [6].

Оператор дифференцирования вдоль гамильтонова векторного поля, отвечающего функции Гамильтона (4), принимает вид

$$L_v = \sum \Lambda p_j \frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \sum \frac{\partial \Lambda}{\partial q_j}(p_1^2 + p_2^2)\frac{\partial}{\partial p_j}. \tag{5}$$

Пусть

$$L_u = \sum Q_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \sum P_j \frac{\partial}{\partial p_j} \tag{6}$$

— оператор дифференцирования вдоль поля симметрий u. Согласно предположению, функции Q_j, P_j аналитичны по импульсам p_1 и p_2. Разложим их в ряды по однородным формам от импульсов

$$Q_j = \sum\nolimits_{n\geqslant 0} Q_j^{(n)}, \quad P_j = \sum\nolimits_{n\geqslant 0} P_j^{(n)}.$$

Если операторы (5) и (6) коммутируют, то оператор (5) коммутирует с каждым из операторов

$$L^{(n)} = \sum Q_j^{(n-1)} \frac{\partial}{\partial q_j} + \sum P_j^{(n)} \frac{\partial}{\partial p_j}, \qquad n \geqslant 0. \tag{7}$$

При $n = 0$ надо положить $Q_j = 0$. Это очевидное утверждение позволяет свести задачу об аналитическом поле симметрий к задаче о поле симметрий с однородными полиномиальными компонентами. Так что в дальнейшем вместо оператора (6) будем рассматривать оператор (7).

Ниже многократно используются следующие два вспомогательных утверждения. Пусть

$$F = \sum_{r+s=n} f_{r,s}(q_1, q_2)\, p_1^r p_2^s$$

— однородный полином степени n с дифференцируемыми коэффициентами. Положим $p_1 = 1$, $p_2 = i$. Тогда $F = U + iV$, где U, V — вещественные функции от q_1, q_2. Предположим, что U, V удовлетворяют условиям Коши — Римана. Тогда $F^* = U + iV$ — локальная голоморфная функция от $z = q_1 + iq_2$.

ЛЕММА 1 (см. [6]). *Пусть $z \to w(z)$ — голоморфная функция. Тогда $F^*(z) = F^*(w(z))\,(w'(z))^{-n}$.*

ЛЕММА 2 (см. [6]). *Если $\chi(M) < 0$, то $F^* \equiv 0$.*

Действительно, пусть $F^*(z) \not\equiv 0$. Тогда, согласно лемме 1, дифференциальная форма

$$(\mathrm{d}z)^n / F^*(z) \tag{8}$$

инвариантна относительно голоморфных замен переменных. При $n = 1$ форма (8) является обычным абелевым дифференциалом. Когда $n > 1$, эту форму естественно назвать n-дифференциалом.

Хорошо известно, что для любого абелева дифференциала на компактной римановой поверхности M разность между числом нулей и числом полюсов равна $-\chi(M)$. Для n-дифференциала эта разность равна, очевидно, $-n\chi(M)$. Ввиду локальной голоморфности F^*, n-дифференциал (8) не имеет нулей. Так как $\chi < 0$, то число его полюсов отрицательно. Получили противоречие.

Пусть P_j^* (Q_j^*) — значение полинома P_j (Q_j) при $p_1 = 1$, $p_2 = i$.

ЛЕММА 3. *$R = \Lambda(P_1^* + iP_2^*)$ — голоморфная функция от $z = q_1 + iq_2$.*

Доказательство. Вычислим коммутатор $[L_u, L_v]$ и приравняем нулю коэффициенты при $\partial/\partial p_1$ и $\partial/\partial p_2$. В результате получим соотношения

$$\begin{gathered}
\Lambda \frac{\partial P_1^*}{\partial q_1} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} P_1^* + i\left(\Lambda \frac{\partial P_1^*}{\partial q_2} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} P_2^*\right) = 0,\\
i\left(\Lambda \frac{\partial P_2^*}{\partial q_2} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} P_2^*\right) + \Lambda \frac{\partial P_2^*}{\partial q_1} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} P_1^* = 0.
\end{gathered} \tag{9}$$

Отсюда вытекает равенство

$$\partial R/\partial q_1 + i\, \partial R/\partial q_2 = 0,$$

которое является критерием голоморфности функции R. Лемма доказана.

Согласно лемме 2, $R \equiv 0$. Итак, $P_1^* + iP_2^* = 0$. Из (9) получаем два равенства

$$\partial P_j^*/\partial q_1 + i\, \partial P_j^*/\partial q_2 = 0, \quad j = 1, 2.$$

Следовательно, P_j^* — локальные голоморфные функции от $z = q_1 + iq_2$. По лемме 2 $P_j^* \equiv 0$.

ЛЕММА 4 (см. [6]). *Пусть $F^* \equiv 0$. Тогда $F = HF'$, где F' — однородный многочлен степени $n - 2$.*

Поскольку $P_j^* \equiv 0$, то $P_j = HP_j'$. Покажем теперь, что многочлены Q_j также нацело делятся на многочлен H.

ЛЕММА 5. $S = Q_1^* + iQ_2^*$ — *голоморфная функция.*

Доказательство. Вычислим коммутатор $[L_u, L_v]$, приравняем нулю коэффициенты при $\partial/\partial q_1$, $\partial/\partial q_2$ и воспользуемся тождествами $P_j^* \equiv 0$. В результате получим соотношения

$$\begin{gathered}Q_1^* \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} + Q_2^* \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} - \Lambda \frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1} - i\Lambda \frac{\partial Q_1^*}{\partial q_2} = 0, \\ i\left(Q_1^* \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} + Q_2^* \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2}\right) - \Lambda \frac{\partial Q_2^*}{\partial q_1} - i\Lambda \frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2} = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

Отсюда вытекает, что

$$\partial S/\partial q_1 + i\, \partial S/\partial q_2 = 0.$$

Следовательно, S — локальная голоморфная функция. Лемма 5 доказана.

По лемме 2 $S \equiv 0$. Но тогда из (10) получаем два соотношения

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \frac{Q_j^*}{\Lambda} + i \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{Q_j^*}{\Lambda} = 0, \qquad j = 1, 2.$$

Следовательно, Q_j^*/Λ — голоморфные функции, которые равны нулю согласно лемме 2. Применяя лемму 4, получаем, что $Q_j = HQ_j'$.

Итак, $u = Hu'$. Поскольку множитель H — интеграл уравнений движения, то u' также является полем симметрий. Его степень по импульсам на две единицы меньше степени поля u. Индукция, убывающая вместе с n, сводит исходную задачу к задаче о наличии поля симметрий со степенью 0 или 1.

Случай $n = 0$ тривиален. При $n = 1$, очевидно, $Q_j = Q_j^* = 0$. Пусть $P_j = \xi_j p_1 + \eta_j p_2$. Как было показано выше, функции $P_j^* = \xi_j + i\eta_j \equiv 0$. Следовательно, $\xi_j = \eta_j \equiv 0$. Поэтому при $n = 1$ поле симметрий тождественно равно нулю.

- Теорема доказана полностью.

3. Заключительные замечания. По-видимому, теорема п. 1 справедлива в более общей задаче о движении обратимых систем в потенциальном силовом поле с аналитической потенциальной энергией $V \neq \text{const}$. Более точно, если $\chi(M) < 0$, то гамильтонова система не имеет нетривиальных аналитических полей симметрий на трехмерной энергетической поверхности $T+V=h$, где $h > \max_M V$.

Пусть M' — связная и геодезически выпуклая подобласть с краем риманова многообразия M. По-видимому, если $\chi(M') < 0$, то гамильтонова система также не имеет нетривиальных полей симметрий. При этих предположениях в работе [7] доказано отсутствие дополнительного аналитического интеграла. Отсюда вытекало бы отсутствие групп симметрий в задаче n неподвижных гравитирующих центров при $n > 2$ (ср. с [7]).

Наконец, было бы желательным установить многомерные варианты теоремы п. 1. Топологические препятствия к полной интегрируемости геодезических потоков в случае $\dim M > 2$ найдены в работе [8].

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
12.06.90

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Козлов В. В. Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // ДАН СССР. 1979. Т. 249, № 6. С. 1299—1302.

[2] Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. МИАН. Т. 90. М.: Наука, 1967.

[3] Козлов В. В. О группах симметрий динамических систем // ПММ. 1988. Т. 52, вып. 4. С. 531—541.

[4] Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // ДАН СССР. 1953. Т. 93. С. 763—766.

[5] Биркгоф Дж. Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941.

[6] Колокольцов В. Н. Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1982. Т. 46, № 5. С. 994—1010.

[7] Болотин С. В. Неинтегрируемость задачи n центров при $n > 2$ // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1984. № 3. С. 65—68.

[8] Тайманов И. А. О топологических свойствах интегрируемых геодезических потоков // Математические заметки. 1988. Т. 44, вып. 2. С. 283—284.