Прикладная математика и механика. Том 54, вып. 5, 1990

УДК 531.01

В. В. Козлов, А. И. Нейштадт

О РЕАЛИЗАЦИИ ГОЛОНОМНЫХ СВЯЗЕЙ

В работах Лекорню, Клейна и Прандтля (см. [1]), посвященных анализу парадоксов сухого трения, обнаруженных Пэнлеве, были высказаны идеи реализации голономных связей посредством упругих сил. Общая теорема о реализации голономных связей при помощи упругих сил, направленных к конфигурационному многообразию несвободной системы, высказана Курантом и доказана в [2]. Обобщению теоремы Куранта посвящены работы [3—5], в которых исследуется предельный переход в случае, когда в начальный момент времени скорость системы трансверсальна многообразию, задаваемому уравнениями связей. В [2—5] существенно использовано предположение о консервативности рассматриваемой системы.

Основной результат настоящей работы состоит в том, что теорема о предельном переходе справедлива без предположения о потенциальности обобщенных сил. Упругие силы, действующие на «свободную» систему, в общем случае не имеют предела, когда коэффициент упругости стремится к бесконечности. Однако, как показано ниже, после надлежащей регуляризации эти силы стремятся как раз к реакциям системы со связями.

1. Исходные уравнения. Пусть дана натуральная механическая система в $\mathbf{R}^n = \{r\}$, стесненная n_1 голономными идеальными связями. Пусть $E(r^\cdot, r)$ — кинетическая энергия системы без связей, $F(r^\cdot, r)$ — обобщенная активная сила. Уравнения движения имеют вид

$$(\partial E/\partial r^\cdot)^\cdot - \partial E/\partial r = F + R \tag{1.1}$$

где R — сила реакции связей. Связи задают в $\mathbf{R}^n$ многообразие M размерности $n_0 = n - n_1$, по которому обязана двигаться система. Согласно аксиоме идеальности связей 1-форма Rdr обращается в нуль на касательных векторах к M.

Рассматривается задача о реализации связей с помощью силы с потенциалом NW, где N — большой положительный параметр, а функция $W(r)$ принимает минимальное значение на многообразии связей. Уравнения движения системы, свободной от связей, имеют вид

$$(\partial E/\partial r^\cdot)^\cdot - \partial E/\partial r = F - N\partial W/\partial r \tag{1.2}$$

2. Формулировка результата. Пусть $r_\infty(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,— движение системы со связями, $R_\infty(t)$ — сила реакции вдоль этого движения. Предполагаются выполненными следующие условия.

1°. В некоторой окрестности G траектории движения r_∞ в конфигурационном пространстве $\mathbf{R}^n$ многообразие связей четырежды непрерывно дифференцируемо, функции W и E соответственно трижды и дважды непрерывно дифференцируемы. В некоторой окрестности G' траектории движения $(r_\infty, r_\infty^\cdot)$ в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ функция F дважды непрерывно дифференцируема.

2°. Функция W неотрицательна, обращается в нуль на M. В каждой точке M второй дифференциал W положительно определен на любом подпространстве размерности n_1, трансверсальном к многообразию M.

Пусть многообразие M задается уравнениями $f_k(r) = 0$ $(k = 1, \ldots, n_1)$, причем дифференциалы df_k линейно независимы в точках M. Тогда в качестве функции W можно взять, например, функцию $N\sum c_k f_k^2$, где c_k — положительные постоянные.

Пусть $r_N(t)$ — движение системы без связей с начальными условиями $r_N(0) = r_\infty(0)$, $r_N^\cdot(0) = r_\infty^\cdot(0)$.

Теорема. При достаточно большом N и $0 \leqslant t \leqslant 1$ движение определено и выполнены равенства

$$r_N(t) = r_\infty(t) + O(N^{-1}), \quad r_N^\cdot(t) = r_\infty^\cdot(t) + O(N^{-1/2}) \tag{2.1}$$

При $t_{1,2} \in [0, 1]$ вдоль движения $r_N(t)$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(N \frac{\partial W}{\partial r} + R_\infty(t)\right) dt = O(N^{-1/2}) \tag{2.2}$$

Замечание. Вторую оценку (2.1) можно уточнить:

$$r_{\parallel}^{\cdot}(t) = r_\infty^{\cdot}(t) + O(N^{-1}), \quad r_{\perp}^{\cdot}(t) = O(N^{-1/2}) \tag{2.3}$$

где $r_{\parallel}^{\cdot}(t)$ — ортогональная проекция $r_N^{\cdot}(t)$ на касательную плоскость к M в точке $r_\infty(t)$; $r_{\perp}^{\cdot}(t) = r_N^{\cdot}(t) - r_{\parallel}^{\cdot}(t)$; ортогональность определяется при помощи скалярного произведения, задаваемого квадратичной формой энергии E.

Согласно (2.2)

$$\lim_{t_1, t_2 \to t_0} \lim_{N \to \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} N \frac{\partial W}{\partial r}(r_N(t))\, dt = -R_\infty(t_0)$$

В общем случае предельные переходы по времени t и параметру N не перестановочны, так как предельное значений для упругой силы $N\partial W/\partial r$ при $N \to \infty$, как правило, не существует.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим движение материальной точки единичной массы по евклидовой плоскости $\mathbf{R}^2 = \{x, y\}$. Пусть M задается уравнением $y = 0$, а проекции силы F на оси x и y равны соответственно y и 1. Положим $W = y^2/2$. Тогда уравнения (1.2) принимают вид $x^{\cdot\cdot} = y$, $y^{\cdot\cdot} = 1 - Ny$. Так как $y_N(0) = y_N^{\cdot}(0) = 0$, то $y_N(t) = [1 - \cos(N^{1/2}t)]/N$. Ясно, что при фиксированном значении t

$$y_N(t) = O(N^{-1}), \quad y_N^{\cdot}(t) = O(N^{-1/2})$$

однако сила $-NW' = -Ny_N = \cos(N^{1/2}t) - 1$ быстро осциллирует (с частотой $N^{1/2}$) вокруг своего среднего значения, равного силе реакции связи $y = 0$. После усреднения по времени осцилляции уже имеют порядок $O(N^{-1/2})$ и поэтому стремятся к нулю, когда $N \to \infty$. Координата x описывает движение вдоль многообразия M. Так как $x_N^{\cdot\cdot} = y_N$, то $x_N - x_\infty = O(N^{-1})$, $x_N^{\cdot} - x_\infty^{\cdot} = O(N^{-1})$. Этот пример показывает также неулучшаемость оценок (2.1)—(2.3).

3. Доказательство. В окрестности каждой точки многообразия M можно ввести новые координаты $x \in \mathbf{R}^{n_0}$, $q \in \mathbf{R}^{n_1}$ так, что M задается уравнением $q = 0$ и квадратичная форма E при $q = 0$ не содержит произведений $x^{\cdot}$ и $q^{\cdot}$. Для упрощения изложения будем считать, что эти координаты введены глобально в области G. Тогда можно считать, что r — уже такие координаты, а x и q — соответственно первые n_0 и следующие n_1 компонент r. Уравнения движения принимают вид

$$\left(\frac{\partial E}{\partial q^{\cdot}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial E}{\partial q} + N\frac{\partial W}{\partial q} = Q, \quad \left(\frac{\partial E}{\partial x^{\cdot}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial E}{\partial x} + N\frac{\partial W}{\partial x} = Z \tag{3.1}$$

$$E = T(x^{\cdot}, x) + {}^1/_2 q^{\cdot} \cdot A(x) q^{\cdot} + O(|q|)$$

$$W = {}^1/_2 q \cdot B(x) q + O(|q|^3), \quad Z = X(x^{\cdot}, x) + O(|q^{\cdot}|) + O(|q|) \tag{3.2}$$

Матрицы A и B положительно определены.

Введем импульсы

$$p = \partial E/\partial q^{\cdot}, \quad y = \partial E/\partial x^{\cdot} \tag{3.3}$$

Уравнения движения запишутся в виде

$$\begin{aligned} q^{\cdot} &= \frac{\partial E}{\partial p}, \quad p^{\cdot} = -\frac{\partial E}{\partial q} - N\frac{\partial W}{\partial q} + Q \\ x^{\cdot} &= \frac{\partial E}{\partial y}, \quad y^{\cdot} = -\frac{\partial E}{\partial x} - N\frac{\partial W}{\partial x} + Z \end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь энергия E считается выраженной через q, p, x, y.

Система (3.4) определена в области $D' \subset \mathbf{R}^{2n}$, являющейся образом области G' при отображении $(q, q^{\cdot}, x, x^{\cdot}) \mapsto (q, p, x, y)$.

Положим $\xi = qN^{1/2}$ и будем предполагать, что $|\xi| < 1$. Тогда из (3.2)—(3.4) получим

$$\xi^{\cdot} = N^{1/2}A^{-1}p + f(\xi, p, x, y, N), \quad p^{\cdot} = -N^{1/2}B\xi + g(\xi, p, x, y, N) \tag{3.5}$$

$$x^{\cdot} = O(1), \quad y^{\cdot} = O(1)$$

Функции f, g и их производные — величины $O(1)$.

Пусть $\xi_s(x, y, N)$, $p_s(x, y, N)$ — решение системы уравнений, соответствующей равенству нулю правых частей первых двух уравнений системы (3.5). Функции ξ_s, p_s и их производные — величины $O(N^{-1/2})$.

Положим $\Xi = \xi - \xi_s$, $P = p - p_s$ и введем положительно определенную квадратичную форму переменных Ξ, P:

$$U = {}^1/_2 P\cdot A^{-1}P + {}^1/_2\Xi\cdot B\Xi$$

Дифференцируя U в силу уравнений движения, получим

$$dU/dt = O(N^{-1/2}U^{1/2}) + O(U) \tag{3.6}$$

Перейдем к оценкам для введенного выше движения $r_N(t)$ системы (1.2). Выберем любое $\tau \in [0, 1]$, такое, что при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ рассматриваемое движение определено и точка $(r, r^\cdot)$ не покидает G', а построенная по ней точка (q, p, x, y) не покидает $D' \cap \cap \{|\xi| < 1\}$. Тогда для этого движения определены величины Ξ, P, U. В начальный момент $(t = 0)$ было $\Xi = O(N^{-1/2})$, $P = O(N^{-1/2})$. Из (3.6) получаем, что вдоль движения $U = O(N^{-1})$, $\Xi = O(N^{-1/2})$, $P = O(N^{-1/2})$ и, следовательно,

$$\xi = O(N^{-1/2}),\ p = O(N^{-1/2}),\ q = O(N^{-1}),\ q^\cdot = O(N^{-1/2})$$

Используя эти оценки, из (3.1), (3.2) получаем, что при $0 \leqslant t \leqslant \tau$

$$x^\cdot = \partial T/\partial y + O(N^{-1}),\quad y^\cdot = -\partial T/\partial x + X + h(x, y)\, q^\cdot + O(N^{-1}) \tag{3.7}$$

Функция h и ее первые производные — величины $O(1)$.

Введем $Y = y + h(x, y)\, q$. Получим

$$x^\cdot = \partial T/\partial Y + O(1/N),\quad Y^\cdot = -\partial T/\partial x + X + O(1/N) \tag{3.8}$$

В этом выражении в аргументах T, X надо выразить $x^\cdot$ через y, x и заменить y на Y. Отбрасывая в (3.8) члены $O(1/N)$, придем к уравнениям движения системы со связями. Отброшенные члены за время $\tau \leqslant 1$ способны сместить решение лишь на величину $O(1/N)$. Сдвиг в начальных условиях на $O(1/N)$ при переходе от y к Y также смещает решение на $O(1/N)$. Поэтому на рассматриваемом движении x, y и, значит, $x^\cdot$ отличаются от соответствующих величин для движения r_∞ на $O(1/N)$. Следовательно, при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ выполнены оценки (2.1), (2.3) теоремы и замечания к ней. В силу этих оценок при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ точка $(r_N(t), r_N^\cdot(t))$ находится на положительном расстоянии от границы G' и выполнено $|\xi(t)| < {}^1/_2$. Следовательно, можно выбрать $\tau = 1$.

Перейдем к выводу оценки (2.2) теоремы. Поскольку $\partial W/\partial r$, R_∞ не инвариантны относительно замен координат, здесь не будем пользоваться сделанным выше конкретным выбором r; считаем $r = r(x, q)$.

Используя уже доказанные оценки (2.1), получаем

$$N\frac{\partial W}{\partial r} = N\frac{\partial W}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial r} + N\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} = N\frac{\partial W}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial r} + O\left(\frac{1}{N}\right) =$$
$$= \left[\left(-\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial q^\cdot} + \frac{\partial E}{\partial q} + Q\right)\frac{\partial q}{\partial r}\right] + O\left(\frac{1}{N}\right)$$
$$R_\infty = \left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial q^\cdot} - \frac{\partial E}{\partial q} - Q\right)\frac{\partial q}{\partial r}\right]_\infty + \left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial x^\cdot} - \frac{\partial E}{\partial x} - Z\right)\frac{\partial x}{\partial r}\right]_\infty$$

Индекс ∞ означает, что соответствующая величина вычисляется вдоль движения системы со связями. Последнее слагаемое в выражении для R_∞ тождественно равно нулю, так как условие обращения в нуль выражения в круглых скобках в этом слагаемом при $q = q^\cdot = q^{\cdot\cdot} = 0$ есть уравнение Лагранжа для движения со связями. Теперь, опять используя (2.1), получим

$$N\frac{\partial W}{\partial r} + R_\infty = -\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial q^\cdot} - \frac{\partial E}{\partial q} - Q\right)\frac{\partial q}{\partial r} + \left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial q^\cdot} - \frac{\partial E}{\partial q} - Q\right)\frac{\partial q}{\partial r}\right]_\infty +$$
$$+ O\left(\frac{1}{N}\right) = A(x_\infty)\, q^{\cdot\cdot}\cdot\left(\frac{\partial q}{\partial r}\right)_\infty + (N^{-1/2})$$

Интегрируя слева и справа по t от t_1 до t_2, используя справа интегрирование по частям и учитывая, что $q^\cdot = O(N^{-1/2})$, $r_\infty^\cdot = O(1)$, получаем оценку (2.2) теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пэнлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
2. *Rubin H., Ungar P.* Motion under a strong constraining force // Communs. Pure and Appl. Math. 1957. V. 10. № 1. P. 65—87.
3. *Takens F.* Motion under influence of a strong constraining force // Global theory Dynamic Systems. B.: Springer-Verlag. 1980. P. 425—445.
4. *Kampen N. G. van.* Elimination of fast variables // Phys. Repts. 1985. V. 124. № 2. P. 69—160.
5. *Benettin G., Galgani L., Giorgilli A.* Realization of holonomic constraints and freezing of high frequency degrees of freedom in the light of classical perturbation theory // Communs. Math. Phys. 1987. V. 113. № 1. P. 87—103.

Москва

Поступила в редакцию
25.IX.1989