УДК 531.01

В. В. Козлов

ВИХРЕВАЯ ТЕОРИЯ ВОЛЧКА

1. Вихревые течения идеальной жидкости. Напомним сперва некоторые результаты из гидродинамики. Пусть v — стационарное поле скоростей идеальной жидкости, ρ — ее плотность. Предположим, что течение баротропно и внешние силы потенциальны. Тогда векторные поля v и $w=(\operatorname{rot} v)/\rho$ коммутируют: $[v, w]=0$ [1, 2]. Пусть f — интеграл

Бернулли; эта функция постоянна на линиях тока и вихревых линиях — интегральных кривых поля w: $df(v)=df(w)=0$. В случае, когда течение вихревое (поля v и w линейно независимы), поверхности Бернулли $B_c=\{f=c\}$ регулярны. Компактные поверхности B_c диффеоморфны двумерным торам, причем частицы жидкости движутся по этим торам условно периодически (поскольку поля v, w касаются B_c и $[v, w]=0$). Отметим для дальнейшего, что «вихревое» поле w получается делением ротора скорости на плотность интегрального инварианта динамической системы $\dot{x}=v(x)$.

2. Гидродинамика гамильтоновых систем. Предположим, что автономная гамильтонова система

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial y},\quad \dot{y}=-\frac{\partial H}{\partial x} \tag{1}$$

имеет инвариантное соотношение $y=u(x)$. Рассмотрим функцию $f(x)=$ $=H(x, u(x))$, векторное поле

$$v(x)=\left.\frac{\partial H}{\partial y}\right|_{y=u(x)},$$

1-форму $\omega=u(x)dx$ и ее дифференциал $\Omega=d\omega$. Как показано в работе [3], эти объекты связаны соотношениями

$$i_v\Omega=-df,\quad L_v\Omega=0. \tag{2}$$

Здесь i — внутреннее произведение $(i_v\Omega=\Omega(v, \cdot))$, L_v — дифференцирование вдоль векторного поля v.

Векторное поле w называется вихревым, если $i_w\Omega=0$. Если форма Ω неособая (следовательно, число степеней свободы исходной гамильтоновой системы нечетно), то в каждой точке x вектор $w(x)$ определен однозначно (с точностью до умножения на число). Интегральные кривые поля w называются вихревыми линиями. Из (2) вытекает, что фазовый поток системы

$$\dot{x}=v(x) \tag{3}$$

переводит вихревые линии в вихревые линии и функция f («интеграл Бернулли») постоянна на траекториях системы (3) и вихревых линиях. Как доказано в [3], в неособом случае найдется вихревое поле w, коммутирующее с полем v.

В самом общем случае в каждой точке x вихревые векторы образуют линейное пространство; обозначим его W_x. Предположим, что $\dim W_x=m=\text{const}$ для всех x. Тогда семейство $\{W_x\}$ порождает m-мерное распределение касательных плоскостей на пространстве положений $\{x\}$. Покажем, что оно интегрируемо.

Действительно, пусть

$$i_{w_1}\Omega=i_{w_2}\Omega=0.$$

Воспользуемся формулой [4, гл. IV]

$$i_{[w_1,w_2]}\Omega=[L_{w_1},\ i_{w_2}]\,\Omega=L_{w_1}(i_{w_2}\Omega)-i_{w_2}(L_{w_1}\Omega)=-i_{w_2}(L_{w_1}\Omega).$$

С другой стороны, для любого вихревого поля w имеем равенство

$$L_w\Omega=d(i_w\Omega)+i_w\,d\Omega=0.$$

Следовательно, коммутатор $[w_1, w_2]$ также является вихревым полем. Что и требовалось.

Через каждую точку x проходит m-мерное интегральное многообразие распределения $\{W_x\}$. Эти многообразия естественно назвать вихревыми. Ясно, что функция f постоянна на каждом вихревом многообразии. Из второго уравнения (2) получаем многомерный вариант теоремы Томсона: фазовый поток системы (3) переводит вихревые многообразия в вихревые многообразия. Этот результат справедлив и в неавтономном случае.

Рассмотрим более подробно системы с тремя степенями свободы. Как и в гидродинамике, компактные регулярные «поверхности Бернулли» $\{f=c\}$ снова являются двумерными торами, причем в некоторых угловых координатах φ_1, $\varphi_2 \bmod 2\pi$ на этих торах уравнения (3) приводятся к простейшему виду: $\dot{\varphi}_k=\mathrm{const}$.

Пусть $H=T+V$, где $T(V)$ — кинетическая (потенциальная) энергия системы. Наличие метрики

$$T=g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j/2$$

позволяет в трехмерном случае вычислить ротор скорости $v(x)$. Приведем инвариантное определение поля $\operatorname{rot} v$. Для этого сначала сопоставим векторному полю $v=\{v^i\}$ ковекторное поле $u=\{u_i\}$ с компонентами $u_i=g_{ij}v^j$. Положим $\omega=u_i dx^i$ и $\Omega=d\omega$. Пусть $\tau=|g|d^3x$ — 3-форма ориентированного объема ($|g|$ — определитель матрицы $\|g_{ij}\|$). Положим наконец

$$i_{\operatorname{rot} v}\tau=\Omega. \tag{4}$$

В случае евклидова пространства эта формула задает векторное поле обычного ротора. Заметим, что $u(x)$ — значение канонического импульса $y=\partial T/\partial\dot{x}$, вычисленного по полю $v(x)$. Как видно из (4), поле $\operatorname{rot} v$ является вихревым. Оказывается, найдется положительная функция $\rho(x)$, такая, что

1) вихревое поле $w=(\operatorname{rot} v)/\rho$ коммутирует с полем v,

2) динамическая система (3) имеет интегральный инвариант

$$\int_D \rho\tau=\int_D |g|\rho d^3x. \tag{5}$$

Доказательство 1)—2) приведено в работе [3] с использованием неинвариантных обозначений.

3. Вихревая теория волчка. Существенным моментом гидродинамической теории п. 2 является нетривиальный вопрос о наличии стационарных инвариантных поверхностей $y=u(x)$. Однако в ряде задач гамильтоновой механики такие поверхности, действительно, существуют. Простейшим примером служит задача Эйлера о вращении по инерции твердого тела вокруг неподвижной точки.

Зафиксируем постоянный вектор кинетического момента тела $\mathbf{K}$ в неподвижном пространстве. Положим $\gamma=\mathbf{K}/|\mathbf{K}|$, $|\mathbf{K}|=k$, так что $\mathbf{K}=k\gamma$. Это равенство позволяет найти угловую скорость тела как однозначную функцию его положения. Таким образом, на группе $SO(3)$ — конфигурационном пространстве твердого тела с неподвижной точкой — возникает динамическая система вида (3). Фазовый поток системы (3) задает стационарное «течение» на группе $SO(3)$. Изучим его свойства.

Справедливы следующие утверждения.

а. Вихревые поля w на группе $SO(3)$, коммутирующие с полем скоростей v, порождают вращение твердого тела с угловой скоростью

$\omega=\mu\gamma$, $\mu=\mathrm{const}$. В частности, вихревые поля левоинвариантны и все вихревые линии замкнуты. Расслоение группы $SO(3)$ вихревыми линиями совпадает с известным расслоением Хопфа.

b. Эти поля определяются соотношениями $i_w\Omega=0$, $\omega(w)=\mathrm{const}$.

c. Гамильтонова система на $T^*SO(3)$ с гамильтонианом $H'=\mathbf{K}^2/2$ имеет инвариантные поверхности $\mathbf{K}=\mathbf{k}$. Отвечающие им векторные поля на группе $SO(3)$ вида (3) являются вихревыми полями, коммутирующими с полем v.

d. Метрика на $SO(3)$, задаваемая кинетической энергией тела, позволяет вычислить $\operatorname{rot} v$. Согласно п. 2 это поле — вихревое. Отвечающий ему интегральный инвариант (5) совпадает с двусторонней инвариантной мерой на группе $SO(3)$ (значение интеграла (5) не меняется при левых и правых сдвигах на $SO(3)$). Напомним, что инвариантная мера на каждой компактной группе Ли единственна с точностью до постоянного положительного множителя. Инвариантную меру системы (3) можно также представить в виде интеграла

$$\int\limits_D \omega \wedge \Omega.$$

e. «Интеграл Бернулли» f равен $(I^{-1}\gamma, \gamma)/2$, где I — оператор инерции твердого тела. Критические точки функции f — орбиты постоянных вращений тела вокруг главных осей инерции (с фиксированным значением момента $\mathbf{K}$), а критические значения совпадают со значениями энергии на этих вращениях. Если c не является критическим значением функции f, то «поверхность Бернулли» $B_c=\{f=c\}$ — двумерный тор с условно периодическим движением. Торы B_c — естественные проекции двумерных лиувиллевых торов из фазового пространства $T^*SO(3)$ на группу $SO(3)$.

Доказательство **a**—**e** основано на простых прямых вычислениях. Введем на $SO(3)$ локальные координаты — углы Эйлера ϑ, φ, ψ, принимая ось постоянного кинетического момента за вертикаль. Пусть p_ϑ, p_φ, p_ψ — сопряженные канонические импульсы. В этих переменных уравнение трехмерной инвариантной поверхности примет следующий вид:

$$p_\psi=k,\ p_\vartheta=0,\ p_\varphi=k\cos\vartheta.$$

Ясно, что $\omega=k\,d\psi+k\cos\vartheta\,d\varphi$ и $\Omega=k\sin\vartheta\,d\varphi\wedge d\vartheta$. Поэтому векторные поля

$$\psi'=\mu,\ \vartheta'=0,\ \varphi'=0 \tag{6}$$

являются вихревыми.

С использованием кинематических формул Эйлера запишем уравнения (3):

$$\begin{gathered}\dot\psi=k\left(\frac{\sin^2\varphi}{A}+\frac{\cos^2\varphi}{B}\right),\quad \dot\vartheta=k\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\sin\vartheta\sin\varphi\cos\varphi,\\ \dot\varphi=k\cos\vartheta\left(\frac{1}{C}-\frac{\sin^2\varphi}{A}-\frac{\cos^2\varphi}{B}\right).\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь A, B, C — главные моменты инерции твердого тела. Уравнения (7) известны в связи с точным интегрированием задачи Эйлера [5].

Поля (6) и (7) коммутируют при условии $\mu=\mathrm{const}$. По формулам Эйлера поле (6) порождает вращение твердого тела с угловой скоростью $\omega=\mu\gamma$, что доказывает **a**. Так как $\mu=\text{const}$, то $\omega(w)=k\mu=\text{const}$. Отсюда вытекает заключение **b**. Аналогично доказывается **c**.

Вычислим ротор поля (7). Форма ориентированного объема τ равна $ABC\sin^2\vartheta\, d\psi \wedge d\varphi \wedge d\vartheta$. Поэтому согласно (4) поле ротора определяется системой уравнений

$$\psi'=\frac{k}{ABC\sin\vartheta},\quad \vartheta'=0,\quad \varphi'=0.$$

В качестве функции ρ из п. 2 можно взять $1/\sin\vartheta$. Поэтому инвариант (5) принимает вид

$$\iiint\limits_D \sin\vartheta\, d\psi \wedge d\varphi \wedge d\vartheta. \tag{8}$$

Хорошо известно, что эта формула задает как раз двустороннюю инвариантную меру на группе $SO(3)$ (см., например, [6]). Утверждение **d** доказано.

Заключение **e** вытекает из результатов п. 2.

Свойства **a**—**e** справедливы и в более общей задаче Жуковского о вращении твердого тела с симметричным маховиком. Было бы интересно распространить эти результаты на задачу о геодезических линиях на компактных группах Ли с левоинвариантной метрикой.

4. Некоторые обобщения. Напомним, что классом 1-формы ω называется коразмерность линейного пространства векторов w, таких, что

$$i_w\omega=0,\quad i_w\Omega=0$$

[4, гл. VI]. Ниже рассматривается случай, когда n нечетно и класс формы ω равен n, в частности форма Ω — неособая. Эти условия заведомо выполнены в задаче Эйлера.

Будем рассматривать движение по инерции, так что

$$H=g^{ij}(x)y_iy_j/2.$$

Согласно принципу Мопертюи к движению по инерции сводится движение в произвольном потенциальном поле. По формуле Эйлера для однородных функций $i_v\omega=2f$.

Пусть $w\neq 0$ — вихревое поле, коммутирующее с полем v. Докажем, что $i_w\omega$ — интеграл уравнений (3) (ср. со свойством **b** п. 3). Воспользуемся формулой [4, гл. V]

$$L_v(i_w\omega)=i_w(L_v\omega)+i_{[v,w]}\omega. \tag{9}$$

Так как $L_v\omega=i_v\,d\omega+di_v\omega=i_v\Omega+di_v\omega=d(i_v\omega-f)=df=-i_v\Omega$ (уравнение (2)), то $i_w(i_v\Omega)=-i_v(i_w\Omega)=0$. Учитывая еще, что $[v, w]=0$, из формулы (9) получим искомое равенство

$$L_v(i_w\omega)=0.$$

Положим $n=2l+1$. Так как ω — форма максимального класса, то

$$\tau=\omega\wedge(\Omega)^l —$$

форма объема на конфигурационном пространстве $\{x\}$ [4, гл. VII]. Докажем, что

$$\int\limits_D \tau \tag{10}$$

является инвариантной мерой динамической системы (3) (ср. со свойством **d** п. 3). Поскольку $L_v\Omega=0$, то

$$L_v\tau=L_v\omega\wedge(\Omega)^l+\omega\wedge L_v\Omega\wedge\ldots\wedge\Omega+\ldots=L_v\omega\wedge(\Omega)^l.$$

Воспользуемся равенством

$$L_v\omega=i_v\,d\omega+di_v\omega=df=-i_v\Omega.$$

Так как $(\Omega)^{l+1}=0$, то $i_v(\Omega)^{l+1}=(l+1)\,i_v\Omega\wedge(\Omega)^l=0$. Следовательно, $L_v\tau=0$, и поэтому интеграл (10) инвариантен относительно фазового потока системы (3).

5. Неавтономный случай. Если уравнения Гамильтона (1) допускают инвариантное соотношение $y=u(x,\ t)$, то дифференциальные формы $\omega=udx$ и $\Omega=d_x\omega$ зависят явно от времени. В этом случае уравнения (2) заменяются более общими (см. [3])

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+i_v\Omega=-d_xf,\quad \frac{\partial\Omega}{\partial t}+L_v\Omega=0,\tag{11}$$

где $f(x,\ t)=H(u(x,\ t),\ x,\ t)$. Первое из этих уравнений можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+L_v\omega=d_xg,\quad g=i_v\omega-f.$$

Функция g имеет простой механический смысл: это лангранжиан, в котором скорость $\dot{x}$ заменена векторным полем $v(x,\ t)$. Если $g=\mathrm{const}$, то 1-форма ω «вморожена» в фазовый поток системы

$$\dot{x}=v(x,\ t).\tag{12}$$

В частности, если $n=2l+1$ и класс формы ω равен n, то имеется инвариантный интеграл (10), где $\tau=\omega\wedge(\Omega)^l$. Отметим, что второе уравнение (11) является простым следствием первого.

Пусть $x(t,\ z)$ — решение системы (12) с начальными данными $x(0,\ z)=z$. Соответствие $z\to x=x(t,\ z)$ можно рассматривать как замену переменных. В координатном пространстве $\{z\}$ система (11) сохраняет тот же вид:

$$\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial t}+i_{\tilde{v}}(d_z\tilde{\omega})=-d_z\tilde{f}.\tag{13}$$

Так как новые переменные z не меняются, то $\tilde{v}=0$. Следовательно, $\partial\tilde{\omega}/\partial t=-d_z\tilde{f}$. Откуда $\partial/\partial t(\tilde{\Omega})=0$, где $\tilde{\Omega}=d_z\tilde{\omega}$. Итак, в переменных z 2-форма $\tilde{\Omega}$ стационарна. Этот результат можно было бы сразу вывести из второго уравнения (11). Согласно лемме Пуанкаре $\tilde{\Omega}=d_z\omega'$, где 1-форма $\tilde{\omega}$ также не зависит от t. Может, конечно, оказаться, что $\tilde{\Omega}=d_z\tilde{\omega}$, причем форма $\tilde{\omega}$ зависит явно от t. Но тогда разность $\tilde{\omega}-\omega'$ замкнута: локально $\tilde{\omega}=\omega'+d_zS(z,\ t)$. Уравнение (13) принимает следующий вид:

$$i_{\tilde{v}}(d_z\omega')=-d_zf',\tag{14}$$

где $f'=\tilde{f}+\partial S/\partial t$. Так как $\tilde{v}=0$, то, конечно, $f'=f'(t)$. Если n четно и форма Ω не выроождена, то (14) является уравнением Гамильтона (гамильтонианом служит функция $f+\partial S/\partial t$, а не f, как утверждалось в [3]).

Смысл добавочного слагаемого $\partial S/\partial t$ легко уяснить, если представить первое уравнение (11) как уравнение Лагранжа вариационной задачи Пфаффа

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(\omega-f\,dt)=0,\quad \delta x(t_1)=\delta x(t_2)=0$$

(см. [7, гл. II]). Задача Пфаффа не изменится, если добавить подынтегральное слагаемое $dS=(\partial S/\partial t)dt+d_xS$. Следовательно, подстановки $\omega\to\omega+d_xS$, $f\to f-\partial S/\partial t$ представляют тривиальное калибровочное преобразование.

Итак, надлежащим неавтономным преобразованием 2-форму Ω можно сделать автономной, однако для 1-формы ω этого можно добиться подходящей калибровкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. О топологии трехмерных стационарных течений идеальной жидкости//Прикл. матем. и механ. 1966. **30**, вып. 1. 183—185.
2. Козлов В. В. Замечания о стационарных вихревых движениях сплошной среды//Прикл. матем. и механ. 1983. **47**, вып. 2. 341—342.
3. Козлов В. В. Гидродинамика гамильтоновых систем//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1983. № 6. 10—22.
4. Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М., 1973.
5. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.; Л., 1937.
6. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца. М., 1958.
7. Биркгоф Дж. Динамические системы. М.; Л., 1941.

Поступила в редакцию
15.02.90