СБОРНИК научно-методических статей

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ВЫПУСК 20, 1990 Г.

УДК 531.01

В. В. КОЗЛОВ

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Конструктивный подход к обоснованию динамики систем со связями (к 200-летию «Аналитической механики» Ж. Л. Лагранжа)

В минувшем году исполнилось 200 лет с момента выхода в свет сочинения Ж. Лагранжа «Аналитическая механика». В этой книге, названной Гамильтоном «математической поэмой», Лагранж подытожил свои исследования по механике, придав им дедуктивную аналитическую форму. Практически все содержание «Аналитической механики» стало классическим. Это метод обобщенных координат и метод множителей Лагранжа, знаменитые уравнения Лагранжа в динамике, вариационные принципы, энергетический критерий устойчивости, теория возмущений в небесной механике и многое другое. Одним из главных достижений Лагранжа, изложенных в «Аналитической механике», является общая теория механических систем с геометрическими (голономными) связями. Конечно, до Лагранжа, в работах Гюйгенса, Ньютона, братьев Бернулли, Клеро, Эйлера и других авторов были решены различные конкретные задачи со связями. «Однако, — как пишет Лагранж, — при решении всякой задачи требовалась всегда особая ловкость для определения всех сил, которые в данном случае должны быть приняты во внимание» [1] (т. II, с. 311). Соединив принцип Даламбера из динамики с принципом возможных перемещений аналитической статики, Лагранж пришел к «общему уравнению динамики», которое теперь обычно называют принципом Даламбера-Лагранжа. Самим Лагранжем и его последователями были даны различные доказательства этого принципа в рамках формально-аксиоматического метода. Однако они мало прояснили физическую сторону теории систем со связями. Элементы альтернативного конструктивного подхода к обоснованию теории геометрических связей были намечены в работах Клейна и Прандтля, посвященных анализу парадоксов Пенлеве [2]. Их идея состоит в выполнении предельного перехода к случаю жестких связей в решениях полных уравнений движения.

Эта статья посвящена обсуждению возможностей конструктивного подхода в динамике систем со связями. Сначала рассматриваются вопросы реализации дифференциальных связей. Ради простоты изложения мы ограничились случаем линейных и однородных по скоростям связей. Далее обсуждаются специфические возможности реализации геометрических связей. В заключение рассмотрены вопросы обоснования динамики систем с ударами.

1. Явное разделение кинематических связей на интегрируемые и неинтегрируемые проведено Г. Герцем в его знаменитом сочинении [3]. Такие связи Герц назвал соответственно «голономными» и «неголономными»; эти термины теперь прочно вошли в употребление. Стоит подчеркнуть, что задолго до Герца были составлены неголономные уравнения движения и решены конкретные задачи. Уравнения, описывающие динамику неголономных систем, были выведены М. В. Остроградским (1838), Ферресом (1872) и Раусом (1877). В консервативном случае уравнения Рауса имеют следующий вид:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = \lambda^j a_{ij}, \quad a_{ks}\dot{x}^s = 0. \tag{1}$$

Здесь и всюду ниже употребляются тензорные обозначения; $x^1, \ldots, x^n$ — лагранжевы координаты, $L = T - V$ — функция Лагранжа. Множители λ^j можно найти как функции состояния системы x, $\dot{x}$ и поэтому реакции связей $R_i = \lambda^j a_{ji}$ можно трактовать как силы, действующие на рассматриваемую систему.

Уравнения (1) выводятся из принципа Даламбера-Лагранжа:

$$\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial x^i}\right]\delta x^i = 0, \quad a_{ks}\delta x^s = 0. \tag{2}$$

Сам же принцип обычно доказывается с помощью принципа освобождаемости связей и аксиомы об их идеальности. Согласно принципу освобождаемости, систему со связями можно считать «свободной», а действие связей заменить действием сил реакций R_i:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = R_i.$$

Применяя затем условие идеальности связей $R_i\delta x^i = 0$, приходим к принципу Даламбера-Лагранжа (2). Впрочем, многие математики и механики (Пуансо, Якоби, Кирхгоф и др.) не считали эти рассуждения доказательством и трактовали принцип Даламбера-

Лагранжа как естественное распространение уравнений Ньютона для систем свободных точек на системы со связями. «Доказывать это распространение ни в коей мере не является нашей задачей, скорей мы хотим его рассматривать как принцип, доказывать который не нужно. Таков взгляд многих математиков, в частности, Гаусса» ([4], с. 15). Здесь имеется еще одно обстоятельство, обычно оставляемое в тени: остается неясным происхождение уравнения для вариаций (возможных перемещений) $a_i\delta x^i=0$. Точно такое же уравнение вариаций имеет место в неголономной механике и для неоднородного кинематического соотношения $a_i\dot{x}^i=b$. По существу мы имеем здесь дополнительный постулат. Этот момент разъяснен Н. Г. Четаевым в работе [5], где введено уравнение вариаций для общей нелинейной связи $f(\dot{x}, x)=0$:

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i}\delta x^i = 0.$$

Отметим еще, что, согласно интегральному принципу Гельдера [6], движения неголономной системы являются экстремалями функционала действия

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt$$

для вариаций с нулевыми условиями на концах, удовлетворяющих соотношениям $a_{ks}\delta x^s=0$. Интегральные принципы неголономной механики детально исследованы В. В. Румянцевым [7].

2. Сказанное выше является вариантом формально-аксиоматического изложения теории неголономных систем. К. Каратеодори предложил конструктивный подход к обоснованию неголономной механики. В его работе [8] рассмотрена динамика свободной системы, находящейся под действием дополнительных сил анизотропного вязкого трения с диссипативной функцией Рэлея $F=$ $=N(a_i\dot{x}^i)^2/2$, и показано, что при $S\to\infty$ решения уравнения Лагранжа

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}$$

стремятся на конечном интервале времени к решениям неголономных уравнений (1). Задача Каратеодори сводится к анализу сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений. Интересно отметить, что в работе [8] впервые указан эффект пограничного слоя для сингулярных систем. Результаты Каратеодори дополнены и усилены в работах Н. А. Фуфаева, И. В. Новожилова, И. Хмелевского, А. В. Карапетяна и др. авторов. Обзор этих работ и необходимые ссылки можно найти в [9].

Введение сил вязкого или сухого трения не является единственным способом реализации кинематических связей. В работе [10] рассмотрена динамика свободной системы с лагранжианом $L_N = T + N(a_i\dot{x}^i)^2/2 - V$ и доказано, что при $N \to \infty$ решения уравнений Лагранжа

$$\left(\frac{\partial L_N}{\partial \dot{x}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L_N}{\partial x^i} = 0 \qquad (3)$$

неограниченно приближаются к экстремалям следующей вариационной задачи:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \qquad (4)$$

в классе кривых с заклепленными концами, удовлетворяющих уравнению связи $a_i\dot{x}^i = 0$. При больших N уравнения (3) описывают динамику системы с сильной анизотропией в распределении массы. Вариации δx^i как функции времени удовлетворяют уравнениям

$$\left(\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i}\right)\dot{x}^i \delta x^k + (a_i \delta x^i)^{\cdot} = 0 \qquad (5)$$

В случае интегрируемых связей (когда $a_i = \partial f/\partial x^i$) соотношения (4) и (5) дают известный принцип Гамильтона-Остроградского для голономных систем. Если связи неинтегрируемы, то получаем естественное обобщение этого вариационного принципа. Г. Герц, О. Гельдер, Г. К. Суслов и др. авторы показали, что в общем случае неинтегрируемых связей принципы Даламбера-Лагранжа и Гамильтона-Остроградского дают разные уравнения движения. Отсюда был сделан вывод о том, что вариационный принцип Гамильтона-Остроградского не имеет отношения к динамике систем с неинтегрируемыми связями. Любопытна аргументация Герца: «...шар, который двигается в соответствии с упомянутым принципом (принципом Гамильтона-Остроградского — В. К.), был бы чрезвычайно похож на живое существо, которое целеустремленно двигается к определенному положению, в то время как рядом с ним шар, подчиняющийся закону природы, произвел бы впечатление мертвой, равномерно перекатывающейся массы» ([2], с. 35).

Кстати сказать, постановка вариационной задачи (4)—(5) восходит к Лагранжу, однако он не связывал ее с проблемами динамики.

По нашему мнению, вопрос о том, какой именно из обсуждаемых принципов следует положить в основу динамики систем с неинтегрируемыми связями, не имеет смысла. И принцип Даламбера-Лагранжа, и принцип Гамильтона-Остроградского позволяют записать непротиворечивые уравнения движения. Вопрос о выборе модели для каждого конкретного случая в конечном итоге решает эксперимент. Если неинтегрируемые связи реализуются силами вязкого трения с большой вязкостью, то для описания движения системы следует воспользоваться классической неголономной моделью. К этому классу задач относятся, например, задачи о качении тел. Если же связи возникают в результате изменения метрического тензора системы (например, за счет присоединенных масс), то с теоретической точки зрения предпочтение следует отдать модели, связанной с вариационным принципом Гамильтона-Остроградского. Эта модель для краткости названа нами вакономной механикой. В работе [10] развита аналитическая механика вакономных систем (принцип детерминированности, условия равновесия и малые колебания, уравнения Пуанкаре-Четаева на алгебрах Ли, оптико-механическая аналогия и т. д.), а также решены некоторые задачи.

3. В работе [11] осуществлен синтез идей работы Каратеодори [8] и работы [10]. Рассматривается свободная система с лагранжианом

$$L_N = T + \frac{\alpha N}{2}(a_i\dot{x}^i)^2 - V, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0$$

на которую действуют диссипативные силы с функцией Рэлея

$$F_N = \frac{\beta N}{2}(a_i\dot{x}^i)^2, \quad \beta = \mathrm{const} \geqslant 0.$$

В [11] показано, что при $N \to \infty$ решения дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{\partial L_N}{\partial \dot{x}^i}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L_N}{\partial x^i} = -\frac{\partial F_N}{\partial \dot{x}^i}$$

стремятся к функциям $\hat{x}^i(t)$, подчиняющимся следующему интегральному принципу:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0, \quad L = T - V \tag{6}$$

для всех вариаций $\delta x^i(t)$, обращающихся в нуль на концах интервала $[t_1, t_2]$ и удовлетворяющих уравнению

$$\alpha\left(\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \frac{\partial a_k}{\partial x^i}\right)\dot{x}^i\delta x^k - \beta a_i\delta x^i + \alpha(a_i\delta x^i)^{\cdot} = 0. \tag{7}$$

Предельные движения $\hat{x}^i(t)$ удовлетворяют, конечно, уравнению связи $a_i\dot{x}^i = 0$. Таким образом, мы имеем целое семейство новых моделей движения механических систем с неинтегрируемыми связями, содержащее параметр $\mu=\beta/\alpha$. Если $\mu=0$, то получим ваконномую механику, а при $\mu\to\infty$ будем иметь классическую неголономную модель.

Вариационному принципу (6)—(7) можно придать иную форму: кинематически допустимый путь $x^i(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ является движением системы со связями (т. е. подчиняется соотношениям (6)—(7)) тогда и только тогда, когда реакция

$$R_i(t)=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right)^{\cdot}-\frac{\partial L}{\partial x^i}\Bigg|_{x(t)} \tag{8}$$

удовлетворяет соотношению

$$\int_{t_1}^{t_2} R_i\delta x^i dt=0 \tag{9}$$

для всех вариаций (7). Таким образом, как и в случае неголономной модели, систему можно освободить от связей, заменив их действие силами реакции (8). При этом соотношение (9) играет роль условия идеальности связей. Отличие от неголономного случая проявляется в различных определениях вариаций (ср. (2) и (7)). Если $\alpha=0$, то условие (9) эквивалентно, очевидно, классическому условию идеальности $R_i\delta x^i=0$. В общем случае, когда $\alpha\neq0$, реакции R_i являются не функциями состояния, а функционалами от движения $x^i(t)$.

4. Предположим, что связь интегрируема: $a_i=\partial f/\partial x^i$. Тогда $a_i\delta x^i=\delta f$ и условие (7) дает уравнение α $(\delta f)^{\cdot}-\beta\delta f=0$. Решая его, получим: $\delta f=c\exp(\mu t)$, $c=\mathrm{const}$. Так как $\delta f=0$ при $t=t_1$, то $c=0$. Следовательно, если связь интегрируема, то при всех значениях $\mu=\beta/\alpha$ соотношения (6)—(7) эквивалентны обычному принципу Гамильтона для голономных систем.

К вопросу о реализации геометрической связи $f(x)=0$ можно подойти с другой стороны. Рассмотрим свободную систему с лагранжианом $L_N=L-Nf^2/2$. Дополнительное слагаемое — $Nf^2/2$ порождает «упругое» поле сил — $Nf\partial f/\partial x^i$, направленное к поверхности $f=0$. Оказывается, если эта поверхность регулярна ($df\neq0$ в точках, где $f=0$), то решения уравнений Лагранжа с лагранжианом L_N и начальными условиями

$$f(x_0^i)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x^i}\Bigg|_{x_0}\dot{x}_0^i=0 \tag{10}$$

при $N\to\infty$ стремятся на каждом конечном промежутке времени к решениям системы с геометрической связью $f=0$. Эта теорема была впервые доказана в работе [12]. Ее формулировку авторы приписывают Куранту.

Этот подход можно распространить и на случай односторонней связи $f(x) \geqslant 0$. С этой целью рассмотрим движение в силовом поле с потенциалом V_N:

$$V_N = V + N\varkappa f^2/2, \text{ если } f < 0 \text{ и } V_N = V, \text{ если } f \geqslant 0. \tag{11}$$

Здесь $\varkappa = \text{const} > 0$, N — безразмерный параметр. Можно показать, что при $N \to \infty$ решения уравнений Лагранжа с лагранжианом $T - V_N$ и начальными условиями (10) стремятся к решениям идеализированной системы с односторонней связью $f \geqslant 0$. Этот результат охватывает и те случаи, когда система сходит с поверхности $f=0$. Единственное ограничение состоит в том, что на рассматриваемом промежутке времени идеальная система со связью $f \geqslant 0$ больше не возвращается на поверхность $f=0$. В противном случае имеет место явление удара.

5. Результаты предыдущего пункта можно распространить и на случай движений с ударами. Предположим, что в момент времени $t=0$ система находится в положении $x^i = 0$ и имеет скорость $\dot{x}^i$, причем

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_0 \dot{x}^i < 0.$$

При $t > 0$ точка $x^i(t)$ попадет в область $f < 0$. Чтобы охватить случай неупругого удара, кроме потенциала (11) введем в области $f < 0$ дополнительные диссипативные силы с функцией Рэлея $F_N = k\sqrt{N}\dot{f}^2$, $k = \text{const} \geqslant 0$. Оказывается, если N велико, то через малый промежуток времени $t_N \sim 1/\sqrt{N}$ точка $x^i(t)$ выйдет на поверхность $f=0$ в точке, близкой к точке $x^i = 0$, касательные составляющие скорости в моменты входа и выхода практически совпадают, а нормальная составляющая в момент выхода может быть выражена через нормальную составляющую в момент входа и коэффициенты k и $\varkappa$.

Кинетическая энергия $T = g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j/2$ задает в точке $x=0$ скалярное произведение

$$< \xi, \eta > = \overset{0}{g}_{ij}\xi^i\eta^j, \quad \overset{0}{g}_{ij} = g_{ij}(0).$$

Пусть n — нормаль к поверхности $f=0$ в точке $x=0$ (в метрике $<, >$). Положим $v_n = < \dot{x}, n > n$, $v_\tau = v - v_n$; здесь $\dot{x}$ — вектор с компонентами $\dot{x}^i$. Рассмотрим еще ковектор p с координатами $p_i = \partial f/\partial x^i$. Пусть $<, >_*$ — метрика в двойственном пространстве, определяемая матрицей $\overset{*ij}{g_0}$, обратной к $\overset{0}{g}_{ij}$. Положим, наконец, $\Lambda = < p, p >_*$.

Можно показать, что если $k^2 < \Lambda\varkappa$, то справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{N\to\infty} v_n(t_N) = -e v_n(0), \quad \lim_{N\to\infty} v_\tau(t_N) = v_\tau(0).$$

$$e = \exp(-\pi k/\omega), \quad \omega = \sqrt{\Lambda\varkappa - k^2}. \tag{12}$$

Число $e \leqslant 1$ в теории удара называется коэффициентом восстановления. При $k=0$ (когда диссипация отсутствует) формулы (12) дают соотношения теории упругого удара. Если $k^2 > \Lambda\varkappa$, то в пределе получим абсолютно неупругий удар ($e=0$). Сформулированная теорема справедлива и в случае непотенциального силового поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лагранж Ж. — Л.* Аналитическая механика. М., 1950.
2. *Пенлеве П.* Лекции о трении. М., 1954.
3. *Герц Г.* Принципы механики, изложенные в новой связи. М., 1959.
4. *Якоби К.* Лекции по динамике. М.; Л., 1936.
5. *Четаев Н. Г.* О принципе Гаусса // Изв. Физ.-матем. об-ва при Казан. ун-те. 1932—33. Т. 6. Серия 3. — С. 68—71.
6. *Гельдер О.* О принципах Гамильтона и Мопертюи // В кн.: Вариационные принципы механики: М.; 1959. — С. 538—563.
7. *Румянцев В. В.* О принципе Гамильтона для неголономных систем // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. — С. 387—399.
8. *Caratheodory C.* Der Schlitten // L angew. Math. und Mech. 1933. V. 13. S. 71—76.
9. *Карапетян А. В., Румянцев В. В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем. М., ВИНИТИ АН СССР. 1983. Т. 6.
10. *Козлов В. В.* Динамика систем с неинтегрируемыми связями. I—IV // Вестн. Москв. ун-та.. Сер. матем., механ. 1982. № 3. — С. 92—100; 1982: № 4:— С. 70—76; 1983. № 3. — С. 102—111; 1987. № 5. — С. 76—83.
11. *Козлов В. В.* Реализация неинтегрируемых связей в классической механике // ДАН СССР. 1983. Т. 272. № 3. — С. 550—554.
12. *Rubin H., Ungar P.* Motion under a strong constraining force // Commun. Pure and Appl. Math. 1957. V. 10. № 1. P. 65—87.