

УДК 531.38

В. В. Козлов

К ЗАДАЧЕ О ПАДЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Еще в 1881 г. Му́йар описал интересное явление, связанное с падением в воздухе продолговатых прямоугольников из плотной бумаги. Если такому прямоугольнику сообщить начальное вращение около его продольной оси, то он во все время падения будет сохранять вращение в заданную сторону и будет равномерно опускаться по наклонной прямой так, что наблюдатель, от которого он удаляется, видит его верхний край опускающимся сверху вниз.

Математический анализ этой задачи предпринят Н. Е. Жуковским в статьях [1, 2]. В первой из них в рамках теории вихревого обтекания пластинки идеальной жидкостью рассмотрена упрощенная модель взаимодействия твердого тела и сопротивляющейся среды, сводящаяся лишь к одной подъемной силе. В предположении о постоянстве циркуляции скорости вдоль контура, охватывающего пластинку, установлено, что ее центр тяжести движется по горизонтально расположенной циклоиде и вниз в среднем не опускается. Во второй работе кроме подъемной силы вводится еще сила лобового сопротивления. Предполагается, что эти силы квадратично зависят от скорости центра масс пластинки, причем коэффициенты пропорциональности (являющиеся функциями от угла атаки) заменены их постоянными средними значениями. Уравнения движения не выписываются, и рассмотрение динамики пластинки сведено к анализу статической задачи. Эта модель уже допускает движение вниз в среднем по наклонной прямой. Обсуждается устойчивость такого движения. В рамках моделей из работ [1, 2] вращение пластины происходит с постоянной угловой скоростью. Однако на практике угловая скорость пластинки быстро стремится к своему «стационарному» значению, зависящему лишь от физических параметров задачи, а не от начальных данных.

Точная постановка рассматриваемой задачи должна использовать уравнение Навье—Стокса с граничными условиями на подвижной поверхности. С аналитической точки зрения такая задача представляется неразрешимой. В частном случае, когда отсутствует вязкость, уравнения движения твердого тела отделяются от уравнений течения жидкости. Влияние идеальной жидкости проявляется в анизотропии инерционных свойств движения тела (эффект присоединенных масс). Однако можно показать, что задача о движении тяжелой пластинки в безграничном объеме идеальной жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности, не допускает автоколебаний, описанных Му́йаром (ср. с [3]).

В настоящей работе задача о падении пластинки изучается в упрощенной постановке: наряду с эффектом присоединенных масс учитывается вязкое сопротивление, задаваемое функцией Релея. Эти предположения позволяют провести аналитическое исследование и с помощью метода малого параметра установить наличие устойчивых автоколебаний в определенной области изменения физических параметров задачи.

1. Уравнения движения. Рассмотрим падение тяжелой однородной пластинки прямоугольной формы в сопротивляющейся среде. Ввиду

симметрии пластинки имеются семейства плоскопараллельных движений, когда одна из ее плоскостей симметрии занимает постоянное вертикальное положение. При малых возмущениях эта плоскость уже не будет вертикальной. Среди указанных трех семейств плоскопараллельных движений устойчивыми (по отношению к положению плоскости симметрии) могут быть лишь те, при которых стороны большей длины постоянно горизонтальны (ср. с [4, § 128]). В дальнейшем рассматривается именно этот случай.

В неподвижной плоскости симметрии пластинки введем декартовы оси координат OXY , причем ось OY направлена вверх. Пусть x, y — координаты центра масс пластинки, φ — угол ее наклона к вертикали, отсчитываемый по часовой стрелке (см. рис. 1). Через u, v обозначим

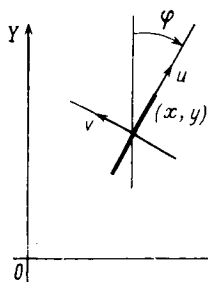


Рис. 1

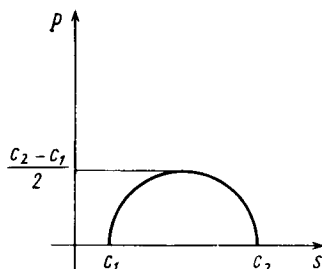


Рис. 2

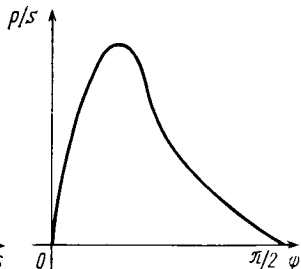


Рис. 3

проекции скорости центра масс тела на пластинку и нормаль к ней. С учетом инерционных свойств среды представим кинетическую энергию в виде квадратичной формы

$$(a_1 u^2 + a_2 v^2 + b \dot{\varphi}^2) / 2,$$

где a_1 — масса тела, $(a_2 - a_1)$ — присоединенная масса пластинки при движении в направлении нормали, коэффициент b — «эффективный» момент инерции тела относительно горизонтальной оси, проходящей через центр пластинки, с учетом эффекта присоединенных масс.

Кроме силы тяжести на пластинку еще действуют силы трения со стороны среды. Предполагая, что движение происходит с малой скоростью, зададим силы вязкого трения диссипативной функцией Релея

$$[\mu d (c_1 u^2 + c_2 v^2) + c_3 \mu d^3 \dot{\varphi}^2] / 2, \quad (1)$$

где μ — коэффициент вязкости, d — длина меньшей стороны пластинки, c_k — безразмерные коэффициенты. Так как тело испытывает наибольшее сопротивление при движении в направлении нормали, то естественно считать, что $c_2 > c_1$. Коэффициенты c_1 и c_2 для пластинки эллиптической формы приведены в [4, § 339]. Используя функцию Релея (1), можно получить выражение для силы сопротивления S (направленной противоположно вектору скорости центра масс \mathbf{v}) и подъемной силы P (ортогональной \mathbf{v}):

$$S = d\mu |\mathbf{v}| s(\psi), \quad P = d\mu |\mathbf{v}| p(\psi),$$

$$s = c_1 \cos^2 \psi + c_2 \sin^2 \psi, \quad p = (c_2 - c_1) \sin \psi \cos \psi,$$

где ψ — угол между вектором скорости \mathbf{v} и плоскостью пластинки. На рис. 2 и 3 изображены поляры (кривая $p = p(\psi)$, $s = s(\psi)$, $0 \leq \psi \leq \pi/2$)

$\leq \pi/2$) и аэродинамическое качество (график отношения $\rho(\psi)/s(\psi)$, $0 \leq \psi \leq \pi/2$). Имеется хорошее качественное совпадение зависимости сил S и P от угла атаки ψ с экспериментальными данными (ср. с [5]).

Применяя теоремы об изменении импульса и кинетического момента в подвижном пространстве, можно получить следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} a_1 \ddot{u} + c_1 \mu d \dot{u} + a_2 v \dot{\varphi} &= -P \cos \varphi, & a_2 \dot{v} + c_2 \mu d v - a_1 u \dot{\varphi} &= -P \sin \varphi, \\ b \ddot{\varphi} + c_3 \mu d^3 \dot{\varphi} &= (a_2 - a_1) uv. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь P — вес тела. Если решения этой замкнутой системы известны, то движение центра масс можно найти с помощью геометрических соотношений

$$\dot{x} = u \sin \varphi - v \cos \varphi, \quad \dot{y} = u \cos \varphi + v \sin \varphi. \quad (3)$$

Вводя характерную угловую скорость вращения тела ω , перейдем к безразмерным переменным U, V, τ по формулам

$$u = U d \omega, \quad v = V d \omega, \quad \tau = \omega t.$$

Обозначая штрихом дифференцирование по τ , перепишем уравнения (2) в новых переменных:

$$\begin{aligned} U' + \lambda_1 U + \gamma V \varphi' &= -\alpha_1 \cos \varphi, & U' + \lambda_2 V - \gamma^{-1} U \varphi' &= -\alpha_2 \sin \varphi, \\ \varphi'' + \nu \varphi' &= k UV, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_s &= c_s \mu d / (a_s \omega), & \alpha_s &= P / (a_s d \omega^2), & s &= 1, 2; & \gamma &= a_2 / a_1, \\ \nu &= c_3 \mu d^3 / (b \omega), & k &= (a_2 - a_1) d^2 / b. \end{aligned} \quad (5)$$

2. Автоколебания. Зафиксируем значения параметров λ_i, γ и k . Будем искать периодическое решение системы (4) в виде рядов по степеням малого параметра ε :

$$\begin{aligned} U &= \varepsilon U_0 + \varepsilon^3 U_1 + \dots, & V &= \varepsilon V_0 + \varepsilon^3 V_1 + \dots, & \varphi &= \tau + \varepsilon^2 \Phi_0 + \\ &+ \varepsilon^4 \Phi_1 + \dots, & \alpha_i &= \varepsilon \beta_i \quad (i=1, 2), & \nu &= \varepsilon^2 \nu_0 + \varepsilon^4 \nu_1 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициенты U_i, V_i и Φ_i ($i=0, 1, \dots$) — пока неизвестные 2π -периодические функции τ ; $\beta_1, \beta_2, \nu_0, \nu_1, \dots$ — некоторые числа. Для однозначной разрешимости задачи о наличии периодических решений вида (6) будем считать, что $\varphi=0$ при $\tau=0$ (это эквивалентно условиям $\Phi_i(0)=0, i \geq 0$), а β_1, β_2 — фиксированные положительные числа, отношение которых равно γ . Для действительных движений нужно потребовать еще выполнения неравенства $\nu_0 > 0$.

Покажем, что периодическое решение (6) действительно существует. Возникающие при этом ограничения на физические параметры задачи будут указаны ниже.

Функции U_0, V_0, Φ_0 и параметр ν_0 удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} U_0' + \lambda_1 U_0 + \gamma V_0 &= -\beta_1 \cos \tau, & V_0' + \lambda_2 V_0 - \gamma^{-1} U_0 &= -\beta_2 \sin \tau, \\ \Phi_0'' + \nu_0 &= k U_0 V_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Первые два уравнения замкнуты. Они допускают единственное 2π -периодическое решение

$$U_0 = A \sin \tau + B \cos \tau, \quad V_0 = C \sin \tau + D \cos \tau,$$

где

$$\begin{aligned} A &= \beta_1 \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2) / \Delta, & B &= -\beta_1 [\lambda_1 \lambda_2^2 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)] / \Delta, \\ C &= -\beta_2 [\lambda_1^2 \lambda_2 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)] / \Delta, & D &= \beta_2 \lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2) / \Delta, \\ \Delta &= (\lambda_1 \lambda_2)^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку Φ_0'' — 2π -периодическая функция с нулевым средним, то из последнего уравнения системы (7) найдем, что v_0 совпадает со средним значением $k(U_0 V_0) = (AC + BD) / 2$. Подставляя сюда выражения (8), получим искомую формулу:

$$v_0 = k \beta_1 \beta_2 (\lambda_2 - \lambda_1) / \Delta. \quad (9)$$

Так как $v_0 > 0$, то должно выполняться неравенство $\lambda_2 > \lambda_1$. В силу (5) необходимое условие существования автоколебания (6) имеет вид

$$c_2 / c_1 > a_2 / a_1. \quad (10)$$

С учетом соотношения $v_0 = k(U_0 V_0)$ из (7) следует, что $\Phi_0' = C + \Psi(\tau)$, где $C = \text{const}$, Ψ — 2π -периодическая функция с нулевым средним значением. Поскольку функция Φ_0 2π -периодична, $C = \langle \Phi_0' \rangle = 0$. Отсюда

$\Phi_0(\tau) = \int_0^\tau \Psi(z) dz$, так как по предположению $\Phi_0(0) = 0$. Функция Φ_0 имеет период 2π .

Функции U_i , V_i , Φ_i и числа v_i при $i \geq 1$ находятся по индукции. Они удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} U_i' + \lambda_1 U_i' + \gamma V_i &= F_i, & V_i' + \lambda_2 V_i' - \gamma^{-1} U_i &= G_i, \\ \Phi_i'' + v_i &= k(U_0 V_i + U_i V_0) + H_i, \end{aligned} \quad (11)$$

где F_i , G_i , H_i — некоторые уже известные 2π -периодические функции τ . Первые два уравнения системы (11) замкнуты. Корнями характеристического уравнения соответствующей линейной однородной системы являются числа

$$-(\lambda_1 + \lambda_2) / 2 \pm \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 / 4 - 1}. \quad (12)$$

В предположении $\lambda_2 > \lambda_1 \geq 0$ их вещественные части всегда отрицательны. Поэтому имеется единственное 2π -периодическое решение U_i , V_i . Усредняя последнее уравнение системы (11) по τ , найдем, что $v_i = \langle k(U_0 V_i + U_i V_0) + H_i \rangle$. С учетом этого соотношения после двух квадратур получим единственную 2π -периодическую функцию Φ_i , удовлетворяющую условию $\Phi_i(0) = 0$. Сходимость разложений (6) при малых значениях параметра ϵ доказывается обычным методом мажорант Коши.

Для исследования орбитальной устойчивости найденного периодического решения запишем уравнения в вариациях в первом приближении по параметру ϵ (см. уравнения (7)):

$$\begin{aligned} (\delta U_0)' + \lambda_1 \delta U_0 + \gamma \delta V_0 &= 0, & (\delta V_0)' + \lambda_2 \delta V_0 - \gamma^{-1} \delta U_0 &= 0, \\ (\delta \Phi)'' &= k(U_0 \delta V_0 + V_0 \delta U_0). \end{aligned}$$

Согласно (12) вещественные части корней характеристического уравнения системы первых двух уравнений отрицательны при $\lambda_2 > \lambda_1 \geq 0$. Следовательно, δU_0 и δV_0 экспоненциально быстро стремятся к нулю, когда $\tau \rightarrow +\infty$. Так как функции U_0 и V_0 ограничены, то функция $(\delta\Phi_0)'$ при $\tau \rightarrow +\infty$ стремится к некоторой постоянной. Итак, имеет место устойчивость периодического решения (6), причем по отношению к переменным U, V она носит асимптотический характер, а по отношению к угловой скорости Φ' — «нейтральный». По-видимому, все характеристические числа решения (6) на самом деле отрицательны при малых $\varepsilon > 0$, однако для этого надо рассматривать следующее приближение по параметру ε .

3. Движение пластинки. Из (6) следует, что с точностью до слагаемых порядка ε^2 пластинка вращается с постоянной угловой скоростью ω . Умножая обе части соотношения (9) на ε^2 и используя (5), получим уравнение для определения угловой скорости:

$$(c_1 a_2 + c_2 a_1)^2 c_3 \mu^2 d^4 \omega^2 = P^2 (a_1 c_2 - a_2 c_1) (a_2 - a_1) - c_1^2 c_2^2 c_3 \mu^4 d^6. \quad (13)$$

Необходимым (но не достаточным в общем случае) условием вещественности ω является неравенство (10). Особенно просто соотношение (13) выглядит в предельном случае, когда $c_1 = 0$:

$$\omega^2 = P^2 (a_2 - a_1) / [c_2 c_3 a_1 \mu^2 d^4]. \quad (14)$$

Найдем среднюю скорость движения центра масс пластинки (также с точностью до $O(\varepsilon^2)$). В силу (3)

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{P (c_2 - c_1) (a_2 c_1 - a_1 c_2)}{2 [c_1^2 c_2^2 \mu^2 d^2 \omega^{-1} + (c_1 a_2 + c_2 a_1)^2 \omega]}. \quad (15)$$

Здесь предполагается, что угловая скорость ω выражена через параметры задачи с помощью (13). Так как по предположению $c_2 > c_1$ и $a_1 c_2 > a_2 c_1$ согласно (10), то из (13) следует, что $\langle \dot{x} \rangle$ и ω имеют разные знаки. Этот результат полностью согласуется с данными экспериментов.

Формула (15) упрощается при $c_1 \rightarrow 0$:

$$\langle \dot{x} \rangle = -P/2a_1\omega, \quad (16)$$

где ω определяется из (14).

Явный вид $\langle \dot{y} \rangle = d\omega\varepsilon(B+C)/2$ в общем случае достаточно громоздкий и здесь не приводится. Отметим только, что средняя скорость $\langle \dot{y} \rangle$ зависит от ω^2 и всегда отрицательна. При $c_1 \rightarrow 0$

$$\langle \dot{y} \rangle = -P(a_1 + a_2)/(c_2 a_1 \mu d). \quad (17)$$

Если $c_1 = 0$, то пластинка опускается вниз с постоянной средней скоростью по прямой, тангенс угла наклона которой равен

$$\langle \dot{y} \rangle / \langle \dot{x} \rangle = 2(a_1 + a_2)P\sqrt{a_2/a_1 - 1} / (c_2\sqrt{c_2 c_3}\mu^2 d^3). \quad (18)$$

Теперь можно указать ограничения на исходные физические параметры задачи, при которых существует автоколебание (6). После подстановки в формулы (5) выражения для угловой скорости (14) должны выполняться соотношения

$$\lambda_2 \sim 1, \quad \alpha_s \sim \varepsilon (s=1, 2), \quad \nu \sim \varepsilon^2, \quad \gamma \sim 1, \quad k \sim 1.$$

Последние два соотношения дают естественные ограничения на распределение масс (включая присоединенные массы). Тогда первые три соотношения можно представить в следующем явном виде:

$$\frac{c_2 \sqrt{c_2 c_3} \mu^2 d^3}{a_2 P (a_2/a_1 - 1)^{1/2}} \sim 1, \quad \frac{c_2 c_3 \mu^2 d^3}{a_2 P (a_2/a_1 - 1)} \sim \varepsilon, \quad \frac{c_3 \sqrt{c_2 c_3} \mu^2 d^3}{a_2 P (a_2/a_1 - 1)^{3/2}} \sim \varepsilon^2.$$

Эти ограничения, разумеется, непротиворечивы. В качестве простого следствия из (18) получаем, что порядок величины тангенса угла наклона траектории центра пластинки равен единице.

Формулы (16) и (17) позволяют указать границы применимости модели вязкого сопротивления: средние скорости $\langle \dot{x} \rangle$ и $\langle \dot{y} \rangle$, имеющие один порядок, должны быть много меньше величины $\mu/(\rho d)$, где ρ — плотность жидкости, а угловая скорость ω — много меньше характерной угловой скорости $\mu/(\rho d^2)$.

Интересно отметить, что в первом приближении по ε угловая скорость ω и средние скорости $\langle \dot{x} \rangle$ и $\langle \dot{y} \rangle$ не зависят от момента инерции b . Из формул (14) и (18) можно вывести ряд заключений качественного характера и сравнить их с экспериментом. Например, можно увеличить массу пластинки a_1 , добавляя к ней несколько точечных масс без нарушения симметрии (например, на продольную ось пластинки, проходящую через ее центр масс). При этом присоединенная масса, а также коэффициенты c_i не изменятся. Как видно из (14) и (18), угловая скорость вращения увеличится и центр масс пластинки будет спускаться по прямой с большим углом наклона к горизонтали. Эти результаты вполне согласуются с простыми опытами.

4. Случай интегрируемости. Выше было показано, что устойчивые автоколебания вида (6) могут возникать лишь при выполнении условия (10): $c_2/c_1 > a_2/a_1$. Оказывается, если заменить это неравенство на равенство, то уравнения движения пластинки сильно упрощаются, что позволяет дать качественный анализ ее движения при больших значениях t .

При $c_2/c_1 = a_2/a_1$ диссипативную функцию Релея можно записать в следующем виде: $2F = \kappa (a_1 u^2 + a_2 v^2) + \lambda b \dot{\varphi}^2$, где κ, λ — положительные постоянные. Уравнения поступательного движения

$$a_1 \ddot{u} + \kappa a_1 u + a_2 v \dot{\varphi} = -P \cos \varphi, \quad a_2 \ddot{v} + \kappa a_2 v - a_1 u \dot{\varphi} = -P \sin \varphi$$

интегрируются:

$$\begin{aligned} a_1 u &= P \frac{e^{-\kappa t} - 1}{\kappa} \cos \varphi + s e^{-\kappa t} \cos(\varphi + \alpha), \\ a_2 v &= P \frac{e^{-\kappa t} - 1}{\kappa} \sin \varphi + s e^{-\kappa t} \sin(\varphi + \alpha), \end{aligned} \quad (19)$$

где s и α — произвольные постоянные. Параметр s имеет механический смысл «начального толчка» тела: если $s=0$, то $u=v=0$ при $t=0$. Уравнение вращения пластинки отделяется:

$$\ddot{\varphi} + \lambda \dot{\varphi} = \frac{a_2 - a_1}{b} uv. \quad (20)$$

Здесь вместо u, v нужно подставить выражения (19).

Так как $\kappa > 0$, то при достаточно больших значениях t формулы (19) можно упростить:

$$u = -(P/a_1 \kappa) \cos \varphi, \quad v = -(P/a_2 \kappa) \sin \varphi.$$

Следовательно, в этом приближении

$$\ddot{\varphi} + \lambda \dot{\varphi} = \Lambda \sin \varphi \cos \varphi, \quad \Lambda = \frac{(a_2 - a_1) P^2}{a_1 a_2 b \kappa^2} > 0, \quad (21)$$

$$\dot{x} = (1/a_2 - 1/a_1) (P/\kappa) \sin \varphi \cos \varphi, \quad \dot{y} = -(P/\kappa) (\cos^2 \varphi/a_1 + \sin^2 \varphi/a_2).$$

Поскольку $\lambda > 0$, то почти все решения уравнения (20) стремятся к одному из значений $\pi/2 \pmod{\pi}$, причем $\dot{\varphi}(t) \rightarrow 0$.

Из формул (21) вытекает, что при больших значениях t пластинка опускается вниз практически по вертикальной прямой с асимптотически постоянной скоростью $P/(\kappa a_2)$, стремясь при этом занять горизонтальное положение. Никаких периодических автоколебаний уравнение (20) не допускает.

5. Устойчивость стационарных движений. Уравнения (2) допускают два частных равновесных решения:

$$u = u_0 = -P/(c_1 \mu d), \quad v = 0, \quad \varphi = 0, \quad (22)$$

$$u = 0, \quad v = v_0 = -P/(c_2 \mu d), \quad \varphi = \pi/2. \quad (23)$$

Пластинка падает вниз с постоянной скоростью, причем в первом случае ее плоскость вертикальна, а во втором — горизонтальна.

Линеаризуя уравнения (2) в окрестности решения (22), можно показать, что характеристический многочлен всегда имеет вещественный положительный корень. Следовательно, равновесное решение (22) неустойчиво. Здесь существенно используется эффект присоединенных масс: предполагается, что $a_2 > a_1$.

С помощью критерия Рауса—Гурвица можно получить условие асимптотической устойчивости решения (23):

$$(c_1/a_1 + c_3 d^2/b) (c_1 c_2^2 c_3 \mu^4 d^6 + (a_2 - a_1) a_2 P^2) > c_2 (a_2 - a_1) P^2. \quad (24)$$

При $c_1 \rightarrow 0$ оно переходит в простое неравенство

$$c_3 a_2 d^2 > c_2 b. \quad (25)$$

Таким образом, возможность стабилизации равновесного решения (23) обусловлена диссипацией энергии при вращении твердого тела.

Предположим, что неравенство (24) (или (25) при $c_1 = 0$) не выполняется. Добавляя точечные массы на продольную ось пластинки, проходящую через ее центр масс, можно стабилизировать неустойчивое движение (23). Действительно, при этом коэффициенты c_i и момент инерции b не изменяются, а коэффициент a_2 увеличивается на сумму масс добавленных точек. При добавлении достаточно большой суммарной массы неравенство (24) (или (25)) будет, очевидно, выполнено. Этот эффект стабилизации равномерного падения горизонтально расположенной пластинки легко реализовать в простых опытах.

Устойчивость вертикального снижения тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде с квадратичным законом сопротивления исследовалась в работе [6]. Предполагалось, что воздействие среды на тело сводится к силе F , ортогональной плоскому участку S поверхности тела, а смещение точки приложения силы F от центра области S является некоторой нечетной функцией от угла атаки. Эффект присоединенных масс не учитывался. Получены условия асимптотической устойчивости вертикального снижения. В случае однородной пластинки линейное приближение не дает ответа на вопрос об устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский Н. Е. О падении в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси. Статья первая//Полн. собр. соч. М.; Л., 1937. Т. V. 72—80.
2. Жуковский Н. Е. О падении в воздухе легких продолговатых тел, вращающихся около своей продольной оси. Статья вторая//Полн. собр. соч. М.; Л., 1937. Т. V. 100—115.
3. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости//Полн. собр. соч. Л., 1933. Т. I. 133—150.
4. Ламб Г. Гидродинамика. М., 1947.
5. Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М., 1986.
6. Ерошин В. А., Привалов В. А., Самсонов В. А. Две модельные задачи о движении тела в сопротивляющейся среде//Сб. научн.-метод. статей по теор. механ. М., 1987. 75—78.

Поступила в редакцию
04.04.89