TEORIJSKA I PRIMENJENA MEHANIKA 15, pp 139–145, 1989, UDK 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ В НЕПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Велько А. Вуйичич, Валерий В. Козлов

(поступила 30.10.1989)

1. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ — лагранжевы координаты голономной склерономной механической системы с n степенями свободы,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\dot{x}_i\dot{x}_j$$

— кинетическая энергия, $X(x, \dot{x}) = (X_1, \dots, X_n)$ — обобщенные силы. Всюду ниже предполагается, что T, X_1, $\dots$, X_n являются бесконечно-дифференцируемыми функциями от x и $\dot{x}$. Движения такой системы описываются уравнениямы Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = X_i \qquad (i = 1, \dots, n). \tag{1}$$

Предположим, что при $x = 0$, $\dot{x} = 0$ обобщенные силы X_i обращаются в нуль. Тогда, очевидно, точка $x = 0$ является положением равновесия рассматриваемой механической системы. В настоящей работе рассматриваются некоторые аспекты задачи об устойчивости этого положения равновесия. Если силы X_i не зависят от скорости $\dot{x}$ и потенциальны, то, как хорошо известно, достаточное условие устойчивости дает знаменитая теорема Лагранжа-Дирихле. При довольно общих предположениях эту теорему удается обратить (обзор работ по обращению теоремы Лагранжа-Дирихле содержится в [1]; из недавних работ, не вошедших в обзор [1], упомянем еще статьи [2–4]). Поэтому основное внимание будет уделено случаю, когда сили X_i непотенциальны.

2. Для решения этой задачи об устойчивости в работах [5–8] был развит второй метод Ляпунова. С его помощю была доказана

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что найдется положительно определенная функция $W(x)$, такая, что*

$$\left(X + \frac{\partial W}{\partial x}\right) \cdot \dot{x} \le 0.$$

Тогда равновесие $x = 0$ устойчиво.

Доказательство устойчивости основано на использовании функции Ляпунова $T + W$. В работе [8] этот результат распространен на неавтономный случай.

Теорему 1 можно дополнить. Справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполнени следующие условия:*

1) *функция $W(x)$ положительно определена,*

2) *в некоторой окрестности точки $x = 0$ справедливо неравенство $(X + \partial W/\partial x) \cdot \dot{x} \leq -w(\dot{x})$, где w — положительно определенная функция от скорости $\dot{x}$,*

3) *положение равновесия $x = 0$ изолировано.*

Тогда состояние равновесия $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ асимптотически устойчиво.

Доказательство снова использует функцию Ляпунова $f = T + W$. Ясно, что $\dot{f} \leq 0$, причем $\dot{f} \equiv 0$ лишь в том случае, когда $\dot{x} \equiv 0$. Однако, согласно 3), в малой окрестности нуля нет положений равновесия, отличных от точки $x = 0$. Следовательно, асимптотическая устойчивость равновесия $x = 0$ вытекает теперь из известной теоремы Барбашина-Красовского.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть выполнени следующие условия:*

1) *функция $W(x)$ не имеет в точке $x = 0$ локального минимума,*

2) *в области $U_\varepsilon^- = \{x : W(x) < 0,\ |x| < \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ справедливо неравенство $(X + \partial W/\partial x) \cdot \dot{x} \leq -w(\dot{x})$, где w — положительно определенная функция,*

3) *в области U_ε^- нет положений равновесия рассматриваемой системы.*

Тогда равновесие $x = 0$ неустойчиво.

Наложим схему доказательства теоремы 3. Рассмотрим движение со следующими начальными условиями: $x(0) = x_0 \in U_\varepsilon^-$, $\dot{x}(0) = 0$. Покжем, что каждое такое движение через конечный промежуток времени покинет область U_ε^-. Так как $(T + W)^{\cdot} \leq 0$, то траектория движения $x(t)$ целиком расположена в области $\{x : W(x) \leq W(x_0) < 0\} \subset U_\varepsilon^-$. Поэтому точка $x(t)$ на самом деле должна покинуть область $|x| < \varepsilon$.

Предположим противное: $x(t) \in U_\varepsilon^-$ при всех $t \geq 0$. Так как функция $f(t) = T + W|_{x(t)}$ монотонно убывает и ограничена снизу, то $f(t) \to \mathrm{const}$ при $t \to +\infty$. Воспользуемся известной теоремой анализа: если $\ddot{f}(t)$ ограничена и $f(t) \to \mathrm{const}$ при $t \to +\infty$, то производная $\dot{f}(t)$ стремится к нулю, когда $t \to \infty$. В нашем случае вторая производная ограничена, поскольку мы предположили, что $x(t) \in U_\varepsilon^-$. Следовательно, $\dot{f}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Но тогда, согласно условию 2), $|\dot{x}(t)|$ также стремится к нулю. Поскольку $\dddot{x}(t)$ ограничена, то (по той же теореме) $|\ddot{x}(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$. Из явного вида уравнений движения будет следовать, что $X(x(t), \dot{x}(t)) \to 0$. Однако, согласно предположению 3), в области $\{x : W(x) \leq W(x_0) < 0,\ |x| < \varepsilon\}$ справедлива оценка $|X(x, 0)| \geq \delta = \mathrm{const} > 0$. Воспользуемся очевидным неравенством

$$|X(x, 0)| \leq |X(x, 0) - X(x, \dot{x})| + |X(x, \dot{x})|.$$

Так как $\dot{x}(t) \to 0$, то ввиду непрерывности $|X(x,0) - X(x,\dot{x})|_t \to 0$ при $t \to +\infty$. Поскольку X как функция t также стремится к нулю, то $X(x(t),0) \to 0$. Однако, это противоречит оценке $|X(x,0)| \geq \delta > 0$. Теорема доказана.

Теоремы 3 и 4 обобщают известные результаты об устойчивости равновесий в потенциальном поле под действием дополнительных диссипативных сил с полной диссипацией энергии (см. [1]).

3. Рассмотрим теперь более подробно случай, когда обобщенные силы X_i не зависят от скоростей $\dot{x}$. Здесь можно указать некоторые достаточные условия неустойчивости, основанные на развитии идей первого метода Ляпунова.

Мы будем исходить из следующего простого наблюдения; если система (1) имеет решение $x(t)$, которое стремится к точке $x = 0$ при $t \to +\infty$, то тогда равновесие $x = 0$ неустойчиво. Действительно, в силу обратимости система (1) имеет решение $x(-t)$, которое также стремится к нулю, но уже при $t \to -\infty$. Это обстоятельство указывает на неустоичивость рассматриваемого положения равновесия.

С помощью линейной подстановки координат x всегда можно добиться, чтобы матрица кинетической энергии $A(x) = \|a_{ij}(x)\|$ в точке $x = 0$ совпадала с единичной матрицей E_n. В дальнейшем это условие предполагается выполненным. Разложим функции $X_i(x)$ в ряды по однородным формам переменных x: $X_i = X_i^{(m)} + X_i^{(m+1)} + \cdots$. Как правило, $m = 1$. Однако возможны случаи вырождения, когда $m \geq 2$. Положим $X^{(m)} = (X_1^{(m)}, \ldots, X_n^{(m)})$.

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что найдется вектор e, $|e| = 1$, такой, что $X^m(e) = \kappa e$, $\kappa > 0$. Тогда равновесие $x = 0$ неустойчиво.*

В работах [9] и [3] аналогичный результат получен при некоторых дополнительных ограничениях.

Доказательство теоремы 4 основано на построении асимптотических решений системы (1) в виде рядов определенного вида (ср. с [9]). Для определенности рассмотрим случай $m \geq 2$. Покажем, что системе (1) формально удовлетворяет ряд (возможно расходящийся)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{(k)}(\ln t)}{t^{k\mu}} \tag{2}$$

где $x^{(k)}$ — некоторые полиномы от $\ln t$ и $\mu > 0$. Коэффициенты ряда (2) ищем по индукции, возрастающей вместе с k.

Уравнения (1) имеют следующий явный вид:

$$A(x)\ddot{x} + \Gamma(x)\dot{x} \cdot \dot{x} = X^{(m)} + X^{(m+1)} + \cdots. \tag{3}$$

Здесь $\Gamma\dot{x} \cdot \dot{x}$ обозначает совокупность слагаемых, квадратичных по скоростям. Положим $x^{(1)} = \lambda e$, $\mu = 2/(m-1) > 0$. Подставляя ряд (2) в уравнение (3), приравнивая коэффициенты при (наинизшей степени) $1/t^{\mu+2} = 1/t^{m\mu}$ и учитывая, что $A(0) = E$, получим уравнение

$$\mu(\mu+1)\lambda e = \kappa\lambda^m e.$$

Отсюда $\lambda^{m-1} = \mu(\mu+1)/\kappa > 0$ и поэтому положительное λ находится однозначно.

Предположим, что коэффициенты $x^{(1)},\dots,x^{(k-1)}$ уже найдены как векторные многочлены от $\ln t$ с постоянными коэффициентами. Найдем теперь $x^{(k)}$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $1/t^{(k\mu+2)}$, приходим к уравнению

$$(x^{(k)})'' - (2k\mu+1)(x^{(k)})' + k\mu(k\mu+1)x^{(k)} - Bx^{(k)} = f, \tag{4}$$

где $B = t^2\partial X^{(m)}/\partial x|_{x=x^{(1)}/t^\mu}$ — постоянная матрица, f — некоторый известный векторный многочлен от $\ln t$ с постоянными коэффициентами, штрих означает дифференцирование по $\ln t$. Система (4) является линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью f. Хорошо известно, что такая система всегда имеет частное решение в виде полинома с постоянными коэффициентами. Таким образом, построение формального решения (2) завершено.

Ряд (2) может расходиться при всех значениях $t > 0$. Однако, как доказал А. Н. Кузнецов, и в этом случае система уравнений (3) имеет решение $\hat{x}(t)$, для которого ряд (2) является его асимптотическим представлением. Это означает, что

$$\hat{x}(t) - \sum_{k=1}^{N} \frac{x^{(k)}(\ln t)}{t^{k\mu}} = O\left(\frac{\ln^j t}{t^{N\mu}}\right) \qquad \text{при } t \to +\infty.$$

Здесь j — степень векторного полинома $x^{(N)}$. В частности, $\hat{x}(t) \to 0$, когда $t \to +\infty$. Решение $\hat{x}(t)$ является искомым.

Если $m = 1$, то система (3) имеет формальное решение в виде ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{(k)} e^{-k\lambda t}, \tag{5}$$

где $\lambda = \mathrm{const} > 0$, $x^{(k)}$ — некоторые многочлены от t с постоянными коэффициентами, причем $x^{(1)} = \mathrm{const} \neq 0$. Ряды вида (5) впервые применены Ляпуновым при решении общей задачи об устойчивости движения [10].

Замечания. Как показано в работе [9], если спектр матрицы B не содержит чисел вида $k\mu(k\mu+1)$ $(k = 2,3,\dots)$, то система (3) имеет решение в виде ряда (2) с постоянными коэффициентами $x^{(k)} \in R^n$. При дополнительном предположении об аналитичности функций $T, X_1,\dots,X_n$ в окрестности точки $(x,\dot{x}) = (0,0)$, этот степенной ряд сходится при $t \geq t_*$. В работе [3] указаны некоторые условия сходимости ряда (2) с логарифмами. Как установил Ляпунов [10], в аналитическом случае ряд (5) всегда сходится при всех достаточно больших значениях t.

4. Метод, развитый в п. 3, может быть применен к решению более общей задачи об устойчивости, поставленной Ляпуновым в его работе [10]. Речь идет об устойчивости состояния равновесия $(x,\dot{x}) = (0,0)$ по отношению к функции $Q(x,\dot{x})$. Без ущерба общности можно считать, что $Q(0,0) = 0$. Функцию Q будем предполагать бесконечно-дифференцируемой: ей можно сопоставить ее ряд

Маклорена — степенной ряд по переменным x_j, $\dot{x}_l$ $(1 \le j, l \le n)$. Предположим, что выполнены условия теоремы 4 и поэтому система уравнений (3) имеет формальное решение в виде ряда (2). Нетрудно понять, что после подстановки ряда (2) в ряд Маклорена функции Q получится ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{(k)}(\ln t)}{t^{k\mu}}, \tag{6}$$

где $q^{(k)}$ — некоторые многочлены от $\ln t$ с постоянными коэффициентами. Ясно, что ряд (6) является асимптотическим рядом функции

$$\hat{q}(t) = Q(\hat{x}(t), \hat{x}^{\cdot}(t)),$$

где $\hat{x}(t)$ — решение системы (3), ассоцированное с формальным решением (2). Так как $\hat{x}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то тем же свойством обладает и функция $\hat{q}(t)$. Если $\hat{q}(t) \not\equiv 0$, то состояние равновесия $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ неустойчиво по отношению к функции $Q(x, \dot{x})$. Это утверждение — простое следствие обратимости системы (3) (ср. с п. 3). Если же $\hat{q}(t) = 0$ для всех t, то из наличия асимптотического решения (2) нельзя судить об устойчивости состояния равновесия по отношению к функции Q. Ясно, что $\hat{q}(t) \not\equiv 0$, если хотя бы один коэффициент формального ряда (2) отличен от нуля.

Если требуется установить неустойчивость равновесия по отношению к нескольким функциям $Q_1(x, \dot{x})$, ..., $Q_j(x, \dot{x})$, то достаточно найти соответствующие формальные ряды вида (6) и убедиться в том, что хотя бы один из коэффициентов этих рядов отличен от нуля.

Отметим, что в общем случае задача об устойчивости по отношению к функциям $Q_1, \dots, Q_j$ не сводится к задаче об устойчивости по отношению к части переменных. Вот простой пример: функция $Q = x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2$ не может быть включена в число независимых переменных в окрестности точки $(x, \dot{x}) = (0, 0)$, поскольку в этой точке $dQ = 0$.

5. В качестве примера рассмотрим вопрос об устойчивости равновесия в „квазипотенциальном“ силовом поле, когда

$$X_i(x) = -P(x)\frac{\partial V}{\partial x_i}, \tag{7}$$

где V и P — гладкие функции от x, причем $P(x) > 0$. Если $P = \mathrm{const}$, то поле сил X_i потенциально. Ясно, что положения равновесия совпадают с критическими точками функции V. Было бы интересным связать условия устойчивости этих положений равновесия с типом стационарного значения функции V. В линейном приближении имеем обычную задачу теории малых колебаний в потенциальном поле. Поэтому здесь условием устойчивости является наличие строгого локального минимума функции V. Однако, в нелинейной задаче результаты такого сорта получить пока не удается. Не исключено, что в общем случае наличие строгого локального минимима функции V еще не гарантирует устойчивости равновесия.

Здесь более просто установить достаточные условия неустойчивости. Справедлива

ТЕОРЕМА 6. *Пусть* $V = V_{m+1} + V_{m+2} + \cdots$, $m \geq 1$ *и форма* V_{m+1} *не имеет минимума в точке* $x = 0$. *Тогда равновесие* $x = 0$ *в „квазипотенциальном" поле* (7) *неустойчиво.*

Применим теорему 4. В этом случае $X_i^{(m)} = -P(0)\partial V_{m+1}/\partial x_i$. Так как форма V_{m+1} не имеет минимума в точке $x = 0$, то на единичной сфере $|x| = 1$ минимальное значение V_{m+1} отрицательно. Предположим, что это значение функция достигает в точке $x = e$, $|e| = 1$. Из условия минимума получаем равенство $\partial V_{m+1}/\partial x(e) = \lambda e$. По формуле Эйлера для однородных функций

$$\lambda = (e, \lambda e) = \left(x, \frac{\partial V_{m+1}}{\partial x}\right)\Big|_{x=e} = (m+1)V_{m+1}(e) < 0.$$

Следовательно,

$$X^{(m)}(e) = -P(0)\frac{\partial V_{m+1}}{\partial x}(e) = -P(0)\lambda e,$$

причем $\kappa = -P(0)\lambda > 0$. Итак, выполнено условие теоремы 4 и поэтому равновесие $x = 0$, действительно, неустойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Карапетян А. В., Румянцев В. В.: *Устойчивость консервативных и диссипативных систем*. Общая механика. Т. **6**. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР, Москва 1983.

[2] Козлов В. В.: *Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа-Дирихле*, ПММ, 1986, Т. **50**, Вып. 6, с. 928–937.

[3] Козлов В. В.: *Об устойчивости равновесия неголономных систем*. Докл. АН СССР, 1986, Т. **288**, №2.

[4] Козлов В. В.: *Об одной задаче Кельвина*. ПММ, 1989, Т. **53**, Вып. 1, с. 165–167.

[5] Vujičić V. A.: *General conditions of stability of the state of equilibrium of the dynamic system of a variable mass*. Tensor, N.S., 1968, V. **19**, p. 314–316.

[6] Вуйичич В. А.: *Критерий об устойчивости состояния равновесия системы динамических точек*. Publ. de l'Institut Math., N.S., T. **8**, 1968, p. 69–72.

[7] Vujičić V. A.: *Über die Stabilität der stationaren Bewegungen*, ZAMM, 1968, B. **48**, p. 291–293.

[8] Вуйичич В. А.: *Общее следствие прямого метода Ляпунова об устойчивости*. Publ. Inst. Math. N.S., 1969, T. **9**, p. 139–142.

[9] Козлов В. В.: *Асимптотические решения уравнений классической механики*. ПММ, 1982, Т. **46**, Вып. 4, с. 573–577.

[10] Ляпунов А. М.: *Общая задача об устойчивости движения*. Москва-Ленинград, Гостехиздат, 1950.

ON THE STABILITY OF THE EQUILIBRIUM IN THE NON-POTENTIAL FORCES FIELD

On the basis of the second Liapunov's method, the sufficient conditions of asymptotical stability and non-stability of the equilibrium of system in the non-potential field of forces are obtained. The case when the generalized forces depend on the position of system is investigated in detail. The sufficiency of conditions of non-stability of those systems is based on the use of factorisation of solutions of equations of motion in the lines with special form. Those results develop and spread the ideas of the first Liapunov's method. The constructive method for solution of Liapunov's tasks of stability of equilibrium in ratio to some functions of coordinates and velocity is suggested. As an example of using of general characterized results, the task of stability of equilibrium in the "quasi-potential" field of forces is investigated.

O STABILNOSTI RAVNOTEŽE U NEPOTENCIJALNOM POLJU SILA

Na osnovu drugog Ljapunovljevog metoda dobijeni su dovoljni uslovi asimptotske stabilnosti i nestabilnosti ravnotežnog položaja sistema u nepotencijalnom polju sila. Detaljno je izučen slučaj kada generalisane sile zavise samo od položaja sistema. Dovoljnost uslova nestabilnosti takvih sistema zasnivaju se na korišćenju razlaganja rešenja jednačina kretanja u redove specijalnog oblika. Ovi rezultati dopunjuju i razvijaju ideje prve Ljapunovljeve metode. Predložen je konstruktivni metod rešenja zadatka Ljapunova o stabilnosti ravnotežnog položaja u odnosu na neke funkcije koordinata i brzine. Kao primer primene rezultata opšteg karaktera razmotren je zadatak o stabilnosti ravnoteže u "kvazipotencijalnom" polju sila.

Вељко А. Вујичић
Математички факултет
11001 Београд, п.п. 550
Југославија

Валерий В. Козлов
Механико-математический факультет МГУ
им. М. В. Ломоносова
119899 Москва, СССР