

УДК 531.38

В. В. КОЗЛОВ

О ПАДЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается задача Чаплыгина о свободном падении в безграничном объеме идеальной жидкости тяжелого твердого тела, имеющего плоскость симметрии. Предполагается, что жидкость однородна, совершает безвихревое движение и покоится на бесконечности. Установлено, что для почти всех начальных данных при $t \rightarrow \infty$ тело стремится занять такое положение, при котором его широкая сторона горизонтальна. Приближаясь к этому положению, твердое тело совершает угловые колебания с убывающей амплитудой и возрастающей частотой. Асимптотически траектория тела в общем случае является параболой. С помощью методов вариационного исчисления в целом доказано существование движений, при которых тело совершает ровно один полуоборот, когда время t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.

1. Уравнения движения. Рассмотрим, следуя Чаплыгину [1], задачу о падении тяжелого твердого тела в безграничном объеме однородной идеальной жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности. Предположим, что твердое тело имеет плоскость симметрии Π (форма тела и его распределение массы инвариантны при отражении относительно Π). Среди множества всех движений твердого тела выделим те, при которых плоскость Π занимает постоянное вертикальное положение. Положение тела определяется, очевидно, тремя параметрами. Пусть x, y — декартовы координаты некоторой точки тела O в плоскости Π (ось x горизонтальна, а ось y направлена вверх), φ — угол поворота тела (фиг. 1). В некоторой связанной с телом системе отсчета $O\xi\eta\xi$ (ось $O\xi$ ортогональна плоскости Π) кинетическая энергия системы «тело+жидкость» имеет следующий вид: $T = (a_1 u^2 + a_2 v^2 + b \omega^2) / 2$, где u, v — проекции скорости точки O на оси $O\xi, O\eta$, ω — угловая скорость тела. Постоянные коэффициенты a_1, a_2, b включают в себя присоединенные массы и присоединенный момент инерции тела. Примем, что $a_2 \geq a_1$ и пусть φ — угол между вертикалью и осью $O\xi$, отсчитываемый по часовой стрелке (см. фиг. 1). Следовательно, $\omega = -\dot{\varphi}$.

Уравнения падения тела в жидкости представлены в [1] в виде уравнений Кирхгофа

$$\begin{aligned} a_1 \dot{u} - a_2 v \dot{\omega} &= -p \cos \varphi, & a_2 \dot{v} + a_1 u \dot{\omega} &= -p \sin \varphi \\ b \dot{\omega} + (a_2 - a_1) uv &= p (\eta \cos \varphi - \xi \sin \varphi) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где p — вес системы «тело — жидкость», $p(\eta \cos \varphi - \xi \sin \varphi)$ — суммарный момент веса тела и силы Архимеда относительно точки O . Если твердое тело однородно, то ξ, η суть декартовы координаты его центра масс. Вспомогательная, что $\omega = -\dot{\varphi}$, из первых двух уравнений (1.1) получаем следующие соотношения:

$$a_1 u = -pt \cos \varphi + s \cos(\varphi + \alpha), \quad a_2 v = -pt \sin \varphi + s \sin(\varphi + \alpha) \quad (1.2)$$

Постоянные s, α выражаются через скорость точки O и значение угла φ в любой фиксированный момент времени. Чаплыгин назвал параметр s начальным толчком тела. Соотношения (1.2) являются следствием теоремы об изменении импульса системы тело + жидкость: горизонтальная составляющая импульса постоянна и в принятых обозначениях равна $-s \sin \alpha$, а вертикальная составляющая изменяется по закону $s \cos \alpha - pt$.

Второе уравнение системы (1.1) с учетом равенств (1.2) дает дифференциальное уравнение второго порядка для определения угла поворота

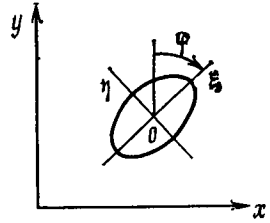
$$\varphi'' = (a_2 - a_1) b^{-1} uv + p b^{-1} (\xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi) \quad (1.3)$$

Скорость точки O в неподвижном пространстве находится из очевидных соотношений

$$\dot{x} = u \sin \varphi - v \cos \varphi, \quad \dot{y} = u \cos \varphi + v \sin \varphi \quad (1.4)$$

Если известны решения уравнений (1.3), то траектория точки O находится из (1.4) простыми квадратурами. В случае динамической симметрии, когда $a_1 = a_2$, уравнение (1.3) интегрируется в эллиптических функциях (см. [1]). В общем случае, когда $a_1 \neq a_2$, уравнение (1.3) является уже неавтономным и его вряд ли можно проинтегрировать в явном виде. В пользу этого предположения говорит следующий результат: если $a_1 \neq a_2$ и $p \neq 0$, то уравнение (1.3) не имеет полиномиальных по скорости φ' интегралов с 2π -периодическими по переменной φ коэффициентами. Его доказательство имеет чисто аналитический характер и здесь не приводится.

Настоящая работа посвящена качественному анализу замкнутой системы уравнений (1.3)–(1.4). В случае $p=0$ (тело движется по инерции) такой анализ проведен в классических работах Томсона, Тета и Гринхилла (см. [2]).



Фиг. 1

2. Вращение твердого тела. При фиксированных значениях s и α уравнение (1.3) с учетом соотношений (1.2) является замкнутым и поэтому вращение тела можно изучать независимо от его поступательного движения. Уравнение (1.3) имеет следующий явный вид:

$$\begin{aligned} \varphi'' &= kt^2 \sin \varphi \cos \varphi + t f(\varphi) + g(\varphi) \\ k &= (a_2 - a_1) (ba_1 a_2)^{-1} p^2, \quad f = -k s p^{-1} \sin(2\varphi + \alpha) \\ g &= k s^2 p^{-2} \sin(\varphi + \alpha) \cos(\varphi + \alpha) + p b^{-1} (\xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Если $a_1 = a_2$, то уравнение (2) сводится к уравнению колебаний простого маятника. Этот случай детально исследован в [1]. В дальнейшем предполагается, что $a_2 > a_1$ и $p > 0$ (т. е. $k > 0$).

Уравнение (2.1) имеет «равновесные» решения $\varphi(t) = \text{const}$ лишь при выполнении некоторых специальных условий. Если $s \sin \alpha = 0$ и $\eta = 0$, то имеется решение $\varphi(t) = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; если $s \sin \alpha = 0$ и $\xi = 0$, то имеется решение $\varphi(t) = \pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. В первом случае тело падает вниз с постоянным ускорением p/a_1 , во втором — с ускорением p/a_2 . Решение $\varphi = \pi n$ всегда неустойчиво. Действительно, в этом случае уравнение (2.1) приводится к виду

$$2\varphi'' = \Lambda(\varphi, t) \sin 2\varphi, \quad \Lambda = kt^2 - 2k s p^{-1} t \cos \alpha + k s^2 / p^2 + p \xi / (b \cos \varphi)$$

Так как $\Lambda \geq \kappa$, $\kappa = \text{const} > 0$ в некоторой полуполосе $|\varphi| \leq \varepsilon$, $t \geq t_0$, то любое решение $\varphi(t)$ с начальными данными $\varphi(t_0) > 0$, $\varphi'(t_0) > 0$ монотонно возрастает и за конечное время покинет ε -окрестность положения равновесия.

Исследуем устойчивость решения $\varphi(t) \equiv \pi/2$. Полагая $\varphi = \pi/2 + \delta$, запишем линеаризованное уравнение (2.1):

$$\delta'' + q(t)\delta = 0, \quad q = kt^2 + \lambda t + \mu, \quad \lambda = -2k s \cos \alpha / p, \quad \mu = k s^2 / p^2 - p \eta / b \quad (2.2)$$

Выполним замену времени $\tau = t^2/2$ и сделаем подстановку $\delta = \gamma / \tau^{1/2}$. В результате уравнение (2.2) примет вид (штрих означает дифференцирование по τ):

$$\gamma'' + Q(\tau)\gamma = 0, \quad Q = k + \lambda(2\tau)^{-1/2} + \mu(2\tau)^{-1} + 3/16\tau^{-2} \quad (2.3)$$

Так как при $\tau \rightarrow \infty$ справедлива оценка $|Q'(\tau)| \leq \nu / \tau^{3/2}$ ($\nu = \text{const} > 0$) и $Q(+\infty) = k > 0$, то для решений уравнения (2.3) справедливо асимптотическое ВКБ-представление

$$\gamma = c_1 \sin \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{Q(z)} dz + c_2 \cos \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{Q(z)} dz + \sigma(z) \quad (2.4)$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные и $\sigma(\tau), \sigma'(\nu) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ (см., например, [3]). Следовательно, все решения уравнения (2.2) стремятся к нулю как функция $t^{-1/2}$. Ниже будет показано, что этот вывод справедлив и для нелинейного уравнения (2.1). Так как уравнение (2.2) гамильтоново, то ввиду теоремы Лиувилля о сохранении фазовой площади скорость δ' неограничена как функция t . Следовательно, равновесие $\delta=0, \delta'=0$ уравнения (2.2) неустойчиво, однако имеет место асимптотическая устойчивость по отношению к координате δ .

В общем случае уравнение (2.1) не имеет равновесных решений, однако существуют заменяющие их замечательные асимптотические решения $\varphi(t)$, стремящиеся при $t \rightarrow \infty$ либо к точкам πn ($n \in \mathbf{Z}$), либо к точкам $\pi/2 + \pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$). Действительно, уравнение (2.1) имеет формальное решение в виде степенного ряда

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1/t + \varphi_2/t^2 + \varphi_3/t^3 + \dots \\ \varphi_1 &= sp^{-1} \sin \alpha, \quad \varphi_2 = 2s^2 p^{-2} \sin \alpha \cos \alpha - p\eta(kb)^{-1} \\ \varphi_3 &= s^3 p^{-3} (2/3 \sin^3 \alpha + 4 \sin \alpha \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha) - 2s\eta(kb)^{-1} \cos \alpha + \\ &\quad + \xi s(kb)^{-1} \sin \alpha, \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Коэффициенты ряда (2.5) $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ последовательно находятся по индукции. В общем случае числа φ_n очень быстро возрастают с ростом n , что приводит к расходимости ряда (2.5) при всех значениях $t \neq \infty$. Однако, из теоремы [4] вытекает существование решения $\varphi(t)$, которое стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ и для которого формальный ряд (2.5) является асимптотическим

$$\varphi(t) - \sum_{j=1}^n \varphi_j/t^j = O(t^{-n-1})$$

Из формул (2.5) следует, что при $s \sin \alpha = \eta = 0$ это решение переходит в равновесное решение $\varphi(t) = 0$. Решению (2.5) отвечает движение тела, при котором $\lim x'(t) = -s \sin \alpha/a_1, \lim y''(t) = -p/a_1$ ($t \rightarrow \infty$). Аналогично находится еще одно решение (2.1), представимое асимптотическим рядом

$$\begin{aligned} \varphi &= \pi/2 + \psi_1/t + \psi_2/t^2 + \dots \\ \psi_1 &= sp^{-1} \sin \alpha, \quad \psi_2 = 2s^2 p^{-2} \sin \alpha \cos \alpha - p\xi(kb)^{-1}, \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ему отвечает движение тела, при котором $\lim x'(t) = -s \sin \alpha/a_2, \lim y''(t) = -p/a_2$ ($t \rightarrow \infty$). Если $s \sin \alpha = 0$ и $\xi = 0$, то решение (2.6) переходит в решение $\varphi(t) = \pi/2$.

Анализ поведения общего решения уравнения (2.1) является довольно сложной задачей. По-видимому, для почти всех начальных данных имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \pi/2 \pmod{\pi} \quad (2.7)$$

Это утверждение в полном объеме пока не доказано.

Выполним снова замену времени $\tau = t^2/2$. Обозначая штрихом дифференцирование по τ , перепишем уравнение (2.1):

$$\varphi'' - k \sin \varphi \cos \varphi = -\varphi'/2\tau + f(2\tau)^{-1/2} + g/2\tau \quad (2.8)$$

При больших значениях τ правая часть этого уравнения является **малой величиной**. Введем полную энергию «невозмущенной» задачи $H = (\varphi'^2 + k \cos^2 \varphi)/2$ и рассмотрим поведение этой функции вдоль решений уравнения (2.8). Оказывается, всегда существует

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} H(\tau) = c \quad (2.9)$$

причем постоянная c равна или 0, или $k/2$. В первом случае угловая координата $\varphi(t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к одной из точек $\pi/2 + \pi n, n \in \mathbf{Z}$, причем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi'(t)/t = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi'(\tau) = 0 \quad (2.10)$$

Во втором случае фазовая траектория уравнения (2.8) петляет вблизи сепаратрисы невозмущенной задачи. По-видимому, почти все решения уравнения (2.8) на самом деле проходят через эту сепаратрису.

Для доказательства (2.9) рассмотрим функцию

$$E = \frac{1}{2}(\varphi')^2 + \frac{1}{2}k \cos^2 \varphi - F(\varphi) (2\tau)^{-1/2} - \frac{1}{2}G(\varphi)/\tau \quad (2.11)$$

где F и G — первообразные функций f и g . Так как средние по периоду функций f и g равны нулю, то F и G периодичны по φ с периодом 2π . Дифференцируя функцию E в силу уравнения (2.8), получим равенство:

$$E' - (2\tau)^{-1/2}F - G/2\tau^2 = -(\varphi')^2/2\tau \quad (2.12)$$

Ввиду ограниченности функций F и G интегралы от функций $F(\varphi(\tau))\tau^{-1/2}$ и $G(\varphi(\tau))\tau^{-2}$ в пределах от τ_0 до ∞ сходятся. Следовательно, функция $E(\tau)$ ограничена. Отсюда в свою очередь вытекает сходимостъ несобственного интеграла от функции $(\varphi')^2/\tau$ в тех же пределах. Интегрируя обе части равенства (2.12) в интервале $[\tau_0, \tau]$ и устремляя затем τ к бесконечности, получим, что функция $E(\tau)$ стремится к некоторой постоянной c . Ввиду формулы (2.11) получаем (2.9).

Ясно, что $c \geq 0$. Если $c > k/2$, то при достаточно больших значениях τ имеем неравенство $(\varphi')^2 \geq \kappa > 0$, $\kappa = \text{const}$. В этом случае интеграл от функции $(\varphi')^2/\tau$ будет расходящимся. Следовательно, $c \leq k/2$. Покажем, что если $0 < c < k/2$, то этот интеграл также расходится. Действительно, согласно (2.8) при достаточно больших значениях τ точка $(\varphi(\tau), \varphi'(\tau))$ движется вблизи замкнутой кривой $(\varphi')^2 + k \cos^2 \varphi = 2c$, причем скорость этого движения мало отличается от скорости «невозмущенного» движения, описываемого уравнением маятника $\varphi'' = k \sin \varphi \cos \varphi$. Следовательно, имеется бесконечно много временных интервалов (τ_{2n-1}, τ_{2n}) , $n=1, 2, \dots$, на которых справедливы неравенства $c \leq (\varphi'(\tau))^2 \leq 3c/2$. Положим $C = \sup_{\tau > \tau_0} |\varphi''(\tau)|$. Ввиду уравнения (2.8) постоянная $C < \infty$. Следовательно,

$$(3c/2)^{1/2} - c^{1/2} = \left| \int_{\tau_{2n-1}}^{\tau_{2n}} \varphi''(\tau) d\tau \right| \leq \int_{\tau_{2n-1}}^{\tau_{2n}} |\varphi''(\tau)| d\tau \leq C(\tau_{2n} - \tau_{2n-1})$$

Поэтому $\tau_{2n} - \tau_{2n-1} \geq \Delta > 0$ при всех n . Ясно, что разности $\tau_{j+1} - \tau_j$ ($j=1, 2, \dots$) ограничены сверху некоторым положительным числом T . Поэтому $\tau_j \leq jT + \sigma$, где $\sigma = \text{const} > 0$. Так как на интервале $\tau_{2n-1} \leq \tau \leq \tau_{2n}$ справедлива оценка $(\varphi')^2/\tau \geq c/\tau_{2n} \geq c/(2nT + \sigma)$, то рассматриваемый интеграл не меньше суммы ряда $\sum c\Delta/(2nT + \sigma)$, $n=1, 2, \dots$. Остается заметить, что этот ряд расходится к $+\infty$.

Отметим одно следствие из полученного результата. Если при достаточно большом значении t_0 скорость $\dot{\varphi}(t_0)$ мала, а значение $\varphi(t_0)$ мало отличается от одной из точек $\pi/2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\varphi(t) \rightarrow \pi/2 + \pi n$, $\dot{\varphi}(t)/t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. В частности, равновесные решения уравнения (2.1) $\varphi(t) \equiv \pi/2 + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$), существующие при $\sin \alpha = \xi = 0$, асимптотически устойчива по отношению к координате φ .

В наиболее простом частном случае, когда $s = \xi = \eta = 0$, энергия H монотонно убывает с ростом τ . Поэтому, если точка $(\varphi, \dot{\varphi})$ в некоторый момент τ попала в колебательную область, то она из нее уже не выйдет и переменная φ будет стремиться к соответствующему устойчивому равновесию. Пусть, например, $\varphi \rightarrow \pi/2$ при $t \rightarrow \infty$. Из формулы (2.4) легко получить простое асимптотическое представление для функции $\delta(t) = \varphi(t) - \pi/2$:

$$\delta = c(kt)^{-1/2} \sin(1/2 k^{1/2} t^2 + \psi_0), \quad \delta' = ct^{1/2} \cos(1/2 k^{1/2} t^2 + \psi_0) \quad (2.13)$$

$$(c, \psi_0 = \text{const})$$

Из (2.13) видно, что функция $\delta(t)$ стремится к нулю как $t^{-1/2}$ и быстро осциллирует. Ее нули имеют асимптотику $t_n \sim (2\pi n)^{1/2} k^{-1/4}$ и поэтому расстояние между соседними нулями неограниченно убывает с ростом n . Важно подчеркнуть, что амплитуда угловой скорости вращения тела $\delta'(t)$ неограниченно возрастает.

Таким образом, твердое тело стремится занять такое положение, при котором его широкая сторона является горизонтальной. При этом тело

совершает колебания с неограниченно убывающей амплитудой и возрастающей частотой. Конечно, в действительности вязкость гасит высокие частоты. Покажем это на примере диссипативных сил с линейной вязкостью. Добавим в правую часть уравнения (2.1) слагаемое $-\mu\dot{\varphi}$, $\mu = \text{const} > 0$, линеаризуем это уравнение в окрестности равновесного решения $\varphi(t) = \pi/2$ и выполним замены переменных $\tau = t^2/2$, $\delta = \gamma\tau^{-1/2}\exp[-\mu(\tau/2)^{1/2}]$. В результате для переменной γ получим уравнение (2.3), в котором снова $Q(\tau) = k + o(1)$. Из асимптотической формулы (2.4) следует, что амплитуда колебаний угловой скорости $\delta'(t)$ убывает с ростом t как $t^{1/2}\exp(-\mu t/2)$. Поэтому, действительно, $\delta'(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

3. Применение метода усреднения. Если начальный толчок z равен нулю, то соотношение (2.7) можно обосновать с помощью некоторой модификации известного принципа усреднения. В этом случае уравнение (2.8) принимает следующий вид:

$$\varphi'' - k \sin \varphi \cos \varphi = -\varphi'/2\tau + g/2\tau, \quad g = (\xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi) p/b \quad (3.1)$$

При больших значениях τ правая часть этого уравнения является малой величиной, поэтому для исследования финальных свойств решений (3.1) можно воспользоваться теорией возмущений. Невозмущенная система $\varphi'' - k \sin \varphi \cos \varphi = 0$ описывает колебания обычного маятника. Вводя полную энергию $H = (\varphi'^2 + k \cos^2 \varphi)/2$, перейдем к переменным действие — угол $J, \psi \bmod 2\pi$:

$$J = \frac{(H/2)^{1/2}}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \kappa^2 \cos^2 q)^{1/2} dq, \quad \psi = (2H)^{-1/2} \frac{dH}{dJ} \int_{-\pi/2}^{\varphi} \frac{dq}{(1 - \kappa^2 \cos^2 q)^{1/2}},$$

$$\kappa^2 = \frac{k}{2H} \quad (3.2)$$

Здесь для определенности рассматривается область вращательных движений. Формулы (3.2) можно переписать в следующем виде:

$$J = \frac{(8H)^{1/2} E}{\pi}, \quad \psi = \frac{\pi}{2K} \int_0^{\varphi + \pi/2} \frac{dx}{(1 - \kappa^2 \sin^2 x)^{1/2}}$$

где K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго родов с модулем κ . Следовательно,

$$\cos \varphi = \text{sn } w, \quad \sin \varphi = -\text{cn } w, \quad \varphi' = (2H)^{1/2} \text{dn } w, \quad w = 2K\psi/\pi$$

Вычислим производную действия J по переменной τ :

$$J' = \frac{4KH'}{\pi(8H)^{1/2}} = \frac{4K}{\pi(8H)^{1/2}} \left(-\frac{\varphi'^2}{2\tau} + \frac{g\varphi'}{2\tau} \right) \quad (3.3)$$

Согласно принципу усреднения, правую часть этого равенства следует усреднить по угловой переменной ψ . Усредним сначала функцию $g\varphi'$. Так как средние значения $\langle \text{sn } w \text{ dn } w \rangle$ и $\langle \text{cn } w \text{ dn } w \rangle$ равны нулю, то $\langle g\varphi' \rangle = 0$. Вычислим теперь $\langle \varphi'^2 \rangle = 2H - k \langle \text{cn}^2 w \rangle = 2HE/K$. Следовательно, усредненное уравнение (3.3) имеет следующий вид:

$$J' = -J/2\tau \quad (3.4)$$

Оно описывает эволюцию медленной переменной J на асимптотически больших промежутках времени (точные оценки будут даны ниже). Уравнение (3.4) просто интегрируется: $J = c/\sqrt{\tau}$, $c = \text{const}$. Значит, $J \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. Поскольку уравнение (3.4) справедливо и в колебательной области, то отсюда вытекает (2.7). Однако, надо иметь в виду, что не все решения переходят через сепаратрису. Примером служит решение (2.5). Однако, по-видимому, их мера равна нулю.

В уравнении (3.1) роль малого параметра играет множитель $1/\tau$ (при больших τ). Однако, эта величина не является постоянной и поэтому стандартный метод обоснования принципа усреднения (см. [5]) нуждается в некоторой модификации.

В переменных $J, \psi \bmod 2\pi$ уравнение (3.1) принимает следующий вид:

$$J' = \tau^{-1}F(J, \psi), \quad \psi' = \omega(J) + \tau^{-1}G(J, \psi) \quad (3.5)$$

причем функции F и G гладкие и 2π -периодические по ψ . Вместо переменной J введем новую переменную P по формуле

$$P = J + \tau^{-1}K(J, \psi) \quad (3.6)$$

где 2π -периодическая функция K удовлетворяет уравнению

$$\omega \partial K / \partial \psi = \Lambda - G, \quad \Lambda = \langle G \rangle \quad (3.7)$$

Если $\omega(J) > \text{const} > 0$, то периодическое решение (3.7), действительно, существует. При больших значениях τ формулу (3.6) можно обратить:

$$J = P + \tau^{-1}S(P, \psi) + O(\tau^{-2}) \quad (3.8)$$

Согласно (3.5)–(3.8), переменная P удовлетворяет уравнению

$$P' = \tau^{-1}\Lambda(P) + R, \quad |R| \leq c_1/\tau^2, \quad c_1 = \text{const} > 0 \quad (3.9)$$

Рассмотрим теперь усредненное уравнение

$$I' = \tau^{-1}\Lambda(I) \quad (3.10)$$

и сравним функции $P(\tau)$ и $I(\tau)$. Пусть τ_0 велико и $J(\tau_0) = P(\tau_0)$. Согласно (3.6) получаем оценку

$$|P(\tau_0) - I(\tau_0)| \leq c_2/\tau_0, \quad c_2 > 0 \quad (3.11)$$

Пусть κ – постоянная Липшица для функции Λ . Применяя теорему сравнения для уравнений (3.9) и (3.10) (см., например, [6], гл. IV) и оценку (3.11), получаем неравенство

$$|P(\tau) - I(\tau)| \leq \frac{c_2}{\tau_0} e^{\kappa(\tau - \tau_0)} + \frac{c_1}{\kappa\tau_0} [e^{\kappa(\tau - \tau_0)} - 1]$$

Следовательно, на большом интервале времени $\tau_0 \leq \tau \leq 2\tau_0$ функции $P(\tau)$ и $I(\tau)$ (а также $J(\tau)$ и $I(\tau)$) отличаются на малую величину $\leq c_3/\tau_0$. Что и требовалось.

Отметим, что для уравнения (3.1) вблизи сепаратрис невозмущенной задачи частота ω мала. Это создает дополнительные трудности в обосновании метода усреднения, связанные с изучением перехода через сепаратрису.

В рассматриваемой задаче уравнение (3.9) имеет вид

$$P' = -P/2\tau + R \quad (3.12)$$

причем в колебательной области функция R допускает оценку $|R| \leq c/\tau^2$. Полагая $P = z\tau^{-1/2}$, из (3.12) получаем уравнение $z' = \tau^{1/2}R$, из которого вытекает ограниченность функции $z(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$. Следовательно, $P = O(\tau^{-1/2})$. Но тогда, согласно (3.6), переменная $J(\tau)$ также убывает при $\tau \rightarrow \infty$ как $\tau^{-1/2}$.

4. Траектория падающего тела. Исследуем движение выделенной точки O твердого тела. Из первой формулы (1.4) с учетом соотношений (1.2) и уравнения вращения (2.1) получим горизонтальную составляющую скорости точки O :

$$\dot{x} = -\frac{b\varphi''}{pt} + \frac{bf}{p} + \frac{bg}{pt} + s \left[\frac{1}{a_1} \sin \varphi \cos(\varphi + \alpha) - \frac{1}{a_2} \cos \varphi \sin(\varphi + \alpha) \right] \quad (4.1)$$

Рассмотрим типичную ситуацию, когда выполнено соотношение (2.7). При этом, согласно (2.10), $\varphi'(t)/t \rightarrow 0$. Пусть, для определенности $\varphi(t) \rightarrow \pi/2$ при $t \rightarrow \infty$.

Докажем сначала, что интеграл

$$I = \int_{t_0}^{\infty} \frac{\varphi''(t)}{t} dt \quad (4.2)$$

сходится. Интегрируя по частям и применяя (2.10), а затем интегрируя еще раз по частям, приходим к равенству

$$I = -\frac{\varphi'(t_0)}{t_0} - \frac{\varphi(t_0)}{t_0^2} + 2 \int_{t_0}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t^3} dt$$

Так как функция $\varphi(t)$ ограничена при больших t , то последний интеграл, действительно, сходится.

Согласно (4.1), при $t \rightarrow \infty$ функция $x' + b\varphi''/(pt)$ стремится к конечному пределу $-s \sin \alpha/a_2$. Учитывая сходимость интеграла (4.2), получаем следующее асимптотическое представление:

$$x(t) = -(s \sin \alpha/a_2)t + o(t) \quad (4.3)$$

Ниже будет показано, что добавочное слагаемое $o(t)$ в общем случае неограничено. Пусть начальный толчок s равен нулю. Тогда соотношение (4.1) приобретает следующий вид:

$$x'' = (b/p)\varphi'' t^{-1} + \xi t^{-1} \sin \varphi - \eta t^{-1} \cos \varphi$$

Так как $\sin \varphi(t) \rightarrow 1$, $\cos \varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то в этом случае $x(t) = \xi \ln t + o(\ln t) = o(t)$. Если, наконец, $\xi = 0$, то $x(t)$ стремится к конечному пределу. Когда $\eta = 0$, этот результат вытекает из сходимости интеграла (4.2). При $\eta \neq 0$ следует воспользоваться асимптотическим представлением (2.4).

Из второй формулы (1.4) и соотношений (1.2) получаем вертикальную составляющую скорости точки O :

$$y' = -pt \left(\frac{\cos^2 \varphi}{a_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{a_2} \right) + s \left[\frac{1}{a_1} \cos \varphi \cos(\varphi + \alpha) + \frac{1}{a_2} \sin \varphi \sin(\varphi + \alpha) \right] \quad (4.4)$$

Так как $\varphi(t) \rightarrow \pi/2$, то

$$y(t) = -pt^2/2a_2 + o(t^2) \quad (4.5)$$

Из (4.3) и (4.5) вытекает, что асимптотически (при больших значениях t) траектория точки O является параболой (если, конечно, $s \sin \alpha \neq 0$). Если $s = 0$, а $\xi \neq 0$, то траектория имеет следующий вид: $y = 1/2 p a_2^{-1} \exp(2x/\xi) + o(\exp(2x/\xi))$. В этом случае тело падает по более крутой кривой.

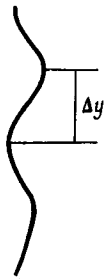
Из формул (4.1), (4.4) и асимптотических соотношений (2.13) можно получить более точную информацию о траектории точки O в случае, когда $s = \xi = \eta = 0$. При больших значениях t эта кривая представляет собой вертикально расположенную «синусоиду» с неограниченно убывающей амплитудой, причем ее полу период равен $\Delta y = \pi p a_2^{-1} k^{-1/2}$ (см. фиг. 2). Величина Δy равна высоте, на которую опускается точка O между двумя последовательными обращениями в нуль горизонтальной составляющей скорости $x'(t)$. Интересно отметить, что в этом случае координата $x(t)$ и среднее ускорение $y'(t)/t$ стремятся к конечным пределам, однако при $t \rightarrow \infty$ горизонтальная составляющая скорости $x'(t)$ и вертикальное ускорение $y''(t)$ неограничены.

5. Двоякоасимптотические движения. Положим $\vartheta = 2\varphi$ и перепишем уравнение (2.1) при $s = \xi = \eta = 0$:

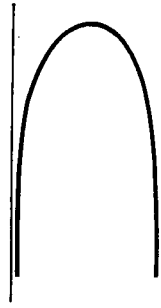
$$\vartheta'' = kt^2 \sin \vartheta \quad (5.1)$$

Это уравнение является уравнением Лагранжа с положительным лагранжианом $L = 1/2 \vartheta'^2 + k(1 - \cos \vartheta)t^2$. Равновесие $\vartheta(t) = 0$ неустойчиво и, более того, для каждого $\vartheta_0 \in (0, 2\pi)$ и любого момента времени t_0 найдутся два решения $\vartheta(t)$, $\vartheta(t_0) = \vartheta_0$, неограниченно приближающиеся к неустойчивому равновесию с разных сторон. Этот факт выводится из результатов [7], посвященных анализу асимптотических движений вариационными методами: на указанных решениях достигается минимального значения действия по Гамильтону на интервале $t \in [t_0, \infty)$. Положим $\vartheta_0 = \pi$ и $t_0 = 0$. Пусть $\vartheta_*(t)$ — решение с начальным условием $\vartheta_*(0) = \vartheta_0$, неограниченно приближающееся к точке $\vartheta = 2\pi$ при $t \rightarrow +\infty$. Поскольку уравнение (5.1) инвариантно при подстановке $t \rightarrow -t$, то это решение обладает следующими свойствами: 1) $\vartheta_*(t) + \vartheta_*(-t) = 2\pi$ при всех t ; 2) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \vartheta_*(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \vartheta_*(t) = 2\pi$. Следовательно, решение $\vartheta_*(t)$ является двоякоасимптотическим. Имеется еще одно двоякоасимптотическое решение (5.1), обходящее окружность $\vartheta \bmod 2\pi$ в другом направлении.

Предположим, что в момент $t = 0$ точка O занимает наивысшее поло-



Фиг. 2



Фиг. 3

жение при движении твердого тела. Тогда решению $\vartheta(t)$ отвечает движение тела, при котором 1) $x(t)$ — нечетная, а $y(t)$ — четная функции времени; 2) существует $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t)$; 3) $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y''(t) = -p/a_2$.

Траектория такого движения изображена на фиг. 3. При изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ тело асимптотически совершает один полуоборот. В связи с этим результатом возникает интересная задача: существуют ли похожие движения, при которых тело совершает асимптотически любое заданное число полных полуоборотов?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полн. собр. соч. Т. I. Л.: Изд-во АН СССР. 1933. С. 133–150.
2. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат. 1947. 928 с.
3. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука. 1967. 472 с.
4. Кузнецов А. Н. Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений // Функциональный анализ и его приложения. 1972. Т. 6. Вып. 2. С. 41–51.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958. 408 с.
6. Бурбаки Н. Элементы математики. Кн. 4. Функции действительного переменного. М.: Наука, 1965. 424 с.
7. Болотин С. В., Козлов В. В. Об асимптотических решениях уравнений динамики // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1980. № 4. С. 84–89.

Москва

Поступила в редакцию
21.III.1988