Математические заметки

т. 45, № 4 (1989)

# О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛАХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОЛУТОРА СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В. В. Козлов

1. Давно замечено, что все известные первые интегралы уравнений классической механики являются полиномами по скоростям (либо функциями от полиномов). Это наблюдение не получило еще полного обоснования. Поэтому понятен интерес к аналитической и геометрической природе полиномиальных интегралов.

Уиттекер [1] и Биркгоф [2] исследовали условия существования линейных и квадратичных интегралов систем с двумя степенями свободы. Все линейные интегралы нетеровы (они обусловлены существованием скрытых циклических координат), а наличие квадратичных интегралов связано с возможностью разделения переменных (ср. с [3]).

С точки зрения глобального подхода целесообразно рассматривать полиномиальные интегралы, коэффициенты которых — однозначные (гладкие или аналитические) функции на конфигурационном пространстве динамической системы. Различные аспекты задачи о существовании полиномиальных интегралов в целом рассматривались в работах [4, 5, 6].

Простейшей нетривиальной задачей такого типа является вопрос о наличии у системы

$$\ddot{x} = -V_x \tag{1}$$

с $2\pi$-периодическим по $x$ потенциалом $V(x, t)$ первого интеграла в виде полинома

$$a_0(x, t) + a_1(x, t)\dot{x} + \ldots + a_n(x, t)\dot{x}^n \tag{2}$$

с $2\pi$-периодическими по $x$ коэффициентами $a_k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Рассмотрению этой задачи и посвящена настоящая статья.

2. Дифференцируя функцию (2) в силу системы (1), получим следующую систему уравнений в частных производных первого порядка для отыскания потенциала $V$ интегрируемой системы и коэффициен-

тов $a_k$:

$$(a_n)_x = 0; \tag{3.n+1}$$

$$(a_n)_t + (a_{n-1})_x = 0; \tag{3.n}$$

$$(a_{n-1})_t + (a_{n-2})_x = na_n V_x; \tag{3.n—1}$$

$$(a_{n-2})_t + (a_{n-3})_x = (n-1)\, a_{n-1} V_x; \tag{3.n—2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(a_1)_t + (a_0)_x = 2a_2 V_x; \tag{3.1}$$

$$(a_0)_t = a_1 V_x. \tag{3.0}$$

Эта система состоит из $n+2$ уравнений и содержит столько же неизвестных функций $V,\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$.

Отметим, что уравнение (1) сохраняет свой вид при подстановке $t \mapsto t,\ x \mapsto x + \alpha t,\ V(x,\ t) \mapsto V(x + \alpha t,\ t) + f(t)$, где $\alpha = \mathrm{const}$, $f$ — произвольная функция времени. Этой тривиальной калибровкой мы будем постоянно пользоваться.

ЛЕММА 1. $a_n = a_n^0 = \mathrm{const} \neq 0,\ a_{n-1} = a_{n-1}^0 = \mathrm{const},\ a_{n-2} = na_n^0 V$ *(после подходящей калибровки $V$).*

Доказательство. Из $(3.n+1)$ вытекает, что функция $a_n$ не зависит от $x$. Следовательно, $a_n = \langle a_n \rangle$, где

$$\langle g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Усредняя обе части уравнения $(3.n)$ по $x$, получаем, что $(\langle a_n \rangle)_t = 0$. Следовательно, $a_n = \mathrm{const}$. Но тогда из $(3.n)$ вытекает, что $a_{n-1}$ не зависит от $x$, и поэтому $a_{n-1} = \langle a_{n-1} \rangle$. Усредняя уравнение $(3.n-1)$ по $x$, приходим к равенству $a_{n-1} = \langle a_{n-1} \rangle = \mathrm{const}$. Следовательно, уравнение $(3.n-1)$ приобретает вид $(a_{n-2})_x = na_n^0 V_x$, откуда получаем, что разность $a_{n-2} - na_n^0 V$ зависит лишь от времени. Что и требовалось.

Делением интеграла (2) на ненулевую постоянную $a_n^0$ приходим к равенству $a_n \equiv 1$. Выполняя еще подстановку $x \mapsto x - (a_{n-1}^0/n)\, t$, получаем уравнение вида (1) с интегралом (2), в котором $a_{n-1} \equiv 0$. Итак, можно считать, что $a_n = 1$ и $a_{n-1} = 0$.

С помощью леммы 1 легко получить условия существования интеграла степени $n \leqslant 3$.

При $n = 1$ из соотношения $a_{n-2} = nV$ получаем, что $V \equiv 0$. Следовательно, линейный интеграл сводится к интегралу момента $\dot{x}$.

При $n = 2$ из уравнения (3.0) получаем уравнение на потенциал $V_t = 0$. Откуда $V = f(x)$, где $f(\cdot)$ — произвольная гладкая функция с периодом $2\pi$. Интеграл (2) превращается при этом в обычный интеграл энергии автономной системы с одной степенью свободы.

При $n = 3$ уравнения (3.0) и (3.1) дают систему

$$(a_0)_x = -3V_t, \quad (a_0)_t = 3VV_x,$$

из которой получаем уравнение второго порядка на потенциал

$$V_{tt} + (VV_x)_x = 0. \tag{4}$$

Оно совпадает с интегрируемым стационарным уравнением Хохлова — Заболоцкого. Нас интересуют лишь $2\pi$-периодические по переменной $x$ решения (4). Применяя теорему Коши—Ковалевской, получаем, что для произвольных аналитических $2\pi$-периодических функций $f$ и $g$ существует аналитическое решение $V(x, t)$ уравнения (4), периодическое по $x$ с периодом $2\pi$ и $V(x, 0) = f(x)$, $V_t(x, 0) = g(x)$. Таким образом, имеется семейство потенциалов, зависящее от двух произвольных периодических функций, при которых уравнение (1) имеет нетривиальный интеграл третьей степени по скорости.

В приложениях часто встречаются случаи, когда потенциал является тригонометрическим многочленом по переменной $x$:

$$V = \sum_{-m}^{m} v_k(t) \exp(ikx), \quad v_{\pm m}(t) \not\equiv 0, \quad m \neq 0. \tag{5}$$

В качестве примера укажем уравнение Чаплыгина

$$\ddot{x} = t^2 \sin x, \tag{6}$$

описывающее вращение тяжелой пластинки в безграничном объеме идеальной жидкости [7]. Легко видеть, что уравнение (4) не имеет решений вида (5). Действительно, левая часть (4) будет тригонометрическим многочленом с нетривиальной гармоникой $-2m^2v_m^2 \exp(2imx)$. Заметим, что имеются потенциалы вида (5), при которых уравнение (1) допускает квадратичный интеграл.

Наблюдения этого пункта могут быть обобщены на случай полиномиальных интегралов произвольной степени.

3. Строение систем с полиномиальными интегралами описывает

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $n \geqslant 1$ существует семейство аналитических потенциалов $V(x, t)$, $2\pi$-периодических по $x$, зависящее от $n - 1$ произвольных аналитических $2\pi$-периодических функций, для которых уравнение* (1) *имеет полиномиальный интеграл степени $n$ с однозначными коэффициентами.*

Доказательство основано на применении теоремы Коши — Ковалевской. Однако эта теорема непосредственно неприменима к системе (3). Преобразуем (3) с помощью леммы 1 и соглашения, что $a_n = 1$:

$$nV_t + (a_{n-3})_x = (n-1)\, a_{n-1}^0 V_x; \tag{7.$n$—2}$$
$$(a_{n-3})_t + (a_{n-4})_x = (n-2)\, nVV_x; \tag{7.$n$—3}$$
$$(a_{n-4})_t + (a_{n-5})_x = (n-3)\, a_{n-3}V_x; \tag{7.$n$—4}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

$$(a_1)_t + (a_0)_x = 2a_2V_x; \tag{7.1}$$
$$(a_0)_t = a_1V_x. \tag{7.0}$$

Эта система состоит из $n - 1$ уравнений и содержит $n - 1$ неизвестных функций $a_0, \ldots, a_{n-3}$ и $V$. К системе (7) уже применима теорема Коши — Ковалевской: при $t = 0$ надо задать значения $n - 1$ функций $a_0, \ldots, a_{n-3}$, $V$ в виде произвольных аналитических $2\pi$-периодических функций переменной $x$. Тогда (7) при малых $t$ будет иметь решения, $2\pi$-периодические по $x$.

Было бы интересным выяснить вопрос о продолжимости решений системы (7) на всю ось времени $t$.

**4.** Исследуем вопрос о разрешимости системы (7) в классе потенциалов, являющихся тригонометрическими многочленами по переменной $x$. Мы здесь не будем предполагать, что $a_{n-1}^0 = 0$. Поэтому в правую часть уравнения (7.$n$ — 2) надо добавить $(n-1)\ a_{n-1}^0 V_x$.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что уравнение* (1) *с потенциалом*

$$V = \sum\nolimits_{-m}^{m} v_k(t) \exp(ikx) \tag{8}$$

*имеет полиномиальный интеграл степени* $n \geqslant 1$. *Тогда*

1) *если* $n$ *нечетно, то* $V$ *не зависит от* $x$,

2) *если* $n$ *четно, то* $v_m = c \exp(i\beta t)$, *где* $c \in \mathbf{C}$, $\beta = a_{n-1}^0/n$.

Следствие 1. *Предположим, что* $|v_m| \neq \mathrm{const}$. *Тогда уравнение* (1) *не имеет нетривиальных полиномиальных интегралов с однозначными* ($2\pi$-*периодическими по* $x$) *коэффициентами.*

Следствие 2. *Уравнение Чаплыгина* (6) *не имеет однозначных полиномиальных интегралов.*

Последнее утверждение указывает на неинтегрируемость уравнения (6) (ср. с [7]).

Следствие 1 показывает, что динамические системы вида (1) с нетривиальными полиномиальными интегралами бесконечно редки. Чтобы формализовать это высказывание, рассмотрим системы с потенциалами (8), у которых коэффициенты $v_k$ периодичны по $x$ с одним и тем же периодом $p > 0$. Множество таких потенциалов можно отождествить с набором коэффициентов Фурье функций $v_k(t)$, $|k| \leqslant m$. Из теоремы 2 вытекает, что $\beta$ кратно $p$ и все коэффициенты Фурье функции $v_m$ кроме одного обращаются в нуль. Следовательно, системы (1) с нетривиальным полиномиальным интегралом лежат в подпространстве бесконечной коразмерности.

Как показывает случай $n = 2$ (см. п. 2), параметр $\beta$ может принимать любые значения.

Следствие 3. *Уравнение* (1) *с потенциалом* $V = \lambda(t) \sin mx + \mu(t) \cos mx$ $(m \in \mathbf{N})$ *имеет нетривиальный однозначный полиномиальный интеграл тогда и только тогда, когда оно имеет полиномиальный интеграл степени* $\leqslant 2$.

Действительно, если уравнение (1) допускает интеграл нечетной степени, то имеется линейный интеграл (заключение 1) теоремы 2). Если же степень полиномиального интеграла четная, то из заключения 2) легко выводится, что потенциал $V$ является $2\pi$-периодической функцией от переменной $x + \alpha t$, $\alpha = \mathrm{const}$. В этом случае уравнение (1) допускает обобщенный интеграл энергии, степень которого равна двум (см. п. 2).

Пока остается неясным, справедливо ли следствие 3 для полиномиальных потенциалов (8) общего вида (ср. с [6]).

5. Доказательство теоремы 2. Если $V$ является тригонометрическим многочленом по переменной $x$, то из соотношений (3) по индукции легко показать, что функции $a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$

также являются тригонометрическими многочленами, причем

$$a_{n-2} = \bar{A}_{n-2} \exp(-imx) + \ldots + A_{n-2} \exp(imx);$$
$$a_{n-3} = \bar{A}_{n-3} \exp(-imx) + \ldots + A_{n-3} \exp(imx);$$
$$a_{n-4} = \bar{A}_{n-4} \exp(-i2mx) + \ldots + A_{n-4} \exp(i2mx);$$
$$a_{n-5} = \bar{A}_{n-5} \exp(-i2mx) + \ldots + A_{n-5} \exp(i2mx)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Разлагая левые и правые части соотношений (3) в ряды Фурье и приравнивая коэффициенты при старших гармониках, получим цепочку уравнений для отыскания $A_{n-2}$, $A_{n-3}$, ...:

$$A_{n-2} = nv_m; \tag{9.n — 2}$$
$$\dot{A}_{n-2} + imA_{n-3} = (n-1)\, ima_{n-1}^0 v_m; \tag{9.n — 3}$$
$$2A_{n-4} = (n-2)\, A_{n-2}v_m; \tag{9.n — 4}$$
$$\dot{A}_{n-4} + i2mA_{n-5} = (n-3)\, im\, A_{n-3}v_m; \tag{9.n — 5}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Здесь точка означает дифференцирование по $t$. При выводе уравнений (9) предполагалось, что $m \neq 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда $n$ нечетно. Тогда подсистема уравнений (9.$n$ — 2), (9.$n$ — 4), ..., (9.1) замкнута:

$$A_{n-2} = nv_m;$$
$$2A_{n-4} = (n-2)\, A_{n-2}v_m;$$
$$3A_{n-6} = (n-4)\, A_{n-4}v_m;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{n-1}{2} A_1 = 3A_3v_m.$$

Откуда

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)!\, A_1 = n!!\,(v_m)^{(n-1)/2}. \tag{10}$$

Последнее уравнение системы (3)

$$(a_0)_t = a_1V_x \tag{11}$$

дает, что $imA_1v_m = 0$. Так как по предположению $m \neq 0$, то с учетом соотношения (10) приходим к равенству $v_m = 0$. Применяя вниз индукцию по $m$, получаем, что $V$ вообще не зависит от $x$.

Рассмотрим теперь случай четного $n \geqslant 2$. Сначала из уравнений (9.$n$ — 2), (9.$n$ — 4), ..., (9.0) найдем $A_{n-2}$, $A_{n-4}$, ..., $A_0$:

$$A_{n-2} = nv_m;$$
$$2A_{n-4} = (n-2)\, A_{n-2}v_m;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$lA_{n-2l} = (n-l+2)\, A_{n-l+2}v_m;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{n}{2} A_0 = 2A_2v_m.$$

Откуда

$$A_{n-2l} = \frac{n(n-2)\dots(n-l+2)}{l!}(v_m)^l \qquad (1 \leqslant l \leqslant n/2). \tag{12}$$

Для отыскания $A_{n-3}$, $A_{n-5}$, ... используем уравнения (9.$n$ — 3), (9.$n$ — 5), ...:

$$A_{n-3} = (n-1)\, a^0_{n-1} v_m - \dot{A}_{n-2}/im;$$

$$2A_{n-5} = (n-3)\, A_{n-3} v_m - \dot{A}_{n-4}/im;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{n-2}{2} A_1 = 3A_3 v_m - \dot{A}_2/im.$$

Из этих уравнений с учетом соотношений (12) получим, что

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)!\, A_1 = (n-1)!!\, a^0_{n-1} (v_m)^{(n-2)/2} + \frac{iF(n)}{m} v_m^{n/2-2} \dot{v}_m, \tag{13}$$

где $F$ — положительное число (зависящее лишь от $n$).

При четном $n$ из уравнения (11) вытекает соотношение

$$\dot{A}_0 = imA_1 v_m. \tag{14}$$

Полагая в (12) $l = n/2$, получаем:

$$A_0 = \frac{n!!}{(n/2)!!} v_m^{n/2}. \tag{15}$$

Из соотношений (13), (14) и (15) можно получить следующее уравнение для $v_m$:

$$G(n)\, \dot{v}_m = ima^0_{n-1} v_m, \tag{16}$$

где $G(\cdot)$, также как и $F$, принимает вещественные значения и $G > 0$. Из линейного уравнения (16) вытекает искомая формула

$$v_m = c \exp(i\beta t), \qquad \beta = ma^0_{n-1}/G(n).$$

Попутно установлено, что $\beta$ линейно зависит от параметра $a^0_{n-1}$. Нам осталось доказать, что $G(n) = n$. Для этого выполним подстановку $x \mapsto x - (a^0_{n-1}/n)\, t$. В результате получим уравнение вида (1) с потенциалом

$$\hat{V}(x, t) = V(x - (a^0_{n-1}/n)\, t,\ t), \tag{17}$$

допускающее интеграл (2), в котором $a_{n-1} = 0$. Функция $\hat{V}$ — тригонометрический многочлен по $x$, причем, согласно (16), коэффициент при старшей гармонике равен некоторому комплексному числу $c$. Из формулы (17) тогда следует, что старший коэффициент Фурье многочлена $V$ равен $c \exp(ima^0_{n-1}/n)\, t$. Следовательно, $G(n) = n$.

Теорема 2 доказана.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 09.11.88

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


[1] Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. М.— Л.: Гостехиздат, 1937.
[2] Биркгоф Дж. Динамические системы. М.— Л.: Гостехиздат, 1941.
[3] Татаринов Я. В. Деформации многообразия положений и квадратичные интегралы натуральной системы в классической динамике // УМН. 1980. Т. 35, вып. 6. С. 173—174.
[4] Колокольцов В. Н. Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1982. Т. 46, № 5. С. 994—1010.
[5] Болотин С. В. О первых интегралах систем с гироскопическими силами // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1984. № 5. С. 75—82.
[6] Козлов В. В., Трещев Д. В. Об интегрируемости гамильтоновых систем с торическим пространством положений // Мат. сборник. 1988. Т. 135, № 1. С. 119—138.
[7] Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. С. 133—150.