Прикладная математика и механика. Том 53, вып. 1, 1989

УДК 531.36

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КЕЛЬВИНА

Козлов В. В.

Рассматривается задача об устойчивости равновесия системы взаимодействующих частиц, расположенных в ограниченном объеме евклидова пространства. Получены достаточные условия неустойчивости и существования движений, неограниченно приближающихся к положению равновесия, содержащие как частный случай теорему Кельвина [1]. Эти результаты основаны на общей теореме о неустойчивости равновесия в силовом поле с субгармонической силовой функцией.

1. Рассмотрим динамику обратимой системы с кинетической энергией $T = (g_{ij}v^iv^j)/2$ и силовой функцией $U(x)$. Движения описываются уравнениями Лагранжа

$$(L'_{v^i})^{\cdot} - L'_{x^i} = 0, \quad v^i = d(x^i)/dt, \quad L = T + U, \quad i \leqslant n \tag{1.1}$$

Коэффициенты метрического тензора g_{ij} и функция U считаются гладко зависящими от координат x. Предположим, что точка $x = 0$ является критической для силовой функции U. Следовательно, $x = 0$ — равновесие системы (1.1). Можно считать, что $U(0) = 0$. Функция U называется субгармонической, если $\Delta U \geqslant 0$, где Δ — оператор Лапласа — Бельтрами, взятый со знаком минус:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right), \quad g = \det\| g_{ij}\|$$

Ясно, что условие субгармоничности силовой функции не зависит от выбора лагранжевых координат x^i.

Теорема 1. Предположим, что силовая функция U субгармонична и ее ряд Маклорена отличен от нуля. Тогда равновесие $x = 0$ неустойчиво. В аналитическом случае для неустойчивости достаточно условия субгармоничности.

Доказательство. Пусть g_0^{ij} — значения метрического тензора в точке $x = 0$. Разложим силовую функцию U в ряд по однородным формам: $U_m + U_{m+1} + \ldots$, $m \geqslant 2$. Можно проверить, что $\Delta U = \Delta_0 U_m + \ldots$, где Δ_0 — оператор Лапласа — Бельтрами метрики g_0^{ij}, многоточие обозначает слагаемые порядка $\geqslant m-2$. Так как $\Delta U \geqslant 0$, то $\Delta_0 U_m \geqslant 0$. Коэффициенты оператора Δ_0 не зависят от x. Следовательно, функция U_m субгармоническая в смысле классического определения [2].

Из известного неравенства

$$0 = U_m(0) \leqslant \frac{1}{s_n r^{n-1}}\int_S U_m d\sigma$$

где S — сфера радиуса r с центром в точке $x = 0$, s_n — площадь единичной сферы, получим, что форма U_m обязательно принимает положительные значения. Поэтому U_m не имеет в точке $x = 0$ максимума. При указанном условии доказано [3] существование решений уравнений (1.1), неограниченно приближающихся к точке $x = 0$ при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$. Отсюда в свою очередь вытекает неустойчивость равновесия $x = 0$.

Следствие 1. Пусть коэффициенты метрического тензора g_{ij} аналитичны и силовая функция гармонична: $\Delta U = 0$. Тогда любое равновесие неустойчиво.

Действительно, если ряд Маклорена U отличен от нуля, то заключение следствия вытекает из теоремы 1. В противном случае $U \equiv 0$, поскольку гармонические функции аналитичны. При этом каждая точка $x = x_0$ будет безразличным равновесием. Все они, очевидно, неустойчивы.

Из следствия 1 заключаем, в частности, что справедлива известная гипотеза Ирншоу о неустойчивости равновесия системы свободных зарядов в стационарном электрическом поле в трехмерном пространстве [1,4]. Эта гипотеза была обоснована ранее в наиболее важном частном случае, когда $U = U_2 + U_3 + \ldots$ и $U_2 \not\equiv 0$ [5].

2. Кельвин рассмотрел задачу об устойчивости равновесия системы взаимно отталкивающихся материальных точек, заключенной в ограниченном объеме. Часть из этих точек может при этом находиться на границе, и точная постановка задачи должна опираться на теорию освобождающихся связей. Сначала рассмотрим условия устойчивости системы взаимодействующих точек в n-мерном евклидовом пространстве, часть из которых неподвижна. С точки зрения приложений наибольший интерес представляет случай $n \leqslant 3$. Пусть U_{ij} — силовая функция взаимодействующих частиц с массами m_i и m_j $(i \neq j)$. Она зависит лишь от их взаимного расстояния.

Теорема 2. Предположим, что функции $U_{ij}(r)$ аналитичны при $r > 0$ $(i \neq j)$ и

$$\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{dU_{ij}}{dr}\right) \geqslant 0 \tag{2.1}$$

Тогда любое равновесие неустойчиво.

Доказательство. Пусть $x_i^1, \ldots, x_i^n$ — декартовы координаты точки с массой m_i. Тогда $T = \Sigma m_i (v_i^k)^2/2$. Соответствующий дифференциальный оператор Λ имеет вид

$$\sum \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial^2}{\partial (x_i^1)^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial (x_i^n)^2}\right)$$

Пусть $x_j^1, \ldots, x_j^n$ — координаты еще одной точки m_j и $r_{ij} = \left[\sum (x_i^k - x_j^k)^2\right]^{1/2}$ — расстояние между ними. Ясно, что величина

$$\sum_k \frac{\partial^2 U_{ij}(r_{ij})}{\partial (x_i^k)^2}$$

равна левой части неравенства (2.1). Полная силовая функция системы взаимодействующих частиц равна $U = \sum\limits_{i<j} U_{ij}$. С учетом неравенств (2.1) получим, что U — субгармоническая функция. Неустойчивость равновесия вытекает теперь из теоремы 1.

В качестве примера рассмотрим степенной закон взаимодействия $U_{ij}(r) = a_{ij} r^{\alpha}$, причем в случае притяжения $a_{ij} < 0$, а в случае отталкивания $a_{ij} > 0$. Из неравенства (2.1) получим

$$a_{ij}\, \alpha (n + \alpha - 2) \geqslant 0 \tag{2.2}$$

Если точки притягиваются (отталкиваются), то при $\alpha (n + \alpha - 2) \leqslant 0$ $(\alpha (n + \alpha - 2) \geqslant 0)$ равновесие неустойчиво. Когда $\alpha = 2 - n$, силовая функция гармоническая и снова получаем теорему Ирншоу. В случае линейных сил $\alpha = 2$, и поэтому равновесие упругоотталкивающихся частиц всегда неустойчиво (ср. с [1]).

В частном случае, когда $2n$ неподвижных точек расположены на n координатных прямых на равных расстояниях от точки $x = 0$ и коэффициенты a_{ij} равны между собой, критерием неустойчивости равновесия частицы, расположенной в точке $x = 0$, является неравенство (2.2).

Особенно просто выглядит условие (2.1) при $n = 1$: если силовая функция парного взаимодействия частиц на прямой выпукла вверх, то любое равновесие неустойчиво. В частности, неустойчива любая равновесная конфигурация гравитирующих точек на прямой. Наоборот, в случае отталкивания возможны устойчивые равновесные конфигурации. Простейшим примером является равновесие заряда, находящегося между неподвижными зарядами одноименного знака.

3. Рассмотрим теперь более сложный случай, когда в положении равновесия часть частиц расположена на замкнутой гладкой регулярной гиперповерхности Σ. При анализе устойчивости будем считать, что эти частицы при движении не покидают Σ (т. е. связи неосвобождающиеся). Динамика такой системы частиц снова описывается уравнениями Лагранжа (1.1), однако метрика T уже не будет плоской. Пусть U_{ij} снова обозначают силовые функции парного взаимодействия, зависящие лишь от взаимных расстояний взаимодействующих частиц.

Если в положении равновесия не все частицы лежат на поверхности Σ, то можно рассмотреть новую механическую систему с меньшим числом степеней свободы, зафиксировав положения частиц, расположенных на Σ. Пусть U' — силовая функция новой системы. Ясно, что конфигурация частиц в исходной системе является равновесием частично «замороженной» системы.

Теорема 3. Предположим, что в положении равновесия не все частицы расположены на Σ, выполнены неравенства (2.1) и $U' = U_2' + U_3' + \ldots$, $U_2' \not\equiv 0$, Тогда равновесие неустойчиво.

Доказательство. Положим $U = U_2 + U_3 + \ldots$. Ясно, что форма U_2' является ограничением формы U_2 на конфигурационное пространство замороженной системы. Так как $U_2' \not\equiv 0$, то согласно п. 2 форма U_2' не имеет максимума в положении равновесия. Следовательно, тем же свойством обладает и квадратичная форма U_2. Неустойчивость равновесия вытекает теперь из теоремы Ляпунова [5] (п. 25).

Если в положении равновесия не все частицы лежат на Σ и выполнены неравенства (2.1), то силовая функция U не имеет локального максимума. Однако вопрос о неустойчивости в этом случае упирается в нерешенную задачу об обращении теоремы Лагранжа — Дирихле.

Следствие 2 (теорема Кельвина [1]). Предположим, что система упругоотталкивающихся частиц, заключенных в ограниченном объеме V, находится в равновесии и не все частицы лежат на границе $\partial V = \Sigma$. Тогда равновесие неустойчиво.

Действительно, в этом случае $U' \equiv U_2'$, и согласно п. 2, в случае упругого отталкивания форма U_2' — субгармоническая функция.

Если все взаимодействующие частицы лежат на поверхности Σ, то для выяснения условий устойчивости следует воспользоваться теоремой 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Раус Э. Дж.* Динамика системы твердых тел. Т. 1. М.: Наука. 1983. 463 с.
2. *Хейман У.*, *Кеннеди П.* Субгармонические функции. М.: Мир. 1980. 304 с.
3. *Козлов В. В.* Асимптотические движения и проблема обращения теоремы Лагранжа — Дирихле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 928—937.
4. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М.: Наука. 1966. 624 с.
5. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.I.1988