ТРУДЫ СЕМИНАРА ПО ВЕКТОРНОМУ И ТЕНЗОРНОМУ АНАЛИЗУ
Вып. XXIII

Д.В.Зенков, В.В.Козлов

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПУАНСО В ДИНАМИКЕ МНОГОМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассмотрим вращение по инерции n - мерного твердого тела с неподвижной точкой. Эта задача была впервые предложена в работе В.И.Арнольда [I]. Динамика n - мерного тела описывается известной системой уравнений Эйлера - Пуанкаре на алгебре $SO(n)$ (см. [I, 2]).

Движение твердого тела изображается кривой $t \mapsto g(t) \subset SO(n)$. Обычным образом введем угловую скорость в теле $\Omega = g^{-1}\dot{g}$ и в пространстве $\omega = \dot{g} g^{-1}$. Кососимметрические матрицы Ω и ω являются элементами алгебры $\mathcal{G} = SO(n)$. Будем различать пространства $\mathcal{G}_c = \{\Omega\}$ и $\mathcal{G}_s = \{\omega\}$. В $SO(n)$ имеется стандартное скалярное произведение

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} tr \left(X Y^T \right). \tag{I}$$

Хорошо известно, что кинетический момент твердого тела линейно зависит от угловой скорости и лежит в коалгебре $SO^*(n)$. Наличие скалярного произведения (I) позволяет считать кинетический момент элементом алгебры $SO(n)$. Оператор I, переводящий угловую скорость $\Omega \in \mathcal{G}_c$ в кинетический момент $M \in \mathcal{G}_c$, называется оператором инерции: $M = I\,\Omega$. Оператор I выражается через тензор масс A тела: $I\,\Omega = A\Omega + \Omega A$. В главных осях инерции $A = diag(A_1, \ldots, A_n)$, и в координатной записи получим

$$M_{ij} = (A_i + A_j)\,\Omega_{ij}, \quad i < j. \tag{2}$$

Оператор инерции I считается положительно определенным. Это эквивалентно условиям $A_i + A_j > 0$, $i < j$.

Введем в рассмотрение еще кинетический момент тела в пространстве: это вектор m из $\mathcal{G}_s$. Векторы ω и m связаны с векторами Ω и M соотношениями

$$\omega = g\,\Omega\, g^{-1}, \quad m = g M g^{-1}. \tag{3}$$

Хорошо известно (см. [I]), что во время движения сохраняются кинетический момент m и кинетическая энергия

$$T=\frac{1}{2}\langle M,\Omega\rangle=\frac{1}{2}\langle I\,\Omega,\Omega\rangle. \qquad (4)$$

Эллипсоидом инерции будем называть множество

$$V=\{X\in \mathcal{G}_c \mid \langle IX, X\rangle=1\}. \qquad (5)$$

В главных осях инерции, согласно (2),

$$\langle IX, X\rangle=\sum_{i<j}(A_i+A_j)X_{ij}^2,$$

где $\|X_{ij}\|=X$. Отсюда вытекает, в частности, что полуоси эллипсоида инерции равны $1/\sqrt{A_i+A_j},\ i<j$.

В соответствии с формулами (3) введем эллипсоид инерции в неподвижном пространстве V :

$$v=gVg^{-1}\subset \mathcal{G}_s. \qquad (6)$$

Эллипсоид V неподвижен в $\mathcal{G}_s$, а эллипсоид v движется в $\mathcal{G}_s$ как твердое тело. Последнее вытекает из равенства

$$\langle x_1,x_2\rangle=\langle gX_1g^{-1}, gX_2g^{-1}\rangle=\langle X_1,X_2\rangle. \qquad (7)$$

<u>Теорема Пуансо</u>. Эллипсоид инерции v катится без проскальзывания по неподвижной гиперплоскости $\pi\subset \mathcal{G}_s$, ортогональной в метрике $\langle\,,\,\rangle$ кинетическому моменту m.

Доказательство. Рассмотрим гиперплоскость π в $\mathcal{G}_s$, ортогональную m и касающуюся выпуклого множества v. Таких гиперплоскостей на самом деле две. Из (4) и (5) следует, что вектор $\Omega/\sqrt{2T}$ принадлежит эллипсоиду V. Следовательно, согласно (5) и (6), вектор $\omega/\sqrt{2T}$ принадлежит эллипсоиду v. Покажем, что этот вектор принадлежит π. Для этого вычислим нормаль к эллипсоиду V в точке $\Omega/\sqrt{2T}$; она равна $\operatorname{grad}\langle IX,X\rangle|_{\Omega/\sqrt{2T}}=2I\Omega/\sqrt{2T}=2M/\sqrt{2T}$.

Следовательно, нормаль к подвижному эллипсоиду v в точке $\omega/\sqrt{2T}$ также параллельна m. Что и требовалось. Вычислим теперь скалярное произведение $\langle\omega/\sqrt{2T}, m\rangle$. Используя (7), получим

$$\left\langle\frac{\omega}{\sqrt{2T}}, m\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2T}}\langle\Omega, M\rangle=\sqrt{2T}.$$

Значит, расстояние от начала координат $\mathcal{G}_s$ до гиперплоскости

π не меняется. Поэтому π неподвижна. Вычислим скорость фиксированной точки X эллипсоида:

$$\dot{x} = (gXg^{-1})^{\cdot} = \dot{g}g^{-1}(gXg^{-1}) + (gXg^{-1})g(g^{-1})^{\cdot},$$

так как $gg^{-1} = E$, то $\dot{g}g + g(g^{-1})^{\cdot} = 0$. Следовательно,

$$\dot{x} = \dot{g}g^{-1}(gXg^{-1}) - (gXg^{-1})\dot{g}g^{-1} = \omega x - x\omega = [\omega, x]. \quad (8)$$

В точке касания эллипсоида V и гиперплоскости π имеем $x = \omega/\sqrt{2T}$. Следовательно, с учетом (8), скорость точки касания равна нулю. Теорема доказана.

В случае $n = 3$ имеется каноническое отождествление алгебры $\mathfrak{g}_s$ с исходным пространством, в котором происходит движение твердого тела. При этом эллипсоид V неизменно связан с вращающимся твердым телом, и мы получаем классическое геометрическое представление Пуансо в задаче Эйлера [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И. Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твердого тела и идеальной жидкости. УМН.1969. Т.24, № 3. С.225-226.
2. Poincare H. Sur une forme nouvelle des equations de la mechanique // C.R. Acad. sci. Paris. 1901. V. 132.P.369-37
3. Poinsot L. Theorie nouvelle de la rotation des corps // J. math. pures et appl. 1834. V. 16. P. 9 - 130.

ТРУДЫ СЕМИНАРА ПО ВЕКТОРНОМУ И ТЕНЗОРНОМУ АНАЛИЗУ

С ИХ ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ГЕОМЕТРИИ, МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ. Вып. XXIII

Зав. редакцией С.И.Зеленский

Редактор Ф.И.Горобец

Н/К

Подписано в печать 15.05.88. Л-36657. Формат 60х90/16.
Бумага офс. № 2. Офсетная печать. Усл.печ.л. 12,75.
Уч.-изд.л. 11,87. Тираж 1000 экз. Заказ №1386 Изд. № 610
Цена 70 коп. Заказное.

Ордена "Знак Почета" издательство Московского университета.
103009, Москва, ул.Герцена, 5/7.
Типография ордена "Знак Почета" изд-ва МГУ.
119899, Москва, Ленинские горы