

Козлов В В (Москва) Конструктивный метод обоснования теории систем с неударяющими связями	883
Иванов А П (Москва) Конструктивная модель удара с трением	895
Атажанов Б, Красинская Э М (Ташкент) О стабилизации стационарных движений неголономных механических систем	902
Рубановский В Н (Москва) Об относительных равновесиях спутника-гиростата, их ветвлении и устойчивости	909
Кузьмица Л К (Казань) О приемлемости упрощенных уравнений в динамике гироскопических систем	915
Брусил В А, Максимов Ю М (Горький) Непрерывное модальное управление линейными многосвязными объектами	922
Осипов С Н, Формальский А М (Москва) Задача о быстрейшем повороте манипулятора	929
Борисов В Ф, Зеликин М И (Москва) Режимы с учащающимися переключениями в задаче управления роботом	939
Бердичевский В Л (Москва) Связь термодинамической энтропии и вероятности	947
Чернышенко С И (Москва) Асимптотика стационарного отрывного обтекания тела при больших числах Рейнольдса	958
Хабиров С В (Уфа) Нестационарное инвариантное решение уравнений газовой динамики, описывающее растекание газа до вакуума	967
Головин А М, Роговой А Ф (Москва) Влияние сферически симметричного массового потока с поверхности частицы на силу взаимодействия с плоской поверхностью	976
Берман В С, Полянин А Д (Москва) Массообмен пузырькающего пузыря	982
Корнев К Г, Чугунов В А (Казань) Определение равновесной формы тел образовавшихся при застывании фильтрационного потока	991
Салдров Ю И (Воронеж) Многомодовые бифуркации упругих равновесий	997
Куликовский А Г, Свешникова Е И (Москва) О распаде произвольного начального разрыва в упругой среде	1007
Копец А С (Львов) Построение разрывных решений уравнения плоской теории упругости методом обобщенных функций	1013
Новиков В В (Горький) О неустойчивости упругих оболочек как проявления внутреннего резонанса	1022
Петров Н Н (Ижевск) Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями	1030
Кузьминых В А (Москва) Об интегрируемом случае возмущенного кеплеровского движения	1033
Бурова А (Москва) О применении расширения поля действительных чисел для отыскания вполне интегрируемых гамильтоновых систем	1036
Корнеев В А (Москва) Оптимальный синтез в задаче импульсной коррекции движения	1038
Ционский А Я (Ростов н/Д) Устойчивость цилиндрической оболочки в стратифицированном потоке	1042
Гетман И П, Лисицкий О Н (Ростов н/Д) Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуплоскостей	1044
Алфавитный указатель	1049

УДК 531. 01

КОНСТРУКТИВНЫЙ МЕТОД ОБОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ СИСТЕМ С НЕУДАЕРЖИВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

Козлов В В.

Формально аксиоматический подход к обоснованию теории систем со связями имеет очевидные недостатки остается невыясненным происхождение исходных аксиом (например, принципа освобождаемости связей и условия их идеальности) Предлагается конструктивный метод обоснования основных принципов динамики систем с односторонними связями (в том числе и систем с ударами) Идея метода связана с анализом физических способов реализации связей (жесткие системы, анизотропная вязкость, присоединенные массы) Такой подход позволяет просто записать уравнения движения, пригодные на всем интервале времени и более точно учитывающие реальную динамику Этим методом решен ряд задач механики виброударных систем В частности, найдены условия устойчивости периодических режимов колебания и исследована эволюция движений с неупругими ударами в случае близости коэффициента восстановления к единице Установлена полная интегрируемость и дан качественный анализ задачи о параболическом бильярде в однородном силовом поле

1. Системы с двусторонними связями. Пусть $T(x, \dot{x})$ — кинетическая, а $V(x)$ — потенциальная энергия голономной системы с n степенями свободы Ее динамика описывается уравнениями Лагранжа с лагранжианом $L = T - V$, который считается гладкой функцией от x и \dot{x} . Пусть $f(x)$ — гладкая регулярная функция ($df \neq 0$ в точках, где $f = 0$). Если принять уравнение $f(x) = 0$ в качестве уравнения связи, наложенной на систему, то движения такой «несвободной» голономной системы с $n - 1$ степенями свободы задаются уравнениями Лагранжа с множителем λ

$$(1.1) \quad (L_x)' - L_{\dot{x}}' = \lambda f_x', \quad f(x) = 0$$

Уравнения (1.1) обычно получают при помощи принципа Даламбера — Лагранжа В формально аксиоматической схеме обоснования динамики принцип Даламбера — Лагранжа выводится из принципа освобождаемости связей и аксиомы об их идеальности С физической точки зрения более перспективен конструктивный метод обоснования динамики систем со связями, основанный на анализе различных способов реализации связей (жесткие системы, анизотропная вязкость, присоединенные массы).

Для иллюстрации возможностей этого метода рассмотрим динамику «свободной» голономной системы с n степенями свободы, у которой кинетическая энергия $T_N = T + \alpha(f)^2/2$, потенциальная энергия $V_N = V + \beta f^2/2$ и на которую действуют дополнительные силы вязкого трения с диссипативной функцией Рэлея $F_N = \gamma(f)^2/2$ Коэффициенты α , β и γ удовлетворяют условиям,

$$(1.2) \quad \alpha = \alpha_0(N + o(N)), \quad \beta = \beta_0(N + o(N)), \quad \gamma = \gamma_0(N + o(N)),$$

где α_0 , β_0 , γ_0 — неотрицательные вещественные числа, N — положительный параметр, который затем будет устремлен к $+\infty$. Смысл добавочного слагаемого в выражении для кинетической энергии T_N состоит во введении анизотропии в распределение массы (как, например, присоединенные массы и моменты инерции в задаче о движении твердого тела в жидкости).

Адрес редакции:

117526 Москва, В 526, просп. Вернадского, 101 Тел 434-21-49

Зав редакцией А А Дудина

Дополнительный потенциал $\beta f^2/2$ создает поле сил, направленных к поверхности $f = 0$. Отметим еще, что диссипативные силы не совершают работы лишь на движениях, происходящих по поверхности $f = 0$.

Запишем уравнения движения

$$(1.3) \quad \left(\frac{\partial L_N}{\partial \dot{x}} \right)' - \frac{\partial L_N}{\partial x} = - \frac{\partial F_N}{\partial x}, \quad L_N = T_N - V_N$$

и рассмотрим их решения с начальными условиями $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_0'$, удовлетворяющими соотношениям

$$(1.4) \quad f(x_0) = 0, \quad f_x'(x_0) x_0' = 0$$

Теорема 1. Предположим, что решение уравнений (1.1) с начальными данными x_0, x_0' определено в открытом промежутке времени, содержащем интервал $[0, T]$, и среди коэффициентов α_0, β_0 и γ_0 в (1.2) не все равны нулю. Тогда решения уравнений (1.3) с теми же начальными данными при достаточно больших значениях N определены в интервале $0 \leq t \leq T$ и при $N \rightarrow \infty$ стремятся к решениям системы (1.1).

Если $\alpha_0 > 0$, то теорему 1 можно доказать методом работы [1]. В частном случае, когда $\gamma_0 = 0$, теорема 1 вытекает из результатов этой работы. Пусть $\alpha_0 = 0$, а $\beta_0 > 0$. Тогда система (1.3) сингулярно возмущенная, и доказательство теоремы 1 основывается на применении известной теоремы Тихонова — Градштейна. Заметим, что при $\gamma_0 = 0$ этот результат вытекает из более общего результата о реализации неголомомных связей при помощи анизотропного трения, восходящего к Каратеодори (см. [2, 3], а также [4], дополнение). В случае, когда $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, а $\gamma_0 > 0$, теорема 1 высказана Курантом и доказана в [5].

2. Система с односторонними связями. Применим идеи, высказанные в п. 1, к задаче о реализации освобождающейся связи $f(x) \geq 0$. Снова рассмотрим решение уравнений (1.1) с начальными данными x_0, x_0' , удовлетворяющими (1.4), и пусть $\lambda(t)$ — значения множителя λ вдоль этого решения. Рассмотрим теперь движение $x(t)$ с освобождающейся связью $f(x) \geq 0$ и прежними начальными данными. Известно, что если $\lambda(t) < 0$ для всех t , то точка $x(t)$ все время остается на поверхности $f(x) = 0$. Если же после некоторого момента времени τ функция $\lambda(t)$ принимает положительные значения, то в момент τ точка $x(t)$ покидает поверхность $f(x) = 0$ и при $t \geq \tau$ динамика системы описывается обычными уравнениями Лагранжа с лагранжианом $L = T - V$ [6] (отметим, что случай $\tau = 0$ не исключается).

Для того чтобы путем предельного перехода перейти от динамики свободной системы к динамике системы с односторонней связью $f \geq 0$, рассмотрим движение в силовом поле с потенциалом

$$(2.1) \quad V_N = V + Nf^2, \quad \text{если } f < 0, \quad \text{и } V_N = V, \quad \text{если } f \geq 0$$

Кинетическая энергия T при этом остается без изменений. Движения системы задаются уравнениями Лагранжа

$$(2.2) \quad (T_x)'' - T_x' = -V_N x'$$

Обобщенная сила $-(V_N)'$ является лишь кусочно гладкой, однако можно проверить, что уравнения (2.2) удовлетворяют условиям теоремы существования и единственности решений.

Теорема 2. Пусть $x(t)$ — движение системы с односторонней связью $f(x) \geq 0$ и начальными данными (1.4), определенное в интервале $[0, T_*]$.

Предположим, что имеется не более одного $\tau \in \{0, T_*\}$, такого, что $f(x(t)) = 0$ при $0 \leq t \leq \tau$ и $f(x(t)) > 0$ при $\tau < t \leq T < T_*$. Тогда если $x_N(t)$ — решение системы (2.2) с начальными данными (1.4), то при достаточно больших N оно определено при $0 \leq t \leq T$ и стремится на этом интервале к функции $x(t)$, когда $N \rightarrow \infty$.

Это утверждение можно доказать методом работы [5].

Подчеркнем, что теорема 2 справедлива как в случае $\tau = 0$ (точка $x(t)$ сразу покидает поверхность $f = 0$), так и в случае $\tau > T_*$ (точка $x(t)$ движется по поверхности $f = 0$).

Вместо громоздкого формального доказательства теоремы 2 проиллюстрируем это утверждение примером, а также обсудим возможность реализации односторонних связей при помощи эффекта присоединенных масс и анизотропного вязкого трения. Рассмотрим движение точки единичной массы в плоскости x, y , причем в левой полуплоскости (где $x \leq 0$) на точку действует сила с компонентами $(0, -g)$, $g = \text{const} > 0$, а в правой полуплоскости (где $x > 0$) — сила с компонентами $(0, g)$. Это силовое поле потенциально, но разрывно. Если при $t = t_*$ точка попала на вертикальную прямую $x = 0$, то ее состояние в момент времени $t = t_*$ принимается за начальное для определения последующего движения в другой полуплоскости. Рассматривается движение с освобождающейся связью $y \geq 0$. Пусть при $t = 0$ точка имеет следующее начальное состояние:

$$(2.3) \quad x = -1, \quad y = 0, \quad x' = 1, \quad y' = 0$$

Тогда имеем закон ее движения

$$(2.4) \quad x(t) = t - 1; \quad y(t) = 0, \quad t \leq 1, \quad y(t) = g(t - 1)^2/2, \quad t > 1$$

В момент времени $t = 1$ точка покидает связь.

Освободим теперь систему от связи и заменим ее действие упругой силой с компонентами $(0, -Ny)$, $y \leq 0$. В верхней полуплоскости эта сила полагается равной нулю. Тогда решение новых уравнений движения с начальными данными (2.3) задается при $t \leq 1$ формулами

$$x(t) = t - 1, \quad y(t) = gN^{-1}(\cos \sqrt{N}t - 1)$$

Следовательно, при $0 \leq t \leq 1$ точка движется в узкой полосе $-2g/N \leq y \leq 0$, совершая колебания с большой частотой \sqrt{N} (фиг. 1, сплошная линия). Затем в некоторый момент времени $\tau = 1 + O(N^{-1/2})$ точка попадает на ось $y = 0$, причем $y(\tau) = O(N^{-1})$, $y'(\tau) = O(N^{-1/2})$. При $t > \tau$ точка будет двигаться по параболе в верхней полуплоскости. В пределе (когда $N \rightarrow \infty$) движение точки будет описываться как раз формулами (2.4).

Рассмотрим теперь другой механизм реализации связи: если точка попадает в нижнюю полуплоскость, то к ее кинетической энергии добавляется слагаемое $Ny^2/2$. Решая уравнения движения механической системы с начальными данными (2.3), получим

$$(2.5) \quad x(t) = t - 1; \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2(N+1)}, \quad t \leq 1 \\ y(t) = \frac{g(t^2 - 4t + 2)}{2(N+1)}, \quad 1 \leq t \leq 2 + \sqrt{2}$$

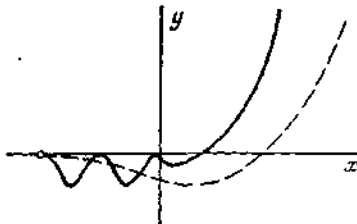
Следовательно, если $0 < t < 2 + \sqrt{2}$, то $y(t) < 0$ (фиг. 1, штриховая линия). При $t > 2 + \sqrt{2}$ точка будет двигаться по параболе в верхней полуплоскости. Заметим, что момент выхода на горизонтальную прямую $y = 0$ ($t = 2 + \sqrt{2}$) не зависит от N . При $N \rightarrow \infty$ решение (2.5) стреми-

ся к решению

$$(2.6) \quad x(t) = t - 1; \quad y(t) = 0, \quad t \leq 2 + \sqrt{2}, \quad y(t) = g(t - 2 - \sqrt{2})^2/2, \quad t > 2 + \sqrt{2}$$

которое отличается от (2.4). Запаздывание момента схода со связи объясняется дополнительной инерцией движущейся точки.

Наконец, рассмотрим еще один случай, когда на точку, находящуюся в нижней полуплоскости, действует сила вязкого трения с компонентами $(0, -Ny')$. Решая уравнения движения с начальными данными (2.3), получим, что при $0 < t < \tau$, $\tau = 2 + O(N^{-1})$ точка движется в нижней полуплоскости и выходит на горизонтальную прямую в момент времени τ . Качественно ее траектория похожа на штриховую кривую, изображенную на фиг. 1. При $t > \tau$ точка движется снова по параболе. Устремим $N \rightarrow \infty$. Тогда в



Фиг. 1

пределе получим движение

$$(2.7) \quad x(t) = t - 1; \quad y(t) = 0, \quad t \leq 2, \quad y(t) = g(t - 2)^2/2, \quad t > 2$$

которое отличается от (2.4) и от (2.5). Если же силу вязкого трения $(0, -Ny')$ положить равной нулю (тогда $y' > 0$), то при стремлении N к бесконечности получим классическое решение (2.4).

Таким образом, в случае введения поля упругих сил и последующего увеличения коэффициента жесткости до бесконечности получается классическая модель движения с односторонними связями. Введение присоединенных масс и анизотропного вязкого трения приводит к неклассическим моделям, в которых имеет место запаздывание момента схода со связей.

Нельзя утверждать, что движения (2.6) и (2.7) не имеют отношения к действительности. Они являются движениями в корректно определенных моделях систем с односторонними связями, выбор которых существенно зависит от конкретных физических способов реализации связей. Надо иметь в виду, что в действительности возможны комбинации различных эффектов, также приводящие в пределе к движениям со связями (как, например, в п. 1). При этом важную роль играют порядки вводимых дополнительных сил.

Рассмотрим, например, случай, когда в нижней полуплоскости (где $y < 0$) на точку одновременно действуют сила трения $(0, -Ny')$ и упругая сила $(0, -c^2Ny)$. Замена односторонней связи $y > 0$ линейными полями упругих и диссипативных сил с физической точки зрения означает введение в рассмотрение среды Кельвина-Фойгта. Вычисления показывают, что для движения с начальными данными (2.3) при $N \rightarrow \infty$ снова имеет место запаздывание момента схода со связи. Если же заменить силу трения диссипативной силой $(0, -k\sqrt{Ny'})$, где $k = \text{const} > 0$ и $c^2 > k^2$, то при $N \rightarrow \infty$ получим классическое решение (2.4).

Отметим, что теорема 2 справедлива и в том случае, если потенциал V_N заменить потенциалом $V_N^* = V + \exp(-Nf)$. Это замечание может оказаться полезным в аналитических исследованиях ввиду свойства бесконечной дифференцируемости функции V_N^* .

3. Движения с ударами. Пусть $x(t)$ — движение системы с неудерживающей связью $f(x) \geq 0$, причем $f(x(t)) > 0$ при $t_1 < t < t_2$. Если $f(x(t_2)) = 0$ и скорость $x'(t_2)$ не лежит в касательной плоскости к поверх-

ности $f(x) = 0$ в точке $x = x(t_2)$, то в момент времени $t = t_2$ имеет место явление удара. Продолжение движения $x(t)$ для значений $t > t_2$ возможно различными способами. Оно зависит от принимаемой гипотезы о физической природе удара (абсолютно упругий, неупругий и т. д.). Для обоснования этих гипотез, а также для выяснения границ их применимости, вместо связи $f \geq 0$ рассмотрим в области $f(x) < 0$ силовое поле с потенциалом $V_N = V + c^2 N f^2/2$, $c > 0$ и будем считать, что при движении в этой области на систему действуют силы вязкого трения с диссипативной функцией Рэлея $F_N = k\sqrt{N}(f')^2$, $k = \text{const} \geq 0$ (ср. с п. 1).

Будем считать, что в момент времени $t = 0$ система находится в положении $x = (x_1, \dots, x_n) = 0$ и имеет скорость $x' = (v_1, \dots, v_n)$, причем

$$(3.1) \quad \sum \partial f / \partial x_i |_{x=0} v_i < 0$$

При $t > 0$ точка $x(t)$ попадает в область $f < 0$ и на систему будут действовать дополнительные потенциальные и диссипативные силы. Оказывается, если N велико, то через малый промежуток времени (порядка $1/\sqrt{N}$) точка $x(t)$ выйдет на границу $f = 0$ в точке, близкой к точке $x = 0$, касательные составляющие скорости в момент входа и выхода в область $f(x) < 0$ практически не изменяются, а нормальная составляющая скорости (в метрике, задаваемой кинетической энергией) в момент выхода может быть выражена через нормальную составляющую в момент входа и коэффициенты k и c . При $N \rightarrow \infty$ получим законы неупругого удара (при $k \rightarrow 0$ они перейдут в законы упругого отражения).

Для реализации этой идеи удобно перейти к некоторым специальным координатам x_1, \dots, x_n в окрестности точки $x = 0$, в которых $f(x) \equiv x_1$, а кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{1}{2} g_{11} x_1'^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^n g_{ij}(x) x_i' x_j'$$

Такие координаты существуют всегда (в римановой геометрии они называются полугеодезическими [7]). В этих координатах касательная составляющая скорости x' определяется компонентами x_2', \dots, x_n' , а нормальная — производной x_1' . Соотношение (3.1) приобретает более простой вид: $x_1'(0) < 0$.

Теорема 3. Предположим, что $k^2 < c^2 g_{11}(0)$. Тогда найдется момент времени

$$\delta_N = \pi g_{11}(0) / (\omega \sqrt{N}) + o(N^{-1/2}), \quad \omega = \sqrt{c^2 g_{11}(0) - k^2} > 0$$

такой, что $x_1(\delta_N) = 0$, $x_i(\delta_N) = O(N^{-1/2})$ ($i > 1$) и выполнены следующие предельные соотношения:

$$(3.2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} x_1'(\delta_N) = -e x_1'(0), \quad e = \exp(-\pi k / \omega)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_i'(\delta_N) = x_i'(0), \quad i > 1$$

Число $e < 1$ в теории стереомеханического удара называется коэффициентом восстановления [8]. Если $k = 0$ (диссипация отсутствует), то (3.2) дают соотношения теории абсолютно упругого удара. Ниже приводится схема доказательства теоремы 3.

Запишем уравнения движения, справедливые при тех значениях $t > 0$,

пока $x_i(t) \leq 0$

$$(3.3) \quad \begin{aligned} x_1' + \sum \Gamma_{jk}^1 x_j' x_k' &= -g^{11} \partial V / \partial x_1 - 2k \sqrt{N} g^{11} x_1' - c^2 N g^{11} x_1 \\ x_i' + \sum \Gamma_{jk}^i x_j' x_k' &= -\sum g^{is} \partial V / \partial x_s \quad (i > 1) \end{aligned}$$

Здесь Γ_{jk}^i — символы Кристоффеля метрики g_{ij} , g^{is} — элементы матрицы, обратной к $\|g_{ij}\|$. В уравнениях (3.3) перейдем к новому времени $\tau = \sqrt{N}t$ обозначая штрихом дифференцирование по τ

$$(3.4) \quad \begin{aligned} x_1 + 2k^{11} x_1' + c^2 g^{11} x_1 + \sum \Gamma_{jk}^1 x_j' x_k' &= -e^2 g^{11} \partial V / \partial x_1 \\ x_i + \sum \Gamma_{jk}^i x_j' x_k' &= -e^2 \sum g^{is} \partial V / \partial x_s \quad (i > 1), \quad \varepsilon = N^{-1/2} \end{aligned}$$

Считая ε малым параметром, будем искать решения системы (3.4) в виде

$$(3.5) \quad x_i(\tau) = \varepsilon \xi_i(\tau) + o(\varepsilon) \quad i = 1, \quad n$$

Коэффициенты ξ_i удовлетворяют уравнениям

$$\xi_1' + 2kG\xi_1 + c^2 G\xi_1 = 0, \quad \xi_i' = 0 \quad (i > 1), \quad G = g^{11}(0) > 0$$

Они имеют следующие частные решения

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= x_1'(0) \exp(-kG\tau) \omega^{-1} \sin \omega \tau \\ \omega &= \sqrt{c^2 G - k^2 G^2}, \quad \xi_i = x_i(0) \tau \quad (i > 1) \end{aligned}$$

Так как параметр ε регулярно входит в правые части системы (3.4), то можно применить теорему Пуанкаре [9] согласно которой при малых значениях параметра ε на каждом конечном интервале нового времени τ существуют решения системы (3.4) вида (3.5). Согласно (3.6), функция $x_1(\tau)$ заведомо имеет нуль в интервале $(0, 2\pi)$. Возвращаясь к старому времени t , получим

$$x_1(t) = x_1'(0) \exp(-kG \sqrt{N}t) (\omega \sqrt{N})^{-1} \sin \omega \sqrt{N}t + o(N^{-1/2})$$

$$x_i(t) = x_i(0) t + o(N^{-1/2})$$

Из этих формул вытекают предельные соотношения (3.2)

Теорема 3 расширяет границы применимости теоремы 2 о предельном переходе. Пусть $x(t)$ — движение системы с односторонней связью $f(x) \geq 0$, начинающееся на границе $f(x) = 0$. Предположим, что в интервале $0 \leq t \leq T$ имеется конечное число моментов удара о связь τ_1, \dots, τ_r , причем скорости до ударов $x'(\tau_i - 0)$ трансверсальны касательным плоскостям к поверхности $f(x) = 0$ в точках $x(\tau_i)$. Теорема 2 утверждает, что движение свободной системы в поле с потенциалом V_N с теми же начальными данными при $N \rightarrow \infty$ в интервале $0 \leq t \leq \tau_1$ стремится к движению $x(t)$. Теорема 3 (в частном случае, когда $k = 0$) позволяет доказать этот предельный переход на всем интервале $0 \leq t \leq T$. Отметим еще, что при $k = 0$ теорема 3 справедлива и для потенциала $V_N^* = V + \exp(-Nf)$ (ср. с п. 2)

В качестве иллюстративного примера рассмотрим движение точки по инерции внутри окружности радиуса R в предположении, что коэффициент восстановления ε при ударах постояен и мало отличается от единицы. Так как касательная составляющая скорости не меняется, то имеет место интеграл площадей. Следовательно в моменты ударов $v \cos \alpha = u = \text{const}$, где v — величина скорости точки, α — угол между вектором скорости и касательной к окружности.

Иследуем эволюцию скорости v как функции времени. Для этого (согласно теореме 3) вместо односторонней связи введем поле упругих сил и диссипативные силы с коэффициентом трения $2k\sqrt{N}$, k — мало. При $k = 0$ будем иметь невозмущенную

интегрируемую задачу. Ес фазовое пространство расслоено на инвариантные торы с условно периодическими движениями. Усредняя возмущенные уравнения по этим торам и переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$ можно получить эволюционное уравнение для скорости

$$v = (e - 1)(2R)^{-1} v \sqrt{v^2 - u^2}$$

Интегрируя его получаем

$$v = u \cos [u(e - 1)(2R)^{-1} t + \alpha_0]$$

где α_0 — значение угла α в момент времени $t = 0$. Следовательно в силу усредненной системы при $t > 2R/[u(1 - e)]$ точка будет скользить по окружности радиуса R со скоростью u .

4 Устойчивость периодических колебаний с ударами. Продемонстрируем эффективность предложенного метода в теории систем с односторонними связями на примере исследования устойчивости периодических режимов колебаний с ударами. С этой целью рассмотрим движение материальной точки массы m в вертикальной плоскости с декартовыми координатами x, y (ось y направлена вверх) не ниже кривой $y = f(x)$, где f — гладкая функция такая, что $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) > 0$. Эта задача допускает семейство периодических движений, при которых точка m остается все время на оси y . В качестве параметра можно взять скорость точки v в момент удара о кривую. В работе [10] указан критерий эллиптичности этого решения (g — ускорение свободного падения)

$$(4.1) \quad f''(0) < gv^2$$

Заменяем одностороннюю связь $y \geq f(x)$ полем упругих сил с потенциалом

$$V_N = mgy, \quad y > f(x), \quad V_N = mgy + mN(y - f(x))^2/2, \quad y < f(x)$$

Задача о движении точки m в поле с потенциалом V_N имеет семейство периодических решений периода T

$$(4.2) \quad \begin{aligned} x_0(t) &\equiv 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ y_0(t) &= gN^{-1}(\cos \sqrt{N}t - 1) - vN^{-1/2} \sin \sqrt{N}t, \quad 0 \leq t < \tau \\ y_0(t) &= vt - gt^2/2, \quad \tau \leq t \leq \tau + 2vg^{-1} \\ \tau &= 2N^{-1/2} \arctg(-gv^{-1}N^{1/2}), \quad T = \tau + 2vg^{-1} \end{aligned}$$

где $v > 0$ — величина скорости точки m в положении $x = y = 0$. Уравнение для x -координаты m имеет вид

$$x'' = 0, \quad y > f, \quad x'' = Nf'(x)(y - f), \quad y < f$$

Запишем уравнение в вариациях для периодического решения (4.2):

$$(4.3) \quad \begin{aligned} (\delta x)'' + p(t) \delta x &= 0, \quad p(t) = -Nf''(0) y_0(t), \quad 0 \leq t \leq \tau, \\ p(t) &= 0, \quad \tau \leq t \leq T \end{aligned}$$

Так как $p(t) \geq 0$, то для выяснения условий устойчивости нулевого решения уравнения (4.3) можно воспользоваться интегральным признаком Ляпунова [11]

$$(4.4) \quad T \int_0^T p(t) dt \leq 4$$

Вычисления дают достаточное условие устойчивости

$$gf''(0) [g^{-1}v + N^{-1/2} \arctg(-gv^{-1}N^{1/2})]^2 \leq 1,$$

При больших значениях N его можно представить в более простой

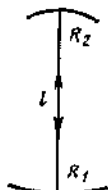
форме

$$(4.5) \quad f''(0) \leq gv^{-2} - \pi g^2 v^{-3} N^{-1/2} + o(N^{-1/2})$$

В пределе при $N \rightarrow \infty$ получим известное условие (4.1). Неравенство (4.5) показывает, что замена односторонней связи полем упругих сил с большой жесткостью (что более соответствует действительности) может привести к неустойчивости вертикальных колебаний точки.

Интересно отметить, что при $N \rightarrow \infty$ достаточное условие устойчивости (4.5) переходит в критерий устойчивости в линейном приближении (4.1). Это наблюдение приводит к результату Жуковского о невозможности увеличения постоянной в правой части неравенства Ляпунова (4.4) [12].

Рассмотрим еще похожую задачу об устойчивости двумерной периодической траектории бильярда Биркгофа (фиг. 2) — точка движется по отрезку длины l , периоди-



Фиг. 2

чески упруго отражаясь от кривой. Обозначим R_1 и R_2 — радиусы кривизны этой кривой в граничных точках отрезка, пусть $R_1 \leq R_2$. Снова введем поле упругих сил, получим уравнение в вариациях, аналогичное уравнению (4.3)

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \xi + p(t)\xi &= 0 \\ p(t) &= vR_1^{-1} \sqrt{N} \sin \sqrt{N}t, \quad 0 \leq t \leq \pi N^{-1/2} \\ p(t) &= vR_2^{-1} \sqrt{N} \sin \sqrt{N}(t + \tau), \\ \tau \leq t \leq \tau + \pi N^{-1/2}, \quad \tau &= \pi N^{-1/2} + lv^{-1} \\ p(t) &= 0, \quad \pi N^{-1/2} \leq t \leq \tau, \quad \tau + \pi N^{-1/2} \leq t \leq \tau + \pi N^{-1/2} + lv^{-1} \end{aligned}$$

Здесь v — постоянная скорость движения точки внутри бильярда Биркгофа, значения функции $p(t)$ указаны на ее периоде. Применяя интегральный признак Ляпунова (4.4) и переходя затем к пределу при $N \rightarrow \infty$, получаем достаточное условие устойчивости (в первом приближении) двумерной траектории

$$(4.7) \quad l \leq R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$$

Это условие в общем случае не является необходимым. Критерий устойчивости двумерной периодической траектории имеет вид (например, [13])

$$(4.8) \quad l < R_1 \quad \text{или} \quad R_2 < l < R_1 + R_2$$

Условие (4.8) переходит в (4.7), если $R_2 \rightarrow \infty$. В этом случае функция $p(t)$ в уравнении (4.6) имеет лишь один малый интервал положительности (как в уравнении (4.3)).

Условия (4.8) можно получить при помощи общего метода Ляпунова исследования устойчивости нулевого решения уравнения второго порядка (4.6) [11]. Критерием устойчивости является неравенство $|a| < 2$ для константы Ляпунова

$$a = 2 - I_1 + I_2 - I_3 + \dots, \quad I_1 = T \int_0^T p(t) dt_1$$

$$I_k = \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k (T - t_1 + t_k)(t_1 - t_2) \dots (t_{k-1} - t_k) p(t_1) \dots p(t_k)$$

Предположим сначала, что $p(t) = R_1^{-1} \sqrt{N} \sin \sqrt{N}t$, $0 \leq t \leq \pi N^{-1/2}$, а при $\pi N^{-1/2} \leq t \leq T$ функция $p(t)$ равна нулю (величину скорости v без ущерба общности можно считать равной единице). Ясно, что $I_1 = 2TR_1^{-1}$, а для остальных интегралов

справедлива оценка

$$|I_k| \leq c (V^{-1/2})^{k-1}, \quad k \geq 2, \quad c = \text{const} > 0$$

поскольку интегрирование ведется лишь по малой области в пространстве переменных t_1, \dots, t_k и разности $t_i - t_j$ имеют порядок $N^{-1/2}$. При $N \rightarrow \infty$ период $T \rightarrow 2l$ и неравенство $|a| \leq 2$ перендет в неравенство $l \leq R_1$ (отвечающее случаю $R_2 = \infty$ в (4.8)).

Рассмотрим теперь общий случай уравнения (4.6). Можно проверить, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_1 = 4l(R_1^{-1} + R_2^{-1}), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} I_2 = 4R_1^{-1} R_2^{-1} l^2$$

а интегралы I_k , $k \geq 3$ допускают оценку $|I_k| \leq c(N^{-1/2})^{k-2}$, $c > 0$. Поэтому при $N \rightarrow \infty$ неравенство $|a| < 2$ примет вид

$$|1 - 2l(R_1^{-1} + R_2^{-1}) + 2R_1^{-1}R_2^{-1}l^2| < 1$$

Оно, очевидно, эквивалентно (4.8).

Тем же способом можно получить условие устойчивости периодического движения точки между вогнутыми стенками в поле силы тяжести (фиг. 2). Пусть v_1 (v_2) — скорость точки в нижнем (наивысшем) положении. Поскольку рассматривается движение с ударами, то предполагается, что $v_2^2 = v_1^2 - 2gl \geq 0$. Условие устойчивости в линейном приближении имеет вид

$$(4.9) \quad \left| 1 - \frac{2(v_1 - v_2)}{g} \left(\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} \right) + \frac{2(v_1 - v_2)^2}{g^2} \frac{v_1 v_2}{R_1 R_2} \right| < 1$$

Если $v_2 = 0$ то это условие эквивалентно (4.1). Устремим теперь g к нулю. В пределе будем иметь движущие точки по инерции между двумя неподвижными стенками. В этом случае $v_1 \rightarrow v$ ($v = 1/2$) и $v_1 - v_2 = gl/v + o(g)$. Переходя в неравенстве (4.9) к пределу при $g \rightarrow 0$, получим известное условие устойчивости (4.8).

Отметим в заключение, что коэффициент $p(t)$ в уравнении (4.6) тесно связан с δ -функцией Дирака. Действительно, для любой непрерывной функции $f(x)$ имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \int_0^{\pi/\lambda} f(x) \sin(\lambda x) dx = 2f(0)$$

Таким образом, при $N \rightarrow \infty$ справедливо формальное соотношение

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2v \left[R_1^{-1} \delta\left(\frac{nl}{v} - t\right) + R_2^{-1} \delta\left(\frac{nl}{v} - t + l\right) \right]$$

Если подставить в выражение для интегралов I_k это формальное соотношение и воспользоваться неравенством для постоянной Ляпунова $|a| < 2$, то получим условие устойчивости (4.8).

5. Параболический бильярд. В работе [10] при помощи КАМ-теории исследовалась нелинейная устойчивость периодических подскоков точки в поле силы тяжести над кривой $y = f(x)$. В частности, показано, что в случае параболы ($f(x) = x^2/2a$, $a > 0$) эти решения орбитально устойчивы по Ляпунову при выполнении условия (4.1). Оказывается, этот результат просто вытекает из более сильного утверждения об интегрируемости задачи о параболическом бильярде.

Для доказательства рассмотрим задачу о скольжении тяжелой материальной точки по гладкой параболе

$$(5.1) \quad 2y + b = x^2/(a + b) + x^2/b; \quad a, b > 0$$

Как заметил Пензлеве, эта система с двумя степенями свободы имеет дополнительный первый интеграл. Интегрирование уравнений движения точки сведено Чаплыгиным к обращению абелевых интегралов [14]. Чаплыгин вводит параболические координаты v, w ($w \geq a \geq v \geq 0$) по формулам

$$(5.2) \quad ax^2 = (a + b)(a - v)(w - a), \quad 2y = v + w - (b + a), \quad a^2 = bvw$$

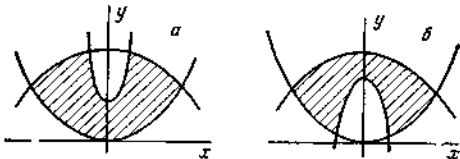
и получает уравнения для изменения v, w

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \dot{v} &= \frac{4}{m(w-v)} \left[\frac{(\alpha v^2 - \beta v - \gamma)(a-v)v}{v+b} \right]^{1/2} \\ \dot{w} &= \frac{4}{m(w-v)} \left[\frac{(-\alpha w^2 + \beta w + \gamma)(w-a)w}{w+b} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{m^2 g}{4}, \quad \beta = \frac{mh}{2} + \frac{m^2(a+b)g}{4}$$

Здесь m — масса точки, g — ускорение свободного падения, h — полная энергия точки, γ — постоянная интегрирования.]

Устремим теперь параметр b к нулю. Тогда параболоид (5.1) перейдет в область над параболой $y = x^2/(2a)$ в вертикальной плоскости $z = 0$, а движение точки по параболоиду перейдет в свободное падение до параболы с абсолютно упругими ударами. Предельный переход такого вида впервые обсуждал, по видимому, Биркгоф [15]. Заметьте, что геодезические на трехосном эллипсоиде переходят в траектории эллиптического бильярда при неограниченном уменьшении одной из его полуосей. Поскольку задача Пенлеве — Чаплыгина интегрируема при всех значениях $b > 0$, то и предельная задача о параболоческом бильярде также интегрируема. Выписывать



Фиг. 3

дополнительный интеграл не имеет большого смысла, так как соотношения (5.2) и (5.3) (в которых надо положить $b = 0$) дают закон движения точки на всей оси времени.

Формулы (5.2) и (5.3) позволяют дать почти качественный анализ движения тяжелой точки с одноосерной связью $y \geq x^2/2a$ (ср. с [14]). С этой целью рассмотрим многочлен $F(x) = \alpha x^2 - \beta x - \gamma$, который всегда имеет вещественные корни. Обозначим их x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Так как $F(x) \geq 0$, $F(w) \leq 0$, $w \geq a \geq v \geq 0$, то имеют место неравенства $x_2 \geq w \geq x_1 \geq v$.

Будем различать два случая: 1) $x_2 > a \geq x_1$, 2) $x_2 \geq x_1 \geq a$. В первом из них $x_2 \geq w \geq a$, $x_1 \geq v \geq 0$. Траектория точки m расположена в криволинейном четырехугольнике

$$(5.4) \quad x^2/a \leq 2y \leq x_1 + x^2/(a - x_1), \quad 2y \leq x_2 + x^2/(a - x_2)$$

ограниченном софокусными параболой. Он изображен на фиг. 3, а. Во втором случае выполнены неравенства $x_2 \geq w \geq x_1$, $a \geq v \geq 0$ и траектория m лежит в четырехугольнике

$$(5.5) \quad x_1 + x^2/(a - x_1) \leq 2y \leq x_2 + x^2/(a - x_2), \quad x^2/a \leq 2y$$

изображенном на фиг. 3, б. В общем случае траектория точки m заполняет эти прямоугольники всюду плотно.

Траектория вертикальных колебаний точки m отвечает случаю, когда $F(a) = 0$, поэтому $\gamma = \alpha a^2 - \beta a$. Если $2\alpha a > \beta$ (что эквивалентно (4.1)), то при малом возмущении постоянных первых интегралов h и γ получим первый случай и прямоугольник (5.4) будет близок к оси y . В этом случае периодическое движение устойчиво. Если же $F(a) = 0$ и $2\alpha a < \beta$, то $x_1 = a$ и прямоугольник (5.5) вырождается в «двуугольник»

$$(5.6) \quad x^2/a \leq 2y \leq x_2 + x^2/(a - x_2), \quad x_2 > a$$

В этом случае вертикальные периодические колебания неустойчивы. Они имеют гиперболический тип и, следовательно, обладают асимптотическими траекториями. Эти асимптотические движения на самом деле двоякоасимптотические и имеют замечательное свойство: после каждого отскока траектория точки m проходит через фокус параболы $y = x^2/(2a)$ (лежащий, разумеется, внутри области (5.6)). Более того, время между последовательными прохождениями через фокус постоянно и равно $2g^{-1}\sqrt{2hm^{-1}}$. Эта величина равна, конечно, периоду вертикальных колебаний точки m .

Если $x_1 = x_2 = a$, то точка m совершает движение по параболе

$$(5.7) \quad 2y = x_1 + x^2/(a - x_1), \quad y \geq x^2/(2a)$$

периодически отражаясь от софокусной исходной параболы $y = x^2/(2a)$. Все эти периодические решения имеют один и тот же период, равный $4\sqrt{a/g}$. В частном случае, когда $x_1 = x_2 = a$, решение (5.7) переходит в периодические вертикальные подскоки точки m на высоту $a/2$ (на расстояние до фокуса параболы). Эти колебания устойчивы.

Проведенный анализ позволяет дать полное и наглядное описание всех выходящих движений движения точки m . Пусть энергия $h = 0$. Тогда точка m занимает наименьшее устойчивое положение равновесия. Будем увеличивать значения h . При малых $h > 0$ рождаются два различных семейства ляпуновских невырожденных периодических движений: вертикальные подскоки и гладкое скольжение по параболе. Решения второго семейства существуют при всех $h > 0$ и все они устойчивы (как предельный случай решения типа 1). Решения первого семейства также существуют при всех h . Однако при $h = mga$ (когда высота подскока равна расстоянию до фокуса параболы) мультипликаторы становятся равными единице. Это — точка бифуркации. При $h > mga$ появляется еще одно семейство устойчивых периодических колебаний (5.7), а вертикальные периодические подскоки становятся неустойчивыми.

6. Гармонический осциллятор и эллиптический бильярд. Рассмотрим задачу о движении материальной точки по гладкой поверхности трехосного эллипсоида под действием упругой силы, направленной к центру (или от центра) эллипсоида. Эта задача интегрируема Якоби с использованием эллиптических координат [16]. Устремим одну из полуосей эллипсоида к нулю. Тогда задача Якоби перейдет в задачу о колебаниях гармонического осциллятора, заключенного внутри эллипса. Если коэффициент упругости равен нулю, то получим эллиптический бильярд Биркгофа. Динамику гармонического осциллятора внутри эллипса можно исследовать методом п. 5 при помощи разделяющихся переменных — эллиптических координат на плоскости.

Укажем, например, условия устойчивости периодических колебаний осциллятора, при которых точка все время находится на одной из осей симметрии эллипса. Пусть a, b — полуоси эллипса ($b \leq a$), c — коэффициент упругости, h — полная механическая энергия осциллятора. Окажется, если $c \geq 0$, то движение точки вдоль меньшей (большей) оси эллипса устойчиво тогда и только тогда, когда

$$(6.1) \quad h \geq 0 \quad (0 \leq h \leq 1/2 ca^2)$$

Если же $c < 0$, то эти условия принимают вид

$$(6.2) \quad h \geq 1/2 |c| (a^2 - b^2) \quad (-1/2 |c| a^2 \leq h \leq -1/2 |c| (a^2 - b^2))$$

Второе условие (6.2) имеет простой геометрический смысл: амплитуда периодических колебаний точки не превосходит расстояния от конца большой полуоси до ближайшего фокуса. При увеличении амплитуды это решение теряет устойчивость, становясь гиперболическим. Отметим любопытное свойство траекторий, проходящих через фокус эллипса через равные промежутки времени бесконечно много раз: точка попеременно оказывается в фокусах эллиптического бильярда. Это свойство имеет место и для траекторий, не касающихся границы бильярда.

Пусть $c < 0$. Будем деформировать эллипс так, чтобы одна из его фокусов оставалась неподвижной, а второй удалялся в бесконечность, причем $(a - \sqrt{a^2 - b^2}) \rightarrow \text{const}$. В результате эллипс превратится в параболу. Если при этом еще уменьшать величину коэффициента упругости так, чтобы $|c| a \rightarrow g$, то задача о гармоническом осцилляторе внутри эллипса перейдет в задачу о параболоческом бильярде, рассмотренную в п. 5. Можно показать, что при таком предельном переходе второе условие устойчивости (6.2) перейдет в известное условие (4.1).

Изложенные выше результаты позволяют получить условия устойчивости (в линейном приближении) колебаний плоского гармонического осциллятора, расположенного посередине между двумя выпуклыми кривыми одинаковой кривизны. Согласно п. 4, в линейном приближении устойчивость зависит лишь от кривизны этих кривых в конечных точках прямолинейной траектории, но не от их формы.

Пусть l — длина периодической траектории осциллятора, R — радиус кривизны кривых в конечных точках этой траектории. Будем рассматривать движения с ударами. Если $c > 0$, то движение устойчиво лишь при выполнении неравенства $l < 2R$ (см. (6.1)). Сравнивая этот результат с неравенствами (4.8), получаем, что наличие притягивающей упругой силы не влияет на устойчивость колебаний с ударами. Пусть теперь $c < 0$. Если $l < 2R$, то движение устойчиво, когда $4h > |c| l (R - l/2)$. Если же $l > 2R$, то условие устойчивости выражается неравенством $4h < |c| l (R - l/2)$. При выполнении равенства $l = 2R$ периодическое колебание вырождено: его мультипликаторы равны единице.

1. Козлов В. В. Реализация неинтегрируемых связей в классической механике // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 3. С. 550—554.
2. Caratheodory C. Der Schlitten // ZAMM. 1933. В. 13. Н. 2. S. 71—76.
3. Фубаев Н. А. О возможности реализации неголономной связи посредством силы вязкого трения // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 513—515.
4. Карпетан А. В., Румянцев В. В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНТИ, 1983. Т. 6. С. 3—128.
5. Rubin H., Ungar P. Motion under a strong constraining force. // Commun. Pure and Appl. Math. 1957. V. 10. N 1. P. 65—87.
6. Анпель П. Теоретическая механика. Т. 1, 2. М.: Физматгиз, 1960. 515 с.; 487 с.
7. Раисовский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.
8. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Стройиздат, 1965. 448 с.
9. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики // Избр. труды. Т. 1. М.: Наука, 1971. 771 с.
10. Иванов А. П., Маркеев А. П. О динамике систем с односторонними связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 632—636.
11. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.—Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
12. Жуковский Н. Е. Условия конечности интегралов уравнения $d^2y/dx^2 + py = 0$ // Мат. сб. 1892. Т. 16. Вып. 3. С. 582—591.
13. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
14. Чаплыгин С. А. О параболическом маятнике // Полн. собр. соч. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. Т. 1. С. 184—199.
15. Биркгоф Дж. Динамические системы. М.—Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
16. Якоби К. Лекции по динамике. М.—Л.: Глав. ред. общетехн. лит-ры, 1936. 270 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.IV.1988.

УДК 531.01

КОНСТРУКТИВНАЯ МОДЕЛЬ УДАРА С ТРЕНИЕМ

Иванов А. П.

Для описания стереомеханического удара шероховатых тел предлагается модель, основанная на задании ударных сил как некоторой функции деформаций (например, по аналогии со свойствами вязкоупругой среды). При этом коэффициенты трения и восстановления относительной скорости заранее не задаются, что дает возможность исследовать их зависимость от начальных условий. Ранее [1—3] удар с трением изучался при помощи формально-аксиоматического подхода. Предлагаемая модель более физична, более проста и лучше согласуется с экспериментальными данными (например, [4]).

1. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему с конфигурационным пространством $x \in R^n$, кинетической энергией $T = \frac{1}{2} \dot{x}^T A(x) \dot{x}$, $A \in R^{n \times n}$, обобщенными силами $Q(x, \dot{x}) \in R^n$ и неударяющей связью $f(x) \geq 0$. В системе двух твердых тел такая связь выражает невозможность одновременного занятия точками разных тел одинаковых положений в пространстве, при этом f — расстояние между телами.

Если в некоторый момент времени $t = t^0$ выполнены условия

$$f(x) = 0, \quad \dot{f}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \dot{x}_j < 0$$

то происходит удар системы о связь. Примем допущения стереомеханической теории [5] о возможности пренебречь как продолжительностью удара, так и сопровождающими его волновыми явлениями. Тогда до- и послеударные значения координат x_- и x_+ совпадают и описание удара сводится к нахождению зависимости x_+ от x_- .

Уравнения Лагранжа в применении к удару имеют вид [1]

$$(1.1) \quad \Delta \dot{x}^0 A(x^0) = I, \quad x^0 = x(t^0), \quad \Delta x^0 = x_+^0 - x_-^0$$

где I — ударный импульс.

Обычно [1—3] определение величины I основано на использовании некоторых постулатов. К их числу относится гипотеза Ньютона о двух фазах удара, в соответствии с которой

$$(1.2) \quad (x_+^0, N) = -\kappa (x_-^0, N), \quad 0 \leq \kappa \leq 1$$

где κ — коэффициент восстановления, N — вектор, нормальный к поверхности $f(x) = 0$ в точке x^0 . Вторым постулатом — о кулоновском характере ударного трения — утверждает, что в течение всего удара нормальное и касательное напряжения связаны законом Амонтона — Кулона [1]. Совокупность двух этих предположений позволяет однозначно определить зависимость x_+^0 от x_-^0 [1—3], однако она настолько сложна, что получение явных формул возможно лишь в простейших частных случаях [6].

Другой подход к описанию стереомеханического удара связан с использованием физических моделей ударных сил. При этом ограничение $f(x) \geq 0$ во время удара считается нарушенным (так что $-f(x) \sim \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$), что соответствует деформации соударяемых тел. Для $f < 0$ ударные